DIDACTICA MATEMATICĂ

SUPLIMENT AL GAZETEI MATEMATICE

ANUL I **Nr. 1/ 2011**

Editorial

De la înfiinţarea sa în 1910, unul dintre principalele obiective ale societăţii noastre a fost răspândirea gustului pentru studiul ştiinţelor matematice. Până în 1949, principalul instrument de realizare a acestei misiuni a fost *Gazeta Matematică*. Această publicaţie apare fără întrerupere din 1895, rămânând şi astăzi punctul de întâlnire al iubitorilor de matematică, de la elevi până la profesori universitari şi cercetători ştiinţifici.

Realităţile lumii dinamice în care trăim dovedesc că matematica rămâne un pilon important al ştiinţelor şi ocupă un rol fundamental în toate domeniile activităţii umane, de la viaţa de zi cu zi până la tehnologiile avansate. De aceea este important ca ea să fie accesibilă unor cercuri cât mai largi. Matematica are însă reputaţia de a fi abstractă şi inaccesibilă, şi mulţi elevi intră la ore cu această idee preconcepută. Ştiinţa noastră este într–adevăr abstractă dar profesorii de matematică sunt cei care au rolul de a o apropia de minţile deschise spre nou ale tinerilor. Gustul pentru matematică se formează cel mai uşor în anii de şcoală iar lecţiile şi activităţile complementare sunt esenţiale în deprinderea modului de gândire matematic şi dezvoltarea unor abilităţi de calcul şi raţionament.

Toate acestea pot fi realizate eficient prin munca creativă a învăţătorilor şi a profesorilor. SSMR şi–a propus de ceva timp să editeze o revistă care să îi ajute pe colegii care predau matematica în şcoli sau licee. Acest deziderat a devenit realizabil financiar prin proiectul comun RAF–SSMR numit „Educaţia Matematică Altfel".

Revista pe care o lansăm se numeşte „Didactica Matematică" şi îşi propune să ofere metode eficiente de predare a matematicii. Se adresează în primul rând profesorilor, dar şi tuturor celor interesaţi de educaţia matematică. Principalul nostru obiectiv este de a pune la dispoziţia profesorilor resurse metodologice utile activităţilor didactice: modele de lecţii, exemple de teme aplicative în cotidian din programa şcolară, metode de prezentare şi rezolvare a problemelor, sfaturi practice privind activităţile matematice extraşcolare, aplicaţii ale matematicii în economie, artă sau sport, jocuri.

Sperăm ca toţi cei care predau matematica să găsească în revistă sugestii şi modele utile, pe baza cărora să–şi îmbunătăţească modul de predare iar orele lor să devină mai atractive. Cititorii sunt încurajaţi să reflecteze asupra conţinutului revistei, să încerce să aplice ideile prezentate în paginile ei la orele de curs şi în cadrul altor activităţi cu elevii, să–şi asume responsabilitatea îmbunătăţirii procedeelor pedagogice şi a autodezvoltării profesionale. Ne aşteptăm ca, pe baza modelelor, profesorii să producă materiale pe care să le folosească la clasă, să elaboreze şi să propună probleme şi articole care, odată publicate, să contribuie la portofoliile lor profesionale.

Alte probleme legate de educaţia matematică vor fi găzduite de site–ul revistei `http://rms.unibuc.ro/didactica`. Orice opinii şi sugestii privind conţinutul publicaţiei vor fi binevenite şi vă invităm călduros să ni le trimiteţi la adresa de e–mail:`didactica@rms.unibuc.ro`.

Doru Ştefănescu

MODELE DE LECŢII

Lecţia de matematică

Lecţia de la clasă ocupă rolul central în educaţia matematică a elevilor. Ea poate fi prilejul deschiderii minţilor tinere spre tezaurul ştiinţei noastre, dar — organizată rău — poate provoca frustrări şi repulsie. Revista noastră îşi propune să ofere câteva modele de lecţii de matematică. Unele dintre ele vor fi lecţii obişnuite, altele vor fi neconformiste şi vor miza pe atragerea elevilor prin spectaculozitate ori prin expunerea accesibilă a unor rezultate profunde.

Planul unei lecţii depinde mult de elevii cu care lucrăm. Există însă câteva principii generale care pot ajuta la reuşita orei de matematică. Lecţia este o apariţie publică, care se rezumă uneori la un discurs dar care ar fi ideal să fie o reprezentaţie la care să participe toţi spectatorii. O posibilă structură a unei lecţii obişnuite ar putea fi următoarea:

- captarea atenţiei
- precizarea temei şi a obiectivelor
- verificarea cunoştinţelor elevilor
- predarea cunoştinţelor noi
- implicarea elevilor în predare şi rezolvarea de probleme
- aprecierea elevilor
- asigurarea feed-back-ului
- propunerea unor teme şi anunţarea temei următoarei lecţii
- concluzii

Pe parcursul lecţiei vor fi avute în vedere competenţele generale şi specifice, precum şi obiectivele operaţionale. O lecţie poate să atingă doar unii din paşii de mai sus, cum poate include şi alţii. Uneori avem două ore succesive cu aceeaşi clasă şi putem desfăşura o lecţie mai amplă. Alteori suntem presaţi de încheierea unui capitol sau de apropierea unei teze.

Invităm colegii din şcoli şi licee să ne trimită modele ale unor lecţii reuşite, pe care să le facem cunoscute celorlalţi educatori de matematică în paginile sau pe site–ul revistei.

Editorii

Aplicaţii ale teoremei Cayley–Hamilton

Prezentăm un model de lecţie de algebră pentru clasa a XI–a, în care vom discuta câteva aplicaţii ale ecuaţiei caracteristice asociate unei matrice de ordin 2 sau 3.

Ca introducere, este util să le cerem elevilor să verifice relaţia

$$A^2 - (a+d) \cdot A + (ad - bc) \cdot I_2 = O_2, \tag{1}$$

unde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Recunoaştem aici ecuaţia caracteristică asociată unei matrice pătratice de ordinul 2 (consecinţă a teoremei Cayley[1]-Hamilton[2]. Verificarea ei ocupă puţin timp şi permite recapitularea unor cunoştinţe despre calculul matricial. Din punct de vedere metodic, relaţia se dovedeşte a fi un instrument de lucru extrem de eficient, util în rezolvarea unor probleme diverse atât ca tematică precum şi ca nivel de dificultate.

Pentru familiarizarea elevilor cu terminologia, definim în acest moment pentru o matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ matricea caracteristică $A - XI_2$, urma $\mathrm{tr}(A) = a + d$ şi polinomul caracteristic $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det A \cdot I_2$, după care cerem să se determine aceste elemente pentru câteva matrici concrete.

Putem trece apoi la exemple care să pună în evidenţă eficienţa relaţiei Cayley–Hamilton:

Exemplul 1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$ cu $a + d \neq 0$. Să se arate că matricea $B \in M_2(\mathbb{R})$ comută cu A, dacă şi numai dacă B comută cu A^2.

Soluţie: Scriind ecuaţia caracteristică a lui A şi înmulţind la stânga şi respectiv la dreapta cu B vom obţine:

$$\begin{aligned} &A^2 \cdot B - (a+d) \cdot A \cdot B + (ad - bc) \cdot B = O_2, \quad \text{şi} \\ &B \cdot A^2 - (a+d) \cdot B \cdot A + (ad - bc) \cdot B = O_2, \end{aligned}$$

ceea ce permite scrierea:

$$A^2 B - BA^2 = (a+d) \cdot (AB - BA),$$

relaţie care asigură concluzia din enunţul problemei.

Relaţia (1) se dovedeşte foarte utilă în calculul puterilor A^n, atât pentru n natural cât şi pentru $n = -1$.

[1]Arthur Cayley (1821-1895) – matematician englez.

[2]William Rowan Hamilton (1805-1865) – matematician scoţian.

Exemplul 2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \geq 1$. *Soluţie:* Ecuaţia caracteristică este $A^2 - 5A - 0 \cdot I_2 = 0_2$, adică $A^2 = 5 \cdot A$ şi, inductiv, deducem $A^n = 5^{n-1} \cdot A$ pentru oricare $n \geq 1$.

Exemplul 3. Fie $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n \geq 1$.

Soluţie: Ecuaţia caracteristică se scrie $A^2 - 4 \cdot A + 3I_2 = O_2$ de unde $A^2 = 4A - 3I_2$. Cum $A^3 = A \cdot A^2 = 4 \cdot A^2 - 3A = 4(4A - 3I_2) - 3A = 13 \cdot A - 12I_2$, ne gândim că putem demonstra existenţa a două şiruri de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ care verifică relaţia $A^n = a_n \cdot A + b_n \cdot I_2$, pentru oricare $n \geq 1$.

Evident, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = 4$ şi $b_2 = -3$. Dar $A^{n+1} = A \cdot A^n = A \cdot (a_n A + b_n I_2) = a_n A^2 + b_n \cdot A = a_n (4A - 3I_2) + b_n A = (4a_n + b_n) A - 3a_n I_2$. Utilizând din nou inducţia matematică, obţinem relaţiile de recurenţă $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ şi $b_{n+1} = -3a_n$.

Acum avem o legătură extrem de interesantă cu lecţiile de analiză, şiruri recurente, care, exploatată corespunzător, poate conduce la o atractivitate sporită a lecţiei. Din relaţiile de mai sus obţinem $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n+1}$ şi, utilizând formula termenului general pentru astfel de recurenţe, deducem

$$a_n = \frac{3^n - 1}{2} \text{ şi } b_n = \frac{-3^n + 3}{2},$$

deci

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{5 \cdot 3^n - 3}{2} & \dfrac{5 \cdot 3^n - 5}{2} \\[2ex] \dfrac{-3^{n+1} + 3}{2} & \dfrac{-3^{n+1} + 5}{2} \end{pmatrix}.$$

Exemplul 4. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine A^{-1}.

Exemplul este şi un pretext pentru a pune în evidenţă aspectul ecuaţiei caracteristice în situaţia matricilor de ordin 3. Totuşi, dacă timpul o permite, este recomandabil să cerem mai întâi elevilor calculul inversei cu metoda deja ştiută, pentru a compara eficienţa metodelor. Prezentăm apoi ecuaţia caracteristică pentru matricile de ordin 3:

Pentru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

matricea caracteristică se scrie $A - XI_3$, iar polinomul caracteristic

$$p(X) = \det(A - XI_3) = (-1)^3 \cdot \left(X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3\right),$$

unde:
$\sigma_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ (urma lui A, notată de obicei $\mathrm{tr}(A)$),
$\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$,
$\sigma_3 = \det(A)$.

Desigur, putem solicita să se verifice prin calcul direct că avem relaţia $A^3 - \sigma_1 A^2 + \sigma_2 A - \sigma_3 I_3 = O_3$, sau, în funcţie de nivelul de generalizare, putem prezenta teorema Cayley–Hamilton.

Soluţia problemei din exemplul 4: Relaţia precedentă se poate rescrie:
$\det(A) \cdot I_3 = A^3 - \sigma_1 A^2 + \sigma_2 A = A\left(A^2 - \sigma_1 A + \sigma_2 I_3\right) = \left(A^2 - \sigma_1 A + \sigma_2 I_3\right) \cdot A$,
adică $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \left(A^2 - \sigma_1 A + \sigma_2 I_3\right)$. Pentru matricea noastră concretă,
$\sigma_1 = 6$,
$\sigma_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 1 + 1 = 5$,
$\sigma_3 = \det(A) = 8 + 1 + 9 - 6 - 6 - 2 = 4$.

Prin urmare, ecuaţia caracteristică este: $A^3 - 6A^2 + 5A - 4I_3 = O_3$, iar

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \left(A^2 - 6A + 5I_3\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 \\ 13 & 8 & 13 \\ 13 & 7 & 10 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La tema pentru acasă, vom avea grijă să cerem şi calculul inversei unei matrici de ordin 2 folosind ecuaţia caracteristică.

Sigur, prin discuţii purtate cu elevii, în funcţie de nivelul de interes al acestora, putem extinde prezentarea făcând, de exemplu, trimiteri către teorema Frobenius[1]

Nicolae Angelescu

O lecţie de teoria invarianţilor

Chiar dacă prezintă uneori aspecte sofisticate, raţionamentele care folosesc invarianţi au de fapt originea în concretul cotidian şi o solidă bază intuitivă: Nu e un secret pentru nimeni faptul că nu poţi să ajungi de la numărul 12 la numărul 37 fără să treci strada! Numim de obicei invarianţi anumite obiecte matematice (dintre cele mai diverse: puncte, numere, grupuri, etc.) care rămân

[1]Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) – matematician german.