Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 51(99) No. 3, 2008, 219–231

Résultant et degré topologique en dimension deux

by
S. Jadiba

Abstract

Soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux polynômes non constants à deux variables et à coefficients dans $\mathbb{C}$. Nous étudions la relation entre les degrés du résultant de $f-u$ et $g-v$ par rapport à x et à y et le degré topologique $\deg \varphi$ de l'application $\varphi = (f, g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$. Le cas particulier où $\deg \varphi = 0$ a été traité par Sakkalis [S]. En tant qu'application, nous donnons une démonstration constructive du fait connu, voir Borel [Bo], qu'un morphisme $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ qui est injective est en effet un automorphisme de $\mathbb{C}^2$.

Let $f(x, y)$ and $g(x, y)$ be two non-constant polynomials in two variables with complex coefficients. We study the relation between the degrees of the resultant of $f-u$ and $g-v$ with respect to x and y and the topological degree $\deg \varphi$ of the application $\varphi = (f, g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$. The special case $\deg \varphi = 0$ was considered by Sakkalis [S]. As an application, we give a constructive proof of the known fact, see Borel [Bo], that an injective morphism $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ is actually an automorphism of $\mathbb{C}^2$.

Key Words: Résultant, degré topologique, automorphismes affines.
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 14R10, 14R15, Secondary 14E22.

1 Introduction

Soient $f(x, y), g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ deux polynômes non constants et soient u et v deux indéterminées. On pose:

$$A(x, u, v) = res_y(f - u, g - v) = A_k(u, v)x^k + \ldots + A_0(u, v) \in \mathbb{C}[x, u, v]$$

et

$$B(y, u, v) = res_x(f - u, g - v) = B_r(u, v)y^r + \ldots + B_0(u, v) \in \mathbb{C}[y, u, v].$$

Si les polynômes f, g sont quelconques, il n'y a pas de relation intéressante entre k, r et le degré topologique $\deg \varphi$ de l'application

$$\varphi = (f, g) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,$$

voir Exemple 3.1.

Le résultat principal de cet article, Théorème 3.2, nous dit que lorsque f et g sont $x-$ et, respectivement, $y-$ réguliers (condition qu'on peut facilement réaliser par un changement de coordonnées linéaires), on a $k = r = \deg \varphi$. Ici $\deg \varphi = \# \varphi^{-1}(u, v)$ pour $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ générique, (c'est-à-dire il existe $S \subset \mathbb{C}^2$ un ouvert de Zariski non vide tel que l'égalité soit vraie pour $(u, v) \in S$).

En plus, on a $k = r = 0$ si et seulement si

$$J(f, g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

résultat du à Sakkalis, voir [S], et redémontré ici.

Dans la dernière section on donne une nouvelle démonstration dans le cas $X = \mathbb{C}^2$ du fait classique qu'une application $\varphi : X \to X$ injective est forcément un isomorphisme birégulier pour toute variété complexe X, voir [A], [Bo], [BCW] ainsi que [K] et [Pa] dans le cas réel.

Notre démonstration à la différence des autres, est *constructive* et donne aussi comme un corollaire un résultat surprenant du à Mckay et Wang qui dit que l'application réciproque φ^{-1} est essentiellement déterminée par les *polynômes frontières* $f(x, 0)$, $f(0, y)$, $g(x, 0)$ et $g(0, y)$ associés aux polynômes f et g, voir Corollaire 4.1 et Remarque 4.2. Le rôle des " polynômes frontières " qui est assez mystérieux dans [MW] est éclairci par l'Exemple 4.2 et le Théorème 4.2, qui est notre deuxième résultat principal.

Dans la section de rappels, Proposition 2.6 et Remarque 2.2 sont probablement nouvelles et utiles en eux-même.

Nous avons obtenu des résultats similaires dans le cas de n polynômes de n variables, mais ils seront présentés dans un autre article car ils sont beaucoup plus techniques.

2 Rappels

On commence avec quelques rappels sur les résultants, voir par exemple [BM], [EM].

Definition 2.1. *Soient $a(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$ et $b(t) = b_m t^m + \ldots + b_0$ deux polynômes en la variable t et à coefficients dans un anneau commutatif R. Le résultant de $a(t)$ et $b(t)$ (que l'on note $res_t(a, b)$) est le déterminant de la matrice de Sylvester:*

$$S(a,b) = \begin{pmatrix} a_n & & 0 & b_m & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ a_0 & & a_n & b_0 & & b_m \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_0 & 0 & & b_0 \end{pmatrix}$$

Le résultant a les propriétés suivantes, (voir [S], page 474).

Proposition 2.1.

(1) Il existe des polynômes $A(t), B(t)$ de degré n', m' respectivement tel que $n' < m$, $m' < n$ et:

$$a(t)A(t) + b(t)B(t) = res_t(a,b).$$

(2) $res_t(a,b) = 0$ si et seulement si $a(t)$ et $b(t)$ ont un facteur commun de degré positif.

(3) $res_t(a, b.c) = res_t(a,b).res_t(a,c)$ pour tout $c(t)$ non nul de $R[t]$.

(4) Soient $R = \mathbb{C}[y], f(x,y) = a_n x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \ldots + a_0(y)$ et $g(x,y) = b_m x^m + b_{m-1}(y)x^{m-1} + \ldots + b_0(y)$ tels que $(a_n, b_m) \in (\mathbb{C}^*)^2$.

Si $P(y) = res_x(f,g)$ et $y_0 \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(y)$, alors il existe $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$.

Definition 2.2. *Soit $f(x,y)$ un polynôme de $\mathbb{C}[x,y] = \mathbb{C}[y][x]$ de degré n en x. On dit que f est quasi-régulier en x si le coefficient de x^n est constant non nul.*

On continue avec quelques rappels sur les applications dominantes et le théorème de Bézout affine, voir Proposition 2.4.

Definition 2.3. *Soit $F : V \longrightarrow W$ un morphisme entre deux variétés algébrique complexes V et W. On dit que F est dominant si l'adhérence de son image (pour la topologie de Zariski) est égale à W : $\overline{F(V)} = W$.*

Si V et W sont deux variétés algébrique complexes irréductibles et $F : V \longrightarrow W$ est dominant, alors F induit un morphisme $F^* : \mathbb{C}(W) \longrightarrow \mathbb{C}(V)$ entre les corps de fonctions rationelles sur W (resp sur V) : $F^*(h) = h \circ F$.
On a le résultat suivant.

Proposition 2.2. *Soit $F : V \longrightarrow W$ un morphisme dominant. Alors on a les conditions équivalentes:*

(i) l'extension $F^* : \mathbb{C}(W) \longrightarrow \mathbb{C}(V)$ est finie.

(ii) *Le fibre générique de F est finie.*

(iii) $\dim V = \dim W$.

Si une de ces conditions est satisfaite, alors on a $[\mathbb{C}(V) : \mathbb{C}(W)] = \#F^{-1}(w)$ pour tout w dans un ouvert de Zariski dense de W, (voir [M], page 46).

Exemple 2.1. *Une application $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ polynomiale est dominante si l'extension de corps $\mathbb{C}(x) = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}(f) = \mathbb{C}(f_1, \dots, f_n)$ est finie.*

Proposition 2.3. *Soit $F : V \longrightarrow W$ un morphisme.*

(i) *Si V et W sont irréductibles, alors F dominant $\Longleftrightarrow F^*$ injectif.*

(ii) *On suppose F dominant et V irréductible. Alors W est irréductible.*

Pour la dernière affirmation, voir [P], page 26.

Corollaire 2.1. *Soit $\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ un morphisme. Alors $A = \varphi(\mathbb{C}^2)$ est un ensemble constructible et $\bar{A}$ est un ensemble algébrique irréductible.*

Proposition 2.4. *Soient f et g deux polynômes de $\mathbb{C}[x, y]$ non constants et premiers entre eux. Alors le lieu des zéros communs à f et g, $V(f) \cap V(g)$, est un nombre fini de points distincts $A_1, \dots, A_s$, et on a :*

$$\sum_{1 \leq j \leq s} i_{A_j}(f, g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{(f, g)}.$$

Ici $i_{A_j}(f, g)$ désigne la multiplicité d'intersection de f et g en A_j.

Pour la dernière affirmation, voir [BM], page 136.

Proposition 2.5. *Soit M un A-module de type fini sur un anneau principal A. Il existe une suite d'éléments non inversibles $(b_1, \dots, b_r)$ de A telle que :*

(1) *Pour tout $i = 1, \dots, r-1$, b_i divise b_{i+1}.*

(2) *M est isomorphe à $\frac{A}{(b_1)} \oplus \dots \oplus \frac{A}{(b_r)}$.*

De plus, à unités près, les éléments $b_1, \dots, b_r$ sont uniques. Nous les appelons les facteurs invariants de M. Dans ce cas, la suite des idéaux de Fitting de M est donnée par:

$$F^{(0)}(M) = (b_1 \cdots b_r) \quad , \quad F^{(1)}(M) = (b_1 \cdots b_{r-1}) \quad , \dots , \quad F^{(r-1)}(M) = (b_1),$$
$$F^{(r)}(M) = F^{(r+1)}(M) = \dots = A.$$

Pour cette affirmation, voir [BM], page 97 et page 102.

Remarque 2.1. *Avec les notations de la Proposition 2.5, M de torsion si et seulement si $b_1.....b_r \neq 0$. Dans ce cas, la suite :*

$$0 \subsetneqq F^{(0)}(M) \subsetneqq F^{(1)}(M) \subsetneqq ..... \subsetneqq F^{(r)}(M) = A$$

détermine les facteurs invariants b_j.

Le résultat suivant généralise légérement la Proposition 2.6 de [BM], page 97, voir aussi Proposition 5.3 de [EM], page 108.

Proposition 2.6. *Soient $f = x^n + ... + a_n$ et $g = b_0 x^m + ... + b_m$ deux polynômes de $A[x]$. Notons ψ l'endomorphisme de multiplication par g dans l'anneau quotient $\dfrac{A[x]}{(f)}$:*

$$\psi : \frac{A[x]}{(f)} \longrightarrow \frac{A[x]}{(f)}$$
$$\overline{U} \longmapsto \overline{Ug}.$$

Alors :

(1) $det(M_\psi) = Res(f, g)$.

(2) Le $A-$module $\frac{A[x]}{(f,g)}$ est de présentation finie.

(3) Pour tout $j = 1, \ldots, n$, l'idéal de Fitting $F^{(j)}(\frac{A[x]}{(f,g)})$ est engendré par les mineurs d'ordre $n + m - j$ de la matrice de Sylvester de f et g.

Remarque 2.2. *Soient $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ deux polynômes non constants et premiers entre eux tel que f soit quasi-régulier en x. Le $\mathbb{C}[y]-$module $M = \dfrac{\mathbb{C}[x, y]}{(f, g)}$ est de torsion, car $\dim_{\mathbb{C}} M < +\infty$ par la Proposition 2.4, et donc M est complétement déterminé (à isomorphisme près) par ses facteurs invariants par la Remarque 2.1. Ces facteurs sont calculés à l'aide des idéaux de Fitting, donc à partir de la matrice de Sylvester $Sylv(f, g)$.*

3 Le résultat principal

Soient u et v deux indéterminées. On définit comme dans l'Introduction:

$$A(x, u, v) = res_y(f - u, g - v) = A_k(u, v)x^k + \ldots + A_0(u, v) \in \mathbb{C}[x, u, v]$$

$$B(y, u, v) = res_x(f - u, g - v) = B_r(u, v)y^r + \ldots + B_0(u, v) \in \mathbb{C}[y, u, v]$$

Le résultat suivant a été démontré par Sakkalis [S].

Théorème 3.1. *Soient $f(x, y), g(x, y)$ deux polynômes de $\mathbb{C}[x, y]$, quasi-réguliers en x et en y. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $k = 0$.

(ii) *Il existe $h(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$ tel que $h \neq 0$ et $h(f, g) = 0$.*

(iii) $J(f, g) = 0$.

Notre résultat principal est la généralisation suivante du Théorème 3.1.

Théorème 3.2. *Soient $f(x, y), g(x, y)$ deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[x, y]$, f quasi-régulier en x et g quasi-régulier en y. Soit*

$$\varphi = (f, g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, (x, y) \longmapsto (f(x, y), g(x, y))$$

et soit $D = \varphi(\mathbb{C}^2)$. Alors on a $k = r$ et $k = \#\varphi^{-1}(u, v)$ pour $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ générique, (c'est-à-dire il existe $S \subset \mathbb{C}^2$ un ouvert de Zariski non vide tel que l'affirmation soit vraie pour $(u, v) \in S$).

En particulier:

(i) *φ n'est pas dominant $\Longleftrightarrow k = r = 0 \Longleftrightarrow \dim \bar{D} = 1 \Longleftrightarrow J(f, g) = 0$ (le polynôme nul). Dans ce cas il existe un polynôme irréductible $h(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$ tel que $h(f, g) = 0$.*

(ii) *φ est dominant $\Longleftrightarrow k = r > 0 \Longleftrightarrow \bar{D} = \mathbb{C}^2 \Longleftrightarrow J(f, g)$ n'est pas le polynôme nul.*

Preuve:
Les polynômes $f - u, g - v$ sont quasi-réguliers en x et en y et premiers entre eux pour u, v génériques (évident lorsque $\dim \bar{D} = 1$ et conséquence du théorème sur la dimension des fibres de φ lorsque $\dim \bar{D} = 2$). Soient $b_1, \ldots, b_s$ les facteurs invariant du $\mathbb{C}[y]-$module $M = \dfrac{\mathbb{C}[x, y]}{(f - u, g - v)}$. D'après la Proposition 2.5 et la régularité en x on a:

$$\dim_{\mathbb{C}} M = \dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathbb{C}[y]}{b_1} \oplus \ldots \oplus \frac{\mathbb{C}[y]}{b_s}) = \deg_y b_1 + \ldots + \deg_y b_s =$$

$$= \deg_y(b_1 \cdots b_s) = \deg_y[res_x(f - u, g - v)] = r.$$

Le même argument appliqué au $\mathbb{C}[x]-$module $M = \dfrac{\mathbb{C}[x, y]}{(f - u, g - v)}$ montre que $\dim_{\mathbb{C}} M = k$. Donc $k = r$.

Supposons que φ n'est pas dominant. Alors il existe $h(u, v)$, $h \neq 0$ tel que $h(f(x, y), g(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{C}^2$. En effet, on a $\dim \bar{D} > 0$ car f, g sont non-constants, donc $\bar{D}$ est une courbe irréductible de $\mathbb{C}^2$ et on prend h une équation réduite de $\bar{D}$. Si on pose $S = \mathbb{C}^2 \setminus \bar{D}$, on voit que $k = r = \#\varphi^{-1}(u,v) = 0$ pour $(u,v) \in S$ dans ce cas. Si $\dim \bar{D} = 1$, alors $J(f,g) = 0$. Réciproquement, si $J(f,g) = 0$, alors $\dim \bar{D} = 1$ (sinon le Théorème de Sard, voir [M], p.42, donne une contradiction).

Supposons maintenant que φ est dominant, i.e. $\bar{D} = \mathbb{C}^2$. Soit $S \subset \mathbb{C}^2$ un ouvert de Zariski nonvide formé entièrement par des valeurs régulières de φ. Un tel ouvert existe par le Théorème de Sard, voir [M], p.42. Si $(u,v) \in S$, alors $k = r = \#\varphi^{-1}(u,v) > 0$, car toute solution (x_0, y_0) du système $f(x,y) = u, \;\; g(x,y) = v$ a la multiplicité 1. En plus, on a $J(f,g)(x_0,y_0) \neq 0$.

Réciproquement, si $J(f,g) \neq 0$, on en déduit que D a un intérieur non-vide pour la topologie forte. Ceci entraîne évidemment l'égalité $\bar{D} = \mathbb{C}^2$.

Remarque 3.1. *Plus précisement, dans le point (ii) ci-dessus, on a* $A_0 = h^p$ *où* p *est le degré topologique de l'application* $\mathbb{C} \to D$, $y \mapsto (f(0,y), g(0,y))$. *De même, on a* $B_0 = h^q$ *où* q *est le degré topologique de l'application* $\mathbb{C} \to D$, $x \mapsto (f(x,0), g(x,0))$, *voir Théorème 1 dans [MW].*

Exemple 3.1. *La condition de quasi régularité dans le Théorème 3.2 est importante, comme le montre l'exemple suivant:*

$$f(x,y) = x^2y^2 + y \;\; et \;\; g(x,y) = xy^2 + xy.$$

On a:

$$res_y(f-u, g-v) = (v^2-u)x^4 - (2uv+v)x^3 + (u^2+u)x^2 - vx$$

et

$$res_x(f-u, g-v) = y^5 + (2-u)y^4 + (1-2u)y^3 + (v^2-u)y^2.$$

Donc $k = 4 \neq r = 5$. *Mais si on fait un changement des variables:* $x = X + Y$ *et* $y = X - Y$ *on obtient des polynômes quasi- réguliers en* X *et en* Y*:*

$$F(X,Y) = X^4 + Y^4 - 2X^2Y^2 + X - Y$$

et

$$G(X,Y) = X^3 + Y^3 - YX^2 - XY^2 + X^2 - Y^2.$$

Maintenant on a:

$$res_Y(F-u, G-v) = (-8u + 8v^2)X^3 + (-8vu + 8v^2 + 4u^2 - 8u + 4v - 4v^2u)X^2$$
$$+(-10vu + 2v^2 + 4v + 4vu^2 + 6u^2 - 4v^2u)X + 3v^2 - 2uv^2 + 4vu^2 - vu - u^3 - 3v^3 + v^4$$

et

$$res_X(F-u, G-v) = (8u - 8v^2)Y^3 + (-4v + 8vu - 4v^2u + 8v^2 - 8u + 4u^2)Y^2$$
$$+(4v + 4v^2u - 10vu + 4vu^2 - 2v^2 - 6u^2)Y - 2uv^2 + 3v^2 - u^3 + vu + v^4 - 4vu^2 + 3v^3.$$

Donc maintenant les nouveaux degrs k' *et* r' *coincident:* $k' = r' = 3$. *En particulier, le degr topologique de l'application*

$$\varphi = (f,g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

est $3 < k < r$.

4 Une application

Nous allons donner une nouvelle démonstration du résultat suivant, voir Bass et al. [BCW], Théorème 3.2 et Borel [Bo].

Théorème 4.1. *Soit* $\varphi = (f, g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ *une application régulière injective. Alors* φ *est un automorphisme de* $\mathbb{C}^2$.

Démonstration:
La démonstration utilise les lemmes suivantes.

Lémma 4.1. *Si* $\varphi = (f, g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ *est injective, alors* $J(f, g) \in \mathbb{C}^*$.

Preuve: Supposons que $\varphi(0, 0) = (0, 0)$ et que $J(f, g)(0, 0) = 0$. Alors on sait que le degré local du germe d'application $\varphi_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ est donné par:

$$\deg \varphi_0 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{(f, g)}$$

(voir [AGV], vol I, page 76). Si φ est injective, on a $\deg \varphi_0 = 1$, donc l'idéal (f, g) doit être l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$. Or cette dernière condition est équivalente à $J(f, g)(0, 0) \neq 0$, contradiction.

Remarque 4.1. *La condition* $k = r = 1$ *nous dit que l'application* φ *est génériquement injective. Toutefois, une telle application n'est pas forcément injective. Un exemple simple est donné par* $f = x - y, \quad g = x^2 - y^2$.

Lémma 4.2. *Soit* $\varphi = (f, g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ *une application régulière tel que* $J(f, g) \in \mathbb{C}^*$. *Alors l'ensemble* $F = \mathbb{C}^2 \setminus \varphi(\mathbb{C}^2)$ *est fini.*

Preuve: On voit facilement que $\varphi(\mathbb{C}^2)$ est un ouvert dans la topologie forte (métrique) de $\mathbb{C}^2$. Donc $\varphi(\mathbb{C}^2)$ est un ouvert de Zariski de $\mathbb{C}^2$, (voir [M], page 38)

Supposons que F n'est pas fini. Alors il existe une courbe irréductible $C \subset F$ donnée par une équation $h = 0$, où $h \in \mathbb{C}[u, v], h \notin \mathbb{C}$. On en déduit que le polynôme $h(f, g) \in \mathbb{C}[x, y]$ n'a pas de zéros, donc $h(f, g) = c, c \in \mathbb{C}$.
Cela entraine que $\varphi(\mathbb{C}^2)$ est contenu dans la courbe $h - c = 0$, contradiction en vue du Théorème 3.2.

<u>Preuve du Théorème 4.1:</u>

On peut évidement supposer que f et g sont $x-$ et $y-$ réguliers.
Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \varphi(\mathbb{C}^2)$. Ceci veut dire que le système

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, y) = u_0 \\ g(x, y) = v_0 \end{cases}$$

n'a aucune solution $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$. Autrement dit, par tout $x_0 \in \mathbb{C}$, le système:

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x_0, y) = u_0 \\ g(x_0, y) = v_0 \end{cases}$$

n'admet aucune solution $y_0 \in \mathbb{C}$. Ceci est équivalent à la condition:

$$(3) \qquad \text{pour tout } x_0 \in \mathbb{C}, A(x_0, u_0, v_0) \neq 0.$$

Dans notre situation d'après le Théorème 3.2 on a $k = 1$, donc

$$A(x, u, v) = A_1(u, v)x + A_0(u, v), \ \textit{où } A_1(u, v) \neq 0.$$

La condition (3) est équivalente à:

$$(4) \qquad A_1(u_0, v_0) = 0 \textit{ et } A_0(u_0, v_0) \neq 0.$$

Cas 1: Le polynôme $A_1 \in \mathbb{C}[u, v]$ n'est pas une constante. Alors l'ensemble

$$F = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2; A_1(u, v) = 0 \textit{ et } A_0(u, v) \neq 0\}$$

est fini si et seulement si $F = \phi$. En effet, soit C_1 une composante irréductible de la courbe $\{A_1 = 0\}$. Alors, soit $A_0/C_1 = 0$ et donc $F \cap C_1 = \phi$, ou bien A_0/C_1 n'est pas identiquement nulle. Alors

$$F \cap C_1 = C_1 \setminus \{p \in C_1; A_0(p) = 0\}$$

est un ouvert de Zariski de C_1, donc un ensemble infini. On en déduit que toutes les composantes irréductibles de $\{A_1 = 0\}$ sont dans la première situation, i.e. $F \cap C_1 = \phi$. Si on est dans cette situation, soit $(a, b) \in C_1$. On a donc

$$(5) \qquad A_1(a, b) = A_0(a, b) = 0.$$

On en déduit que

$$(5') \qquad A(x, a, b) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{C}.$$

Ceci dit que la fibre $\varphi^{-1}(a, b)$ contient une infinité de points, contradiction car φ est injective. Donc le cas 1 est impossible.

Cas 2: A_1 est une constante non nule. Si $A_1 \in \mathbb{C}^*$, alors on a:

$$(6) \qquad x = -\frac{A_0(u, v)}{A_1}.$$

On peut refaire le même raisonement avec $B(y, u, v) = B_1(u, v)y + B_0(u, v)$ et on arrive à la conclusion que $B_1 \in \mathbb{C}^*$. Donc on peut écrire

$$(6') \qquad y = -\frac{B_0(u, v)}{B_1}.$$

Les formules (6) et (6') montrent que l'application $\varphi = (f, g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ est une bijection et que φ^{-1} est donné par les polynômes de (6) et (6'). Donc φ est un automorphisme birégulier de l'espace affine $\mathbb{C}^2$.

Exemple 4.1. *Soient* $f(x,y) = x, g(x,y) = y + h(x)$. *Alors on a :*

$$res_y(f-u, g-v) = x - u$$

$$res_x(f-u, g-v) = y - v + h(u).$$

On remarque que $k = r = 1$, *et* $\varphi = (f,g)$ *est injective. On a aussi* $A_0(u,v) = -u$ *et* $B_0(u,v) = -v + h(u)$.

Corollaire 4.1. *Si* $\varphi = (f,g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ *est un automorphisme , alors* $\varphi_0 = (A_0, B_0) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ *est aussi un automorphisme. Dans ces conditions, il existe une homothétie*

$$H : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, H(x,y) = (-\frac{x}{A}, -\frac{y}{B}).$$

telle que $\varphi^{-1} = H \circ \varphi_0$.

Remarque 4.2. *On a évidemment:*

$$A_0(u,v) = res_y(f(0,y) - u, g(0,y) - v).$$

Et

$$B_0(u,v) = res_x(f(x,0) - u, g(x,0) - v).$$

Donc, l'application réciproque φ^{-1} *est déterminée à une homothétie près par les " polynômes frontiéres "* $f(x,0), f(0,y), g(x,0)$ *et* $g(0,y)$ *associés aux polynômes* f *et* g. *Des résultats similaires ont été obtenus par Mckay et Wang [MW].*

Remarque 4.3. *Soit* $\varphi = (f,g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ *et* $\varphi^* : \mathbb{C}[u,v] \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]$ *le morphisme induit, i.e.* $\varphi^*(u) = f, \varphi^*(v) = g$. *Dans l'article [MW], on travaille sous l'hypothése* φ^* *surjectif (qui est d'ailleurs équivalent à la condition* φ^* *isomorphisme, voir Lemme 11 dans [MW], page 252.) Notre Théorème 4.1 montre que* φ *injectif implique* φ^* *isomorphisme.*

Le rôle des " polynômes frontiéres " est éclairci par les remarques suivantes.

Definition 4.1. *Un couple de courbes* (C_1, C_2) *de* $\mathbb{C}^2$ *est appelé un repère si* (P_1, P_2) *forment un système de coordonnées sur* $\mathbb{C}^2$, *c'est-à-dire* $\mathbb{C}[P_1, P_2] = \mathbb{C}[x,y]$, *où* $P_j = 0$ *est une équation réduite de la courbe* C_j, $j = 1, 2$.

Exemple 4.2. *Soit* $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *un automorphisme et soit* $\psi = \varphi^{-1}$. *Posons* $C_1 = \varphi(\{x = 0\})$ *et* $C_2 = \varphi(\{y = 0\})$. *Alors le couple* (C_1, C_2) *de* $\mathbb{C}^2$ *est un repère. Plus précisement, si* $\psi = (P_1, P_2)$, *alors la courbe* C_j *admet comme équation* $P_j = 0$ *pour* $j = 1, 2$. *On remarque donc que l'automorphisme* φ *est déterminé à une homothétie près par le repère* (C_1, C_2). *La donnée des "polynômes frontiéres" détermine évidemment le repère* (C_1, C_2), *car*

$$C_1 = \{(f(0,y), g(0,y)) \;\mid\; y \in \mathbb{C}\}$$

et

$$C_2 = \{(f(x,0), g(x,0)) \;\mid\; x \in \mathbb{C}\}.$$

Théorème 4.2. *Soit $\varphi = (f,g) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ une application régulière. Alors φ est un automorphisme de $\mathbb{C}^2$ si et seulement si pour tout repère (C_1, C_2), le couple des images $(\varphi(C_1), \varphi(C_2))$ est un repère.*

Preuve:

L'implication directe est évidente. Dans la suite nous supposons que pour tout repère (C_1, C_2), le couple des images $(\varphi(C_1), \varphi(C_2))$ est un repère et nous montrons que l'application φ est injective. En utilisant le Théorème 4.1 on en déduit que φ est un automorphisme.

Remarquons d'abord que le cas $J(f,g) = 0$ est impossible. En effet, dans ce cas le Théorème 3.2 nous dit que $D = \varphi(\mathbb{C}^2)$ est une courbe irréductible, tandis que $C_1 \cup C_2 \subset D$ a exactement deux composantes irréductibles.

Supposons dans la suite que

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \;\mid\; J(f,g)(x,y) \neq 0\}$$

est un ouvert de Zariski non vide.

Cas 1. (la restriction $\varphi|U$ n'est pas injective)

Alors, à une translation au but près, il existe deux points distinctes $p, q \in U$ tels que $\varphi(p) = \varphi(q) = (0,0)$. On choisit deux vecteurs tangents w_p en p et w_q en q tels que $d\varphi(p)(w_p) \neq d\varphi(q)(w_q)$. Il existe une courbe affine lisse isomorphe $\mathbb{C}$ qui passe par p et q et telle que les vecteurs tangents C aux points p et q soient respectivement w_p et w_q. En utilisant le Théorème de linéarisation d'Abhyankar-Moh [AM], et l'implication directe de notre Théorème, on déduit l'existence d'une courbe C' (en effet il existe une infinité de telles courbes!) telle que le couple (C, C') soit un repère. Par hypothèse, $(\varphi(C), \varphi(C'))$ est un repère, en particulier la courbe $\varphi(C)$ doit être lisse. Par construction, la courbe $\varphi(C)$ est singulière l'origine, car elle a au moins deux branches à tangents distincts qui passent par ce point. Donc on est arrivé à une contradiction, qui montre notre résultat dans ce cas.

Cas 2. (la restriction $\varphi|U$ est injective)

Si $U = \mathbb{C}^2$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, la différence $Z = \mathbb{C}^2 \setminus U$ est une courbe. Supposons qu'il existe deux points distinctes $p, q \in \mathbb{C}^2$ tels que $\varphi(p) = \varphi(q) = (0,0)$. Alors il existe une courbe affine lisse isomorphe $\mathbb{C}$ qui passe par p et q et telle que l'intersection $C \cap Z$ est un ensemble finit. Alors la courbe $\varphi(C)$ est singulière à l'origine, car elle a au moins deux branches distinctes, les images par φ de deux germes (C,p) et (C,q), qui passent par ce point. On obtient la même contradiction qu'au cas 1.

References

[A] J. Ax: Injective endomorphisms of varieties and schemes, Pacific J. Math., 31 (1969), 1–7.

[AGV] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, et A.N. Varchenko: Singularités des applications différentiables I, Birkhauser, Basel-Boston, 1985.

[AM] S. Abhyankar, T. Moh: Embeddings of the line in the plane, J. Reine Angew. Math.267 (1975), 148–166.

[BCW] H. Bass, E.H. Connell, D. Wright: The jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse, Bull. A.M.S 7 (1982), 287–330.

[Bo] A. Borel: Injective endomorphisms of algebraic varieties, Arch. Math. (Basel) 20 (1969), 531–537.

[BM] J. Briançon et Ph. Maisonobe: Éléments d'algébre commutative, Ellipses, 2004.

[EM] M. Elkadi et B. Mourrain: Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux, MA-SMAI, 2007.

[K] K. Kurdyka: Injective endomorphisms of real algebraic sets are surjective, Math. Ann. 313(1999), 69–82.

[M] D. Mumford: Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1991.

[MW] J.H. Mckay, S.S. Wang: An inversion formula for two polynomials in two variables, Journal of Pure and Applied Algebra 40, North-Holland, (1986), 245–257.

[P] D. Perrin: Géométrie Algébrique (Une introduction), InterÉditions / CNRS Éditions, 1995.

[Pa] A. Parusinski: Topology of injective endomorphisms of real algebraic varieties, Math. Ann. 328 (2004), 353–372.

[S] T. Sakkalis: On relations between jacobians and resultants of polynomials in two variables, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 47 (1993), 473–481.

Received: 2.06.2008.

Laboratoire J.A. Dieudonné, UMR du CNRS 6621,
Université de Nice-Sophia-Antipolis,
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02,
FRANCE.
E-mail: jadiba@math.unice.fr