Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 57(105) No. 4, 2014, 403–407

Problèmes de Favard généralisés

by
Michel Grandcolas

Résumé

Les solutions des Problèmes de Favard donnent une borne inférieure à $F(d) = \min_{P \in P_d}$ diam(P), où P_d représente l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré d, diam(P) est le diamètre des zéros de P. Ils montrent que : $\lim_{d\to\infty} F(d) = 2$ et que le minimum de $F(d)$ est $\sqrt{3}$. Nous prouvons une inégalité isopérimétrique pour un convexe compact dans le plan, ce qui nous permet de donner une preuve plus simple, plus générale, et également des bornes meilleures pour $F(d)$.

Mots-Clés : Problèmes de Favard, entier alèbrique, diamètre transfini.
2010 Classification Mathématiques par Sujet : Primaire 12D10, Secondaire 11H99, 11Y40, 26C10.

1 Introduction

Soit P un polynôme et X_P l'enveloppe convexe de ses racines. Le *diamètre* des zéros d'un polynôme P, noté diam(P), est la distance maximale entre les racines de P.

Les solutions des Problèmes de Favard [3, 2] donnent une borne inférieure à $F(d) = \min_{P \in P_d}$ diam(P), où P_d représente l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré d, diam(P) est le diamètre des zéros de P. Ils montrent que : $\lim_{d\to\infty} F(d) = 2$ et que le minimum de $F(d)$ est $\sqrt{3}$.

Nous prouvons une inégalité isopérimétrique dans le plan, ce qui permet de généraliser les Problèmes de Favard au diamètre pondéré $D_n(X)$ d'un convexe X du plan :

$$D_n(X) = \sup_{(A_1,\ldots,A_{2n}) \in X^{2n}} D_n(A_1, \ldots, A_{2n}),$$

où

$$D_n(A_1, \ldots, A_{2n}) = \left(\frac{1}{n(2n-1)} \sum_{1 \le i \ne j \le 2n} A_i A_j^2 \right)^{1/2}$$

est la racine carrée de la moyenne des carrés des distances entre les points A_i, $1 \le i \le 2n$. La suite $\big(D_n(X)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente. Son premier terme, $D_1(X)$, représente le diamètre usuel. De plus, les termes de la suite et leur limite permettent d'obtenir des majorations du diamètre transfini $t(X)$ de X.

Nous prouvons une inégalité isopérimétrique entre la longueur $L(X)$ du bord de X et $D_n(X)$, en utilisant la formule donnant $L(X)$ comme intégrale des largeurs des bandes contenant X. Nous obtenons la valeur de $D_n(D)$ pour le disque D.

On appliquera l'inégalité isopérimétrique précèdente à l'enveloppe convexe X_P des racine d'un polynôme P de P_d. Nous donnons aussi une preuve plus simple, plus générale, et également des bornes meilleures pour $F(d)$ que dans [3] car, si $n = 1$, $D_n(X_P) = \text{diam}(P)$.

2 Quelques lemmes et énoncé du théorème principal

Lemme 1. *Soient $(A_i)_{1\leq i\leq 2n}$, $2n$ points dans le plan et G leur barycentre. On a :*

$$\sum_{1\leq i\neq j\leq 2n} A_iA_j^2 = 2n \sum_{1\leq i\leq 2n} GA_i^2.$$

Démonstration: On remplace $A_iA_j^2$ par $GA_i^2 + GA_j^2 + 2\overrightarrow{A_iG}\cdot\overrightarrow{A_jG}$ et on utilise le fait que $\sum_{1\leq i\leq 2n}\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. □

Lemme 2. ([2]) *Si X est un convexe compact du plan et si $L(X)$ est la longueur de son bord, on a :*

$$L(X) = \int_0^\pi l(\theta)d\theta,$$

où $l(\theta)$ est la largeur de la bande contenant X, faisant un angle θ avec l'horizontale.

Lemme 3. ([2]) *Si X est un convexe compact du plan, si $L(X)$ est la longueur de son bord, si $t(X)$ est son diamètre transfini, on a :*

$$2\pi t(x) \leq L(X).$$

Lemme 4. ([2]) *Pour tout convexe compact X du plan et d un entier positif, on note :*

$$t_d(X) = \sup_{x_1,\ldots,x_d\in X} |x_i - x_j|^{2/(d^2-d)}.$$

On a :

1) $t_d(X) \leq d^{2/(d^2-1)} t_{d+1}(X)$.

2) $t_d(X) \leq \prod_{k\geq d} k^{2/(k^2-1)} t(X)$.

3) La suite $\big(t_d(X)\big)_{d\in\mathbb{N}}$ décroit vers $t(X)$ et

$$t(X) \geq t_d(X) \prod_{k\geq d} k^{-2/(k^2-1)}.$$

Lemme 5. *La suite $\big(D_n(X)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

Démonstration: La moyenne minimale dans X sur $2n+2$ points est inférieure à celle sur $2n$ points. □

Théorème 1 (inégalité isopérimétrique). *Si X est un convexe compact du plan, on a :*

$$L(X) \leq 2\pi\sqrt{\frac{2n-1}{4n}}D_n(X),$$

avec égalité, dans le cas où X est un disque.

Corollaire 1. *Si X est un convexe compact du plan, on a :*

$$A(X) \leq \frac{(2n-1)\pi}{4n}D_n(X)^2,$$

avec égalité, dans le cas où X est un disque.

Démonstration: On utilise l'inégalité isopérimétrique $A(X) \leq \frac{1}{4\pi}L(X)^2$ et le théorème principal. □

Corollaire 2. *Si X est un convexe comapct du plan, pour tout entier positif n on a :*

$$D_n(X) \geq \sqrt{2}t(X).$$

Démonstration: On utilise le théorème principal et le lemme 3. □

3 Preuve du théorème principal

Si X est un convexe compact du plan, on a, par changement de variable,

$$L(X) = \int_0^{\pi/n}\big(l(\theta) + l(\theta + \tfrac{\pi}{n}) + \cdots + l(\theta + \tfrac{(n-1)\pi}{n})\big)d\theta,$$

où $l(\theta)$ est la largeur de la bande contenant X, faisant un angle θ avec l'horizontale. Donc

$$L(X) \leq \tfrac{\pi}{n}\sup_{\theta\in[0,\pi]}\sum_{i=1}^{n}A_{2i-1}(\theta)A_{2i}(\theta),$$

où $A_{2i-1}(\theta)$ at $A_{2i}(\theta)$ sont les points de X tels que $A_{2i-1}(\theta)A_{2i}(\theta) = l(\theta + \frac{(i-1)\pi}{n})$, pour i variant de 1 à n.

Si on appelle $G(\theta)$ le barycentre des points $A_i(\theta)$, $1 \leq i \leq 2n$, on obtient :

$$L(X) \leq \tfrac{\pi}{n}\sup_{\theta\in[0,\pi]}\sum_{i=1}^{n}\big(A_{2i-1}(\theta)G(\theta) + G(\theta)A_{2i}(\theta)\big) = \tfrac{\pi}{n}\sup_{\theta\in[0,\pi]}\sum_{i=1}^{2n}A_i(\theta)G(\theta).$$

Mais, comme le carré d'une moyenne est inférieure ou égale à la moyenne des carrés, on a :

$$\sum_{i=1}^{2n}A_i(\theta)G(\theta) \leq \sqrt{2n\sum_{i=1}^{2n}A_i(\theta)^2G(\theta)^2}$$

et

$$L(X) \leq \tfrac{\pi}{n} \sup_{\theta \in [0,\pi]} \sqrt{2n \sum_{i=1}^{2n} A_i(\theta)^2 G(\theta)^2}.$$

En utilisant le lemme 1, on obtient :

$$L(X) \leq \tfrac{\pi}{n} \sup_{\theta \in [0,\pi]} \sqrt{2n \sum_{1 \leq i \neq j \leq 2n}^{2n} A_i(\theta)^2 A_j(\theta)^2}.$$

Ainsi on a :

$$L(X) \leq 2\pi \sqrt{\frac{2n-1}{4n}} D_n(X).$$

De plus, si X est un disque, il y a égalité dans toutes les inégalités précèdentes. Donc, si D est un disque de rayon R,

$$L(D) = 2\pi R = 2\pi \sqrt{\frac{2n-1}{4n}} D_n(D).$$

Ainsi on a :

$$D_n(D) = \sqrt{\frac{4n}{2n-1}} R.$$

4 Problèmes de Favard généralisés

Théorème 2. *Pour un entier naturel n, non nul quelconque, on a :*

$$\lim_{d \to +\infty} \inf_{P \in P_d} D_n(X_P) \geq \sqrt{\frac{4n}{2n-1}}.$$

Remarque 1. *Si $n = 1$, on retrouve le premier problème de Favard et l'inégalité devient uneégalité grâce aux polynômes cyclotomiques.*

Démonstration: Par le théorème principal 1 et le lemme 3, on a : $D_n(X_P) \geq \sqrt{\frac{4n}{2n-1}} t(X_P)$. Ainsi :

$$D_n(X_P) \geq \sqrt{\frac{4n}{2n-1}} t_d(X_P) \prod_{k \geq d} k^{-2/(k^2-1)}$$

par le lemme 4 3).

Si on appelle K_d le minimum des discriminants des polynômes unitaires irréductibles de degré d, on a :

$$D_n(X_P) \geq \sqrt{\frac{4n}{2n-1}} K_d^{1/(d^2-d)} \prod_{k \geq d} k^{-2/(k^2-1)},$$

$K_d^{1/(d^2-d)} \geq 1$ et $\lim_{d \to +\infty} \prod_{k \geq d} k^{-2/(k^2-1)} = 1$. □

Théorème 3. *Si P est un polynôme de P_d ($d \geq 2$), on a :*

$$D_n(X_P) \geq \sqrt{\frac{4n}{2n-1}} K_d^{1/(d^2-d)} \prod_{k \geq d} k^{-2/(k^2-1)}.$$

Remarque 2. *On peut ainsi trouver facilement une minoration de $D_n(X_P)$ à d fixé.*

En particulier, pour $n = 1$, la minoration

$$t_2(X_P) \geq \frac{\Gamma(5/6)\Gamma(4/3)\sqrt{3}}{\Gamma(7/6)} K_d^{1/(d^2-d)} \prod_{k \geq d} k^{-2/(k^2-1)}$$

donnée [3], est améliorée par

$$t_2(X_P) \geq 2K_d^{1/(d^2-d)} \prod_{k \geq d} k^{-2/(k^2-1)},$$

donc, dans un rapport $\frac{2\Gamma(7/6)}{\Gamma(5/6)\Gamma(4/3)\sqrt{3}} = 1,062753\ldots$ *La valeur de :* $\frac{\Gamma(5/6)\Gamma(4/3)\sqrt{3}}{\Gamma(7/6)}$*, donnée dans [3], est* $1,881904\ldots$*.*

Références

[1] J. Favard, Sur les nombres algèbriques, *Mathematica* **4** (1930), 109–113.

[2] M. Langevin, Solution des problèmes de Favard, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **38** (1988), no. 2, 1–10.

[3] M. Langevin, E. Reyssat, G. Rhin, Diamètres transfinis et problèmes de Favard, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **38** (1988), no. 1, 1–16.

Reçu : 10.05.2012
Acceptée : 22.07.2013

Université de Metz, ISGMP,
Bâtiment A, Ile du Saulcy, 57045 Metz, France
E-mail : `grandcol@poncelet.univ-metz.fr`