Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie
Tome 53(101) No. 4, 2010, 329–361

Etude géométrique intrinsèque des extrémales d'un Lagrangien non-holonome et optimalité

par
F. Farah et F. Pelletier

Résumé

Ce travail se situe dans le cadre de l'étude des extrémales d'un Lagrangien L non-holonome défini sur un sous fibré du fibré tangent à une variété. Nous donnons d'abord des conditions suffisantes d'optimalité locale. Dans le cadre du formalisme géométrique sur les quasi-algébroïdes ([PoPo], [CLMM]), à un tel Lagrangien régulier est associée une connexion canonique. Dans notre contexte, ce formalisme possède une version assez naturelle. Nous montrons que la connexion canonique de L est l'unique connexion lagrangienne métrique associée à L dans ce formalisme. Enfin, nous construisons une connexion lagrangienne "naturelle" dont les géodésiques sont les extrémales de L

Key Words : Lagrangien non-holonome, extrémales, localement optimale, quasi-algébroïde, pré-crochet de Lie, connexion lagrangienne, connexion métrique, géodésiques.
2010 Mathematics Subject Classification : Primary 37C ; Secondary 37J, 49K, 53A, 53B, 53C, 53D.

1 Introduction

Le contexte et les résultats de ce travail se situent dans la cadre de l'étude des extrémales associées à un Lagrangien non-holonome. La situation classique est la donnée d'un lagrangien L sur l'espace tangent TQ d'une variété Q et on considère la restiction de L à une sous variété $C \subset TQ$ de contraintes admissibles. Ce cadre a fait l'objet d'un grand nombre de publications : mentionnons à titre d'exemples [CLM], [GMM] [GM] et au moins toutes les références contenues dans ces travaux. Dans cet article nous considérons un lagrangien $L : E \to \mathbb{R}$ où la contrainte E qui est un sous fibré du fibré tangent TM d'une variété M.

Les récents développements du formalisme géométrique associé à une structure d'agébroïde ou de quasi-algébroïde sur une variété ont permis de construire un cadre général d'étude des systèmes mécaniques non-holonomes (voir par exemple [PoPo], [CLMM], [Po] et toutes les références contenues dans ces travaux). Dans notre contexte, E se trouve muni d'une structure naturelle de quasi-algébroïde (Remarque 2.10) ainsi que de systèmes de coordonnées privilégiées. Cette situation permet de donner une version assez simple des objets géométriques de ce formalisme (voir le paragraphe 2 ainsi que les Remarques 2.4, 2.10, 3.7, 3.11 et 4.4).

La caractérisation des courbes localement optimales $\gamma : [a, b] \to M$ du problème variationnel

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$$

naturellement associé peut se faire, d'une part par la théorie du contrôle, d'autre part, en utilisant une caractérisation des extémales de L comme solution d'une équation différentielle. Un premier objectif de ce travail est de faire le lien entre ces deux approches mais surtout de donner des **conditions suffisantes d'optimalité locale** (Théorème 3.13). A noter que la preuve de ce Théorème étant assez technique et assez longue, pour la clarté de ce travail, nous avons choisi de faire cette démonstration dans un Appendice.

Dans le cadre de la terminologie [CLMM]) et [PoPo], à un lagrangien régulier L défini sur l'espace sous-jacent E d'un quasi-algébroïde $(E, \alpha, [\ ,\ ])$ sur une variété M sont naturellement associés :
un "E-fibré tangent" (noté $T^E E$ dans [CLMM]),
une semi-gerbe S_L , une forme symplectique Ω_L sur $T^E E$,
une métrique pseudo-riemannienne g_L sur le fibré vertical de $T^E E$
une connexion canonique Γ_L (appelée connexion de Cartan-Kern dans ([PoPo]).

Dans le cas particulier où E est un sous fibré de TM et $[\ ,\ ]$ est le pré-crochet de Lie canonique sur E, nous en donnons une version assez naturelle. Toujours dans notre contexte, étant donnée une forme symplectique Ω sur $T^E E$, compatible avec l'endomorphisme vertical, on peut lui associer une métrique pseudo-riemannenne canonique g sur le sous fibré vertical de $T^E E$. Si S est une semi-gerbe alors il existe une unique connexion lagrangienne associée à S et qui préserve la métrique g par transport parallèle le long des courbes intégrales de S (Théorème 4.12). En particulier, la connexion de Cartan-Kern Γ_L (cf [PoPo]) est pécisément cette **connexion lagrangienne métrique** associée à la donnée de (S_L, Ω_L) (voir Théorème 4.13). Tous ces résultats font l'objet essentiel du paragraphe 4.

Lorsque L est quadratique, alors les géodésiques de Γ_L sont les extrémales de L. Dans le cas général, ce résultat n'est plus, vrai. Néanmoins, il existe une unique connexion lagrangienne $\tilde{\Gamma}_L$, dont les géodésiques sont les extrémales de L, et caratérisée par (Théorème 4.13 (2)) :

l'espace horizontal associé à $\tilde{\Gamma}_L$ est contenu dans la distribution engendrée par S_L et l'espace
horizontal H_{Γ_L} associé à la connexion lagrangienne canonique Γ_L.

2 Préliminaires

Dans ce paragraphe, les rappels et notations ne sont que des adaptions du cadre classique du formalisme géométrique associé à une quasi-structure de Poisson sur E^*. Néanmoins, le fait que E soit un sous fibré de TM permet d'une part de choisir des systèmes de coordonnées privilégiées, et d'autre part de pouvoir utiliser des structures induites sur E. Pour le formalisme de géométrie différentiellle associé à une quasi-structure de Poisson, parmi de nombreuses références, nous nous référons essentiellement à [PoPo], [CLMM] et [Po]. Enfin, pour la comparaison entre ces deux formalismes nous renvoyons à la Remarque 2.4.

2.1 Notations

Soit M une variété différentiable connexe de dimension n et E une distribution régulière sur M, c'est-à -dire un sous fibré de dimension p du fibré tangent TM à M. Nous noterons $E^0 \subset T^*M$ l'annulateur de E. Le fibré E (resp E^0) peut aussi être considéré comme une sous variété de TM (resp. T^*M).

Dans tout ce travail, pour tous les calculs en coordonnées locales, nous adopterons les conventions classiques suivantes :

• les indices latins $i, j, k, l, ...$ varient de 1 à n et pour les indices répétés la sommation portent sur les entiers variant de 1 à n ;
• les indices grecs $\alpha, \beta, \gamma...$ varient de 1 à p et pour les indices répétés la sommation portent sur les entiers variant de 1 à p.

Considérons une carte (U, Φ) centrée en un point z. Sans perte de généralité, on peut supposer que le système de coordonnées $(x^1, \cdots, x^n)$ est tel que

E_z est engendré par $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^p})$ et E^0_z est engendré par $(dx^{p+1}, \cdots, dx^n)$. Quitte à restreindre le voisinage U, il est facile de construire un champ de repères $(A_1, \cdots, A_p)$ de E au-dessus de U de sorte que chaque A_α, $\alpha = 1, \cdots, p$ s'écrive :

$$A_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ + \sum_{j>p} B^j_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Notons $(A_1, \cdots, A_n)$ le champ de repères associés sur TM avec $A_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ pour $j = p+1, \cdots, n$.

$(\theta^1, \cdots, \theta^n)$ la base duale de T^*M correspondante. Par suite, on aura

$$\theta^\alpha = dx^\alpha \text{ pour } \alpha = 1, \cdots, p$$

$$\theta^j = dx^j - \sum_{\alpha \leq p} B^j_\alpha dx^\alpha \text{ pour } j = p+1, \cdots, n.$$

On dira que $(A_1, \cdots, A_n)$ *est un* champ de **repères adaptés** *de* TM *(resp.* $(\theta^1, \cdots, \theta^n)$ *un champ de* **co-repères adaptés** *sur* T^*M*) et le système de coordonnées* $(x^1, \cdots, x^n, a^1, \cdots, a^n)$ *(resp.* $(x^1, \cdots, x^n, \zeta_1, \cdots, \zeta_n)$*) naturellement associé sur* TM *(resp. sur* T^*M*) est appelé* **un système de coordonnées adaptées**.

Notons $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)$ (resp. $(x^1, \cdots, x^n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$) le système de coordonnées canoniques sur TM(resp. T^*M) naturellement associé à la carte de domaine U.

Dans ce contexte, sur U le difféomorphisme Φ de changement de coordonnées est caractérisé par :

$$\begin{array}{rcll} y^\alpha & = & a^\alpha & \text{pour } \alpha = 1, \cdots, p \\ y^j & = & a^j + B^j_\alpha a^\alpha & \text{pour } j = p+1, \cdots, n. \end{array} \tag{1}$$

Sur T^*M, le difféomorphisme de changement de coordonnées est caractérisé par :

$$\begin{array}{rcll} \xi_\alpha & = & \zeta_\alpha - \sum_{j>p} B^j_\alpha \zeta_j & \text{pour } \alpha = 1, \cdots, p \\ \xi_j & = & \zeta_j & \text{pour } j = p+1, \cdots, n. \end{array} \tag{2}$$

Sur le fibré TE tangent à E, il existe deux structures de fibré :

$$p_E : TE \to E \text{ et } d\pi : TE \to TM$$

Notons $\mathcal{E}$ le sous fibré de TE défini par $\mathcal{E} = d\pi^{-1}(E)$. Le noyau de chacune des projections p_E et $d\pi$ est égal à $\mathcal{E}^v = \mathcal{E} \cap T^vTM$, où T^vTM est le sous fibré vertical de TTM.

Soit X un champ de vecteur tangent à E. Cette section de $\pi : E \to M$ se relève en une section X^v du fibré $\nu : T^vE \to E$ définie par :

$$X^v(x, u) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\{(x, u + tX(x))\}$$

Nous dirons que X^v *est le* **relèvement vertical** *de* X.

Nous notons aussi $TX : TM \to TE$ sa différentielle. Par suite $X^T(u, x) = TX(x, u, X(x), u)$ est une section du fibré $d\pi : TE \to E$ tel que $d\pi \circ X^T = d\pi$ qui s'écrit localement :

$$X^T = X^\alpha A_\alpha + u^\beta A_\beta(X^\alpha)\frac{\partial}{\partial a^\alpha}$$

par suite $d\pi_*(X^T) = X$.
Nous dirons que X^T est le relèvement tangentiel de X.
Nous noterons que $J(X^T) = X^v$, où J est l'endomorphisme vertical sur TTM.

Sur E, le groupe à un paramètre de dilatations δ_t, caractérisé par

$$\delta_t(x, u) = (x, tu),$$

est le flot d'un champ de vecteurs canonique C sur E appellé le **champ d'Euler**. Il est clair que C est tangent à T^vE. En coordonnées adaptées, le champ d'Euler s'écrit :

$$C = a^\alpha A^v_\alpha$$

L'endomorphisme vertical J sur TTM est caractérisé par (voir par exemple [Gr]) :

$$J(A_i) = A^v_i \quad \text{et} \quad J(A^v_i) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \cdots n.$$

Considérons un champ de repères adaptés $(A_1, \cdots, A_n)$. Pour $(x, a) \in E$, la fibre $T_{(x,a)}E$ (resp. $\mathcal{E}_{(x,a)}$) est alors engendrée par $(A_1, \cdots, A_n, A^v_1, \cdots, A^v_p)$ (resp. $(A_1, \cdots, A_p, A^v_1, \cdots, A^v_p)$).
L'endomorphisme J induit sur $\mathcal{E}$ un endomorphisme $\tilde{J}$ de $\mathcal{E}$ caractérisé par :

$$\tilde{J}(A_\alpha) = A^v_\alpha \quad \text{et} \quad \tilde{J}(A^v_\alpha) = 0 \text{ pour tout } \alpha = 1, \cdots, p. \tag{3}$$

Dans la suite, comme nous nous restreignons essentiellement à TE, nous adoptons les notations complémentaires suivantes :

Notations 2.1
• $(x^1, \cdots, x^n, a^1, \cdots, a^p)$ *désigne un système de coordonnées adaptées sur* E *qui pourra être noté simplement* (x^i, a^α).
• *le fibré* T^vE *sera noté* $\mathcal{E}^v$.
• *l'endomorphisme vertical* $\tilde{J}$ *induit sur* $\mathcal{E}$ *sera encore noté* J.
• *au-dessus du domaine de définition de ce système de coordonnées,* E^* *est identifié au fibré* T^*M/E^0 *et est engendré par* $(dx^1, \cdots, dx^p)$.

Remarque 2.2 *Considérons un champ de repères adaptés* $(A_1, \cdots, A_n)$ *sur* M. *Nous avons localement sur la variété* TM *:*

$$A^v_i = \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{j>p} B^j_i \frac{\partial}{\partial y^j} \;\; \textit{et} \;\; [A_\alpha, A^v_\beta] = \sum_{i,j>p} B^i_\alpha \frac{\partial B^j_\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Dans un système de coordonnées adaptées, les coodonnées locales de la sous variété E *de* TM *sont* (x^i, a^α). *Dans ces conditions, en restriction à la sous variété* E, *on a*

$$A^v_\alpha = J(A_\alpha) \;\; \textit{et} \;\; [A_\alpha, A^v_\beta] = 0 \;\; \textit{pour tout} \;\; \alpha, \beta = 1, \cdots, p.$$

Par suite, sur la sous variété E de TM, il est alors naturel **d'identifier A^v_α avec** $\frac{\partial}{\partial a^\alpha}$ *pour* $\alpha = 1, \cdots, p$.

Dans ces mêmes conditions, la fibre $T_{(x,a)}E$ (resp. $\mathcal{E}_{(x,a)}$) est alors engendré par
$(A_1, \cdots, A_n, \frac{\partial}{\partial a^1} \cdots, \frac{\partial}{\partial a^p})$ *(resp.* $(A_1, \cdots, A_p, \frac{\partial}{\partial a^1} \cdots, \frac{\partial}{\partial a^p})$*).*

Une équation **différentielle du second ordre** sur E ou **semi-gerbe**, est un champ de vecteurs S sur E qui est une section pour les deux structures de fibré sur TE définie par $d\pi$ et p_E.

Localement, dans un système de coordonnées adaptées (x^i, a^α) une semi-gerbe va s'écrire :

$$S = a^\alpha A_\alpha \ + \ S^\alpha(x,a)\frac{\partial}{\partial a^\alpha}.$$

Remarque 2.3

1. *Une semi-gerbe S sur E est toujours tangente à $\mathcal{E}$.*
2. *Un champ de vecteurs Z sur E tangent à $\mathcal{E}$ est une semi gerbe si et seulement si $JZ = C$.*

Remarque 2.4 *dans le cadre du formalisme géométrique associé à un quasi-algébroïde de Lie (voir par exemple [PoPo] [CLMM],[Po]), $\mathcal{E}$ s'identifie naturellement au E-fibré tangent de E noté T^EE. Plus précisément, T^EE est un fibré sur E et, dans ce contexte particulier, la fibre en $(x,b) \in E$ est $T^E_{(x,b)}E = \{(a,a,A) \in E_x \times T_{(x,b)}E$. Par suite les fibrés $\mathcal{E}$ et T^EE sont canoniquement isomorphes. Via cet isomorphisme, les coordonnées (adaptées) sur E et $\mathcal{E}$, on a alors une correspondance canonique entre ces deux formalismes et les "objets géométriques" qui s'y rattachent : l' endomorphisme vertical, les relèvements verticaux et tangentiels, le champ d'Euler, les semi-gerbes, mais aussi les connexions (section 2.2) et les pré-crochets de Lie (section 2.3).*

2.2 Connexions

Une **connexion** Γ sur $\mathcal{E}$ est un homomorphisme de $\mathcal{E}$ qui vérifie

$$J\Gamma = J \text{ et } \Gamma J = -J.$$

Etant donnée une base adaptée $(A_1, \cdots, A_n)$, alors

$$(A_1, \cdots, A_p, A^v_1 \equiv \frac{\partial}{\partial a^1}, \cdots A^v_p \equiv \frac{\partial}{\partial a^p})$$

est une base locale de $\mathcal{E}$, Γ est alors caractérisée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ \Gamma & -Id \end{pmatrix} \tag{4}$$

En accord avec les notations classiques, le terme général de la matrice Γ sera écrit sous la forme

$$-2\Gamma_\alpha^\beta.$$

De sorte que

$$\Gamma(A_\alpha) = A_\alpha - 2\Gamma_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial a^\beta} \quad \textit{pour} \quad \alpha = 1, \cdots, p.$$

Les coefficients $\mathbf{\Gamma}_\alpha^\beta$ *sont appelés les coefficients de la connexion* $\mathbf{\Gamma}$.

La plupart des résultats qui suivent sont classiques : lorsque $E = TM$ voir [Gr], pour un fibré quelconque sur M voir par exemple [PoPo] et pour la situation pariculière d'un sous fibré E de TM voir [F]

La donnée d'une connexion Γ sur $\mathcal{E}$ est équivalente à la donnée d'une décomposition suivante :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^v \oplus \mathcal{H}_\Gamma$$

$\mathcal{H}_\Gamma$ s'appelle l'espace horizontal de Γ

Soit Γ une connexion sur E ; il existe une unique semi-gerbe S sur E qui est tangente à $\mathcal{H}_\Gamma$. Cette semi-gerbe s'appelle la **semi-gerbe canonique** de Γ. Les courbes intégrales de S seront appellées les **géodésiques** de Γ.

Lemme 2.5 *Soit* Γ *une connexion sur* $\mathcal{E}$. *Considérons* Γ *comme un tenseur de type* $(1,1)$ *sur* E, *nous avons alors :*

1. *si* Υ *est un tenseur semi-basique*[1] *de type* $(1,1)$ *sur* E *alors* $\Gamma + \Upsilon$ *est une connexion sur* $\mathcal{E}$.
2. *Réciproquement, si* Γ' *est une connexion sur* $\mathcal{E}$, *il existe un unique tenseur semi-basique* Υ *tel que* $\Gamma' = \Gamma + \Upsilon$
3. *Soit* S *la semi-gerbe canonique de* Γ. *Alors* S *est la semi-gerbe canonique de la connexion* $\Gamma' = \Gamma + \Upsilon$ *si et seulement si* $\Upsilon(S) = 0$

Comme dans le contexte classique, on dira que la connexion Γ est **linéaire** sur $\mathcal{E}$ si elle est caractérisée par un sous fibré supplémentaire de $\mathcal{E}^v$ invariant par le groupe à un paramètre de dilatation δ_t.

Proposition 2.6 *[F]*
Nous avons les équivalences suivantes :

(i) *la connexion* Γ *est linéaire*

(ii) *pour tout champ de vecteurs* Z *sur* E *tangent à* $\mathcal{E}$ *on a*

$$[C, \Gamma]Z = [C, \Gamma Z] - \Gamma[C, Z] = 0$$

[1] pour la définition d'un tenseur semi-basique voir [Gr]

(iii) dans tout système de coordonnées adaptées, les coefficients de la connexion ont une écriture du type

$$\Gamma_{\alpha}^{\beta}(x,a) = a^{\gamma}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}(x) \tag{5}$$

pour tout $\alpha = 1, \cdots, p$.

2.3 Pré-crochet de Lie

Cette section est une adaptation à notre contexte du formalisme associé aux structures de quasi-algébroïde (voir par exemple [GU], [PoPo] et [CLMM])

Rappelons si $\sigma : F \to M$ est un fibré sur une variété M **un pré-crochet de Lie** sur F est la donnée d'un morphisme $\alpha : F \to TM$, et d'une application $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique $[\ ,\ ]_F$ sur F qui vérifie la propriété de Leibniz :

$$[X, fY]_F = \alpha(X)(f)Y + f[X,Y]_F$$

pour toute section X et Y de F.
Dans le cas d'un sous fibré E de TM, il existe une manière assez naturelle de construire de telles stuctures sur E :
soit E' un supplémentaire de E dans TM et $q : TM \to E$ la projection associée ; on peut alors définir un pré-crochet de Lie par :

$$[X,Y]_E = q[X,Y]$$

où $[X,Y]$ est le crochet de Lie classique sur M des champs de vecteurs X et Y.

Par dualité, un pré-crochet de Lie est canoniquement associée à la donnée d'un bivecteur de quasi-Poisson P sur E^* (cf [GU]) [PoPo] [CLMM]).

Dans un système de coordonnées adaptées (x^i, a^α) sur E et (x^i, ζ_α) sur E^*, le bivecteur P aura une écriture du type :

$$P = \frac{1}{2}C_{\alpha\beta}^{\gamma}\zeta_\gamma \frac{\partial}{\partial\zeta_\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial\zeta_\beta} + A_\alpha \wedge \frac{\partial}{\partial\zeta_\alpha} \tag{6}$$

le pré-crochet de Lie canoniquement associé à P est caractérisé par les relations :

$$\begin{array}{rcl} [A_\alpha, A_\beta]_P & = & C_{\alpha\beta}^{\gamma}A_\gamma \\ \theta_\alpha(A_\alpha) = & \zeta_\alpha & \end{array}$$

Dans la suite, un tel pré-crochet de Lie sera noté $[\ ,\ ]_P$.

Remarque 2.7 *Dans le cas où E est un sous fibré de TM, un pré-crochet de Lie sur E vérifera l'identité de Jacobi si et seulement si E est involutif .*

Parmi les tenseurs de quasi- Poisson sur E^*, il existe un tel tenseur canonique π_0 caractérisé de la manière suivante :

Lemme 2.8 *([F])* π_0 *définit un pré-crochet de Lie* $[\ ,\ ]_0$ *sur* E *caractérisé par* $[A_\alpha, A_\beta]_0 = 0$ *pour tout champ de repères adaptés sur* E.

Comme pour E, il est clair que $\mathcal{E}$, en général, n'est pas stable par crochet de Lie. Pourtant nous avons quand même la propriété suivante :

Lemme 2.9 *Pour tout* Y *vertical et toute section* Z *de* $\mathcal{E}$*, le crochet de Lie (classique)* $[Y, Z]$ *est tangent à* $\mathcal{E}$.

Remarque 2.10 *Prenant en compte l'inclusion naturelle de* E *dans* TM*, la donnée de* $[\ ,\ ]_P$ *sur* E *muni ce fibré d'une structure de quasi-algébroïde sur* M*. Le contexte de la Remarque 2.4 se situe dans le cadre d'une telle structure. En particulier, pour le pré-crochet de Lie canonique* $[\ ,\ ]_0$*, on a une structure de quasi-algébroïde canonique sur* E.

Le résultat suivant permet de munir $\mathcal{E}$ d'un pré-crochet de Lie qui ne dépend que du bi-vecteur P ([PoPo] [CLMM],[F])

Proposition 2.11 *([F])*
Sur $\mathcal{E}^*$*, il existe un unique bi-vecteur linéaire* Π *tel que le pré-crochet de Lie* $[\ ,\ ]_\Pi$ *associé ait les propriétés suivantes :*

(1) $[Y, Z]_\Pi = [Y, Z]$ *pour toute section* Z *(resp. section verticale* Y*) de* $\mathcal{E}$

(2) Π *est projetable sur* P *c'est à dire :*
  (i) $[\tilde{Z}, \tilde{Z}']_\Pi = [Z, Z']_P$ *pour toute section* $\tilde{Z}$ *et* $\tilde{Z}'$ *de* $\mathcal{E}$ *projetable sur une section* Z *et* Z' *de* E *respectivement;*
  (ii) $\tilde{Z}(\pi \circ f) = \pi \circ Z(f)$
  pour toute fonction f *sur* M *et toute section* $\tilde{Z}$ *de* $\mathcal{E}$ *projetable sur une section* Z *de* E.

2.4 Fibré image réciproque

Notons π^*E le fibré image réciproque de $\pi : E \to M$ au-dessus de $\pi : E \to M$. On a les diagrammes commutatifs suivants (voir par exemple [Go]) :

$$\begin{array}{ccc} \pi^*E & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ E & \xrightarrow[\pi]{} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi^*E & \xrightarrow{H} & TE \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow p_E \\ E & \xrightarrow[Id_E]{} & E \end{array}$$

où $\pi_1(x, u, v) = (x, u)$ et $H(x, u, v) = (x, u, 0, v)$ est injectif.
Une section Z de $\tilde{\pi} : \pi^*E \to E$ peut être assimilée à un champ de vecteur sur

E, via l'injection H. Une telle section Z peut aussi être considérée comme une application $Z : E \to E$ qui vérifie

$$\pi \circ Z = \pi \tag{7}$$

Dans un système de coordonnées adaptées, Z s'écrit :

$$Z = Z^\alpha(x,u)A_\alpha(x) \tag{8}$$

On notera $\mathcal{X}(E)$ les sections de E et $\mathcal{X}^*(E)$ l'ensemble des applications de $E \to E$ qui vérifient (7). Si $X \in \mathcal{X}(E)$, l'application $\tilde{X} : E \to E$ définie par $\tilde{X}(x,u) = X(x)$ vérifie (7). Ainsi on pourra toujours considérer une section de E comme un élément de $\mathcal{X}^*(E)$.
Comme précédemment, tout $X \in \mathcal{X}^*(E)$ se relève en une section X^v du fibré $\nu : T^vE \to E$ définie par :

$$X^v(x,u) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\{(x, u + tX(x,u))\}$$

Cette correspondance $X \to X^v$ définit un isomorphisme $\tilde{J}$ de fibré rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \pi^*E \arrow[r, "\tilde{J}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & T^vE \arrow[d, "\pi"] \\ E \arrow[r, "Id_E"'] & E \end{tikzcd}$$

3 Extrémales d'un Lagrangien régulier sur un sous fibré

3.1 Problème variationnel, approche par la théorie du contrôle

Etant donné un sous fibré E de TM, tout chemin absolument continu
$\gamma : [a,b] \to M$, tangent presque partout à E, est appelé un **chemin horizontal**. Deux points x_0 et x_1 de M étant fixés, soit Σ un sous ensemble de E, on note $\mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma)$ l'ensemble des chemins horizontaux joignant x_0 à x_1 (c'est à dire $\gamma(a) = x_0$ et $\gamma(b) = x_1$) et tels que $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in \Sigma$ presque partout.

Un premier problème est de donner des conditions pour que $\mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma)$ soit non vide. Le célèbre théorème sur les orbites de champs de vecteurs de H. Sussmann ([S]) établit qu'il existe une partition de M, en sous variétés immergées, caractérisées par la propriété que deux points quelconques d'une telle sous variété peuvent être joints par un chemin horizontal. De plus chacune de ces sous variétés est maximale pour cette propriété.

On suppose désormais que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{\Sigma})$ est non vide.

Considérons un Lagrangien $L : E \to I\!R$. Un problème d'optimalité classique consiste à rechercher les chemins horizontaux dans $\mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma)$ qui minimisent (resp. maximisent) la fonctionnelle $\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot\gamma(t))dt$:

$$\inf\{\mathcal{L}(\gamma)\ ; \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma)\} \text{ (resp. } \sup\{\mathcal{L}(\gamma)\ \ ; \gamma \in \mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma)\}) \qquad (9)$$

Comme $\mathcal{L}(\gamma)$ est invariante par translation sur le paramétrage de γ, on notera $\mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma, T)$, l'ensemble des chemins horizontaux paramétrisés sur un intervalle $[a, a+T]$ et nous allons rappeler quelques définitions sur l'optimisation de la fonction $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma, T)$. Supposons que $\mathcal{L}$ possède un minimum (resp. un maximum) sur $\mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma, T)$.

Définition 3.1

1. *Une courbe horizontale γ est dite* **minimisante** *(resp.* **maximisante***) en temps T si la fonctionnelle $\mathcal{L}$ atteint son minimum (resp. son maximum) sur $\mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma, T)$ en γ.*
2. *On dira qu'une courbe $\gamma \in \mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma, T)$, définie sur $[a, b]$, est* **localement minimisante** *(resp.* **localement maximisante***) pour la fonctionnelle $\mathcal{L}$, si, pour tout point $t_0 \in [a, b]$ pour lequel $\dot\gamma(t_0)$ est défini, il existe un voisinage $V \times W$ de $(\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0))$ dans Σ tel que, pour tout sous intervalle $[t_1, t_2]$ de $[a, b]$, pour lequel on a $\gamma(t) \in V$ et $\dot\gamma(t) \in W$, pour presque tout $t \in [t_1, t_2]$, alors la restriction de γ à ce sous intervalle est minimisante (resp. maximisante) dans $\mathcal{C}(\gamma(t_1), \gamma(t_2), V \times W, t_2 - t_1)$.*

Dans la suite, une courbe minimisante ou maximisante (resp. localement minimisante ou maximisante) sera appelée une courbe **optimale** (resp. **localement optimale**). Il est clair que toute courbe optimale est localement optimale. Il est donc naturel de s'intéresser à rechercher des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour qu'une courbe soit localement optimale. Quitte à changer L en $-L$, il suffira de se restreindre au cas localement minimisante.
Le problème de la recherche des courbes localement minimisantes dans

$$\mathcal{C}(x_0, x_1, \Sigma, T)$$

est clairement un problème local. On peut donc se placer dans le contexte de coordonnées adaptées.

Dans tout ce paragraphe, sur TM (resp. T^*M) le champ de repères adaptés $(A_1, \cdots, A_n)$ (resp de co-repère dual associé $(\theta_1, \cdots, \theta_n)$), les coordonnées canoniques $(x^1, \cdots x^n, y^1, \cdots, x^n)$
(resp. $(x^1, \cdots, x^n, \xi_1, \cdots, \xi_n)$) et les coordonnées adaptées $(x^1, \cdots x^n, a^1, \cdots, a^n)$ (resp. $(x^1, \cdots, x^n, \zeta_1, \cdots, \zeta_n)$) sont fixées sur un ouvert U de M.

Dans ces conditions, dans un champ de repères adaptés, $(A_1, \cdots, A_p)$, tout chemin horizontal est caractérisé par un équation du type :

$$\dot{\gamma}(t) = a^\alpha(t) A_\alpha(\gamma(t)) \tag{10}$$

Si $(A^1_\alpha, \cdots, A^n_\alpha)$ sont les composantes de A_α, $\alpha = 1 \cdots, p$ sur la base

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right),$$

le problème de caractérisation des courbes localement minimisantes est un problème de contrôle optimal gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(x, a)$$

où $f^i(x, a) = a^\alpha A^i_\alpha(x)$, $i = 1, \cdots, n$ sont les composantes de f et où
$a = (a^1, \cdots, a^p) \in I\!\!R^p$ est le contrôle.

Pour $\nu \in I\!\!R$, on considère "l'hamiltonien du principe du maximum" :
$H_\nu : E_{|U} \times_U T^*U \equiv U \times I\!\!R^p \times I\!\!R^n \to I\!\!R$ défini par :

$$H_\nu(x, a, \xi) = < \xi, f(x, a) > -\nu L(x, a) = a^\alpha < \xi, A_\alpha(x) > -\nu L(x, a) =$$

$$= a^\alpha \xi_i A^i_\alpha(x) - \nu L(x, a) \tag{11}$$

Il résulte du principe du maximum de Pontryagine ([PBG]), que si γ est une courbe minimisante (dans U et définie sur $[0, T]$), il existe un champ de covecteur $\xi : [0, T] \to T^*U$ le long de γ et un réel ν tels que presque partout $(\nu, \xi(t)) \neq 0$ et que l'on ait :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \dfrac{\partial H_\nu}{\partial \xi}(\gamma(t), a(t), \xi(t)) \\ \dot{\xi}(t) = -\dfrac{\partial H_\nu}{\partial x}(\gamma(t), a(t), \xi(t)) \\ H_\nu(\gamma(t), a(t), \xi(t)) = \sup\limits_{a \in I\!\!R^p} \{H_\nu(\gamma(t), a, \xi(t))\} = \text{cte} \end{cases} \tag{12}$$

Par suite, une courbe localement minimisante est solution du système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H_\nu}{\partial \xi} \\ \dot{\xi} = -\dfrac{\partial H_\nu}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H_\nu}{\partial a} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

D'autre part, toute courbe $(\gamma, \xi) : [0, T] \to T^*U$ solution de (13) s'appelle une **bi-extrémale**. En fonction de la valeur du réel ν, on obtient deux types de bi-extémales ([PV], [LS]) :

1. si $\nu = 0$, mais $\xi(t) \neq 0$, la bi-extrémale (γ, ξ) est appelée **bi-extrémale anormale** ou **singulière** (ces trajectoires sont indépendantes du lagrangien L, elles dépendent seulement de la distribution).
2. si $\nu \neq 0$ (que l'on peut normaliser à $\nu = 1$) la bi-extrémale (γ, ξ) est appelée **bi-extrémale normale**.

Définition 3.2
Soit $\gamma : [0, T] \to M$ une courbe horizontale :
1) nous dirons que γ est une **extrémale normale** *(pour l'hamiltonien (11)), s'il existe un covecteur ξ le long de γ tel que (γ, ξ) soit une bi-extrémale normale.*
2) nous dirons que γ est une **extrémale strictement anormale** *(pour l'hamiltonien (11)), si pour tout covecteur non nul ξ le long de γ tel que (γ, ξ) soit une bi-extrémale, cette bi-extrémale est anormale.*

Remarque 3.3 *une courbe γ localement optimale se relève nécessairement en une bi-extrémale (γ, ξ), mais il est bien connu en théorie du contrôle (voir par exemple [LS] ou [PV]) qu'il existe des courbes localement optimales qui sont des extrémales strictement anormales.*

3.2 Extrémales et bi-extrémales normales

L'objectif de cette section est de faire le lien entre le formalisme "hamiltonien" sur T^*M en théorie du contrôle et l'approche classique des extrémales d'un Lagrangien. Compte tenu de la Remarque 2.4, une partie des résultats obtenus dans cette section correspondent aux résultats généraux obtenus dans le cadre du formalisme non-holonome sur des agébroïdes des et quasi-agébroïde ([CLMM], [PoPo]). La différence essentielle se situe au niveau de la définition de la transformée de Legendre (voir la Remarque 3.7).

Commençons par le résultat suivant :

Lemme 3.4 *[F] : Soit $L : E \to I\!R$ un Lagrangien sur E. Il existe alors une application unique $\Lambda : E \to T^*M$ qui rend commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\pi"'] & T^*M \arrow[dl, "p^*_M"] \\ M & \end{tikzcd}$$

et telle que $dL_{|\mathcal{E}} \circ J = \Lambda^*\omega_{|\mathcal{E}}$
où ω est la forme canonique de Liouville sur T^*M et $dL_{|\mathcal{E}}$ et $\Lambda^*\omega_{|\mathcal{E}}$ sont les restrictions respectives de dL et $\Lambda^*\omega$ à $\mathcal{E} \subset TE$.

L'application Λ ainsi définie s'appelle la **transformée de Legendre** de L.

Définition 3.5
Nous dirons qu'un Lagangien L sur E est régulier si sa transformée de Legendre Λ est de rang maximal $n+p$.

A noter que dans des coordonnées adaptées on a :

$$dL_{|\mathcal{E}} \circ J = \frac{\partial L}{\partial a^\alpha} dx^\alpha.$$

De plus, L est régulier si et seulement si $\det(\frac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta}) \neq 0$.
La transformée de Legendre Λ possède les propriétés suivantes : (voir [F] pour plus de détails).

Proposition 3.6 *[F]*
Etant donné un lagrangien L sur E de transformée de Legendre Λ, considérons

$$\Omega_L = \Lambda^* d\omega$$

La 2-forme Ω_L possède les propriétés suivantes :

1. *$\Omega_L(JX, Y) + \Omega_L(X, JY) = 0$ pour tout champ de vecteurs X et Y sur E tangent à $\mathcal{E}$. En particulier, la restriction de Ω_L au sous fibré $\mathcal{E}^v$ est nulle.*
2. *le rang de Ω_L est au plus $2p$ et Ω_L est de rang maximum $2p$ si et seulement si L est régulier ;*
3. *Si L est régulier sa restriction au sous fibré $\mathcal{E}$ est de rang $2p$;*
4. *le fibré dual E^* étant identifié à T^*M/E°, il existe une application $\bar{\Lambda} : E \to E^*$ rendant commutatif les diagrammes :*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\bar{\Lambda}"'] & T^*M \arrow[dl, "P"] \\ T^*M/E^\circ & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "\bar{\Lambda}"] \arrow[d, "\pi"'] & E^* \arrow[dl, "\pi^*"] \\ M & \end{tikzcd}$$

De plus, $\bar{\Lambda}$ est un difféomorphisme local sur E^*. $\bar{\Lambda}$ est un difféomorphisme (global), si et seulement si la restriction de $\bar{\Lambda}$ à chaque fibre de E est un isomorphisme.

Remarque 3.7 *dans la cadre du formalisme général non-holonome sur un agébroïde de Lie E sur M (cf [CLMM]), la transformée de Legendre est un morphisme de E dans E^*. Dans notre contexte, c'est un relèvement de E dans T^*M qui se factorise au travers au quotient $T^*M/E^0 \equiv E^*$, pour donner la transformation de Legendre $\bar{\Lambda}$ au sens du formalisme général pré-cité. En particulier la 2-forme Ω_L associée à L (Proposition 3.6) correspond au résultat analogue dans ce formalisme.*

Il résulte de la proposition 3.6 que le sous fibré $\mathcal{E}^v$ est un fibré lagrangien c'est-à-dire de dimension maximum p, et tel que la restriction de Ω_L à $\mathcal{E}^v$ soit nulle.

Proposition 3.8 *[F]*
Soit L un Lagrangien régulier.

1. *Il existe un unique champ de vecteurs S sur E tangent à $\mathcal{E}$ qui est solution de l'équation :*
$$i_S\Omega_L = -d(\Theta_C L - L)_{|\mathcal{E}}$$
où Θ_C désigne la dérivée de Lie par C sur TE. De plus S est une semi gerbe sur E.
2. *Une courbe γ sur E est une courbe intégrale de S si et seulement si $\Lambda(\gamma, \dot\gamma)$ est une bi-extrémale normale.*

Définition 3.9
Nous appelons extrémales de L les courbes intégrales de S.

Remarque 3.10 *Compte tenu de la remarque 3.3, une extrémale de L n'est jamais strictement anormale.*

Remarque 3.11 *Les extrémales de L ainsi définies sont bien sûr les extrémales au sens classique du formalisme non-holonome sur les quasi-agébroïdes. En particulier, dans notre contexte, elles satisfont à une équation d'Euler Lagange qui s'écrit (dans un système de coordonnées adaptées) :*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta}\dot a^\alpha \ + \ a^\gamma \frac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \delta x^\gamma} - \frac{\partial L}{\delta x^\beta} = 0 \tag{14}$$

où $\dfrac{\delta}{\delta x^\alpha}$ désigne la dérivation par A_α

Preuve de la Proposition 3.8. On se place encore dans un système de coordonnées adaptées sur E. On a alors :

$$\Theta_C L - L = a^\alpha \frac{\partial L}{\partial a^\alpha} - L$$

En coordonnées adaptées, un champ de vecteurs S sur E tangent à $\mathcal{E}$ a une écriture du type :

$$S = S^\alpha A_\alpha + \ \bar S^\beta \frac{\partial}{\partial a^\beta}$$

Par ailleurs, la restriction de Ω_L à $\mathcal{E}$ s'écrit :

$$\Omega_L = \frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta x^\alpha}(\frac{\partial L}{\partial a^\beta}) - \frac{\delta}{\delta x^\beta}(\frac{\partial L}{\partial a^\alpha})]dx^\alpha \wedge dx^\beta \ + \ \frac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} da^\beta \wedge dx^\alpha \tag{15}$$

(Rappelons que $\dfrac{\delta}{\delta x^\alpha}$ désigne la dérivation par A_α)

La résolution de l'équation

$$i_S\Omega_L = -d(\Theta_C L - L)_{|\mathcal{E}}$$

conduit aux relations :

$$\begin{cases} S^\alpha[\dfrac{\delta}{\delta x^\alpha}(\dfrac{\partial L}{\partial a^\beta}) - \dfrac{\delta}{\delta x^\beta}(\dfrac{\partial L}{\partial a^\alpha})] \ + \ \bar{S}^\alpha \dfrac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} = \dfrac{\delta L}{\delta x^\beta} - a^\alpha \dfrac{\delta}{\delta x^\beta}(\dfrac{\partial L}{\partial a^\alpha}) \\ S^\alpha \dfrac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} = a^\alpha \dfrac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} \end{cases}$$

Comme la matrice $(\dfrac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta})$ est inversible sur $\mathcal{E}$ on obtient :

$$S^\alpha = a^\alpha \quad pour \quad \alpha = 1, \dots, p$$

et la première équation donne :

$$\bar{S}^\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} = \frac{\delta L}{\delta x^\beta} - a^\lambda \frac{\delta}{\delta x^\lambda}(\frac{\partial L}{\partial a^\beta})$$

Cette expression entraîne que le champ de vecteurs S est bien défini et que S est une semi-gerbe sur E.
Par ailleurs, comme la restriction de Ω_L à $\mathcal{E}$ est symplectique, cette solution est unique.

2) Le fibré E^* étant localement identifié avec le sous fibré de T^*M engendré par $dx^1, \cdots dx^p$, la projection $p_0 : T^*M \to T^*M/E^\circ$ se ramène alors à la projection de T^*M sur E^* paralèllement à E°. Rappelons qu'une bi-extrémale (γ, ξ) est solution du système différentiel (13), avec $\nu \neq 0$ et
$H_\nu(x, a, \xi) = a^\alpha \xi_i A^i_\alpha(x) - \nu L(x, a)$.
Dans ce cas, sans perte de généralité, on peut supposer que $\nu = 1$. La dernière équation du système (13) donne alors la relation

$$\frac{\partial L}{\partial a^\alpha}(x, a) = \xi_i A^i_\alpha. \tag{16}$$

Le long d'une bi-extrémale normale, l'hamiltonien H_1 vaut donc :

$$H_1(x, a, \xi) = a^\alpha \frac{\partial L}{\partial a^\alpha}(x, a) \ - \ L(x, a) = [\Theta_C L - L](x, a) \tag{17}$$

Dans les coordonnées adpatées, on a $A_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$ pour $\alpha, \beta = 1, \cdots, p$ (δ_α^β étant le symbole de Kronecker) et on a posé $A_\alpha^j = B_\alpha^j$ pour $\alpha = 1, \cdots, p$ et $j > p$; le changement de variables entre les coordonnées adaptées et les coordonnées canoniques est caractérisé par :

$$\begin{cases} \zeta_\alpha = \xi_\alpha + \sum_{j>p} B_\alpha^j \xi_j & \text{pour} \quad \alpha = 1, \cdots, p \\ \zeta_j = \xi_j & \text{pour} \quad j = p+1, \cdots, n \end{cases}$$

La relation (16) s'écrit donc en fait :

$$\frac{\partial L}{\partial a^\alpha}(x, a) = \zeta_\alpha \tag{18}$$

Etant donné un point $(x_0, \zeta_0) \in T^*M_{|U} \equiv U \times I\!R^n$, comme L est régulier, il existe des fonctions $a^\alpha(x, \zeta)$ définies sur un voisinage $V \times W \subset U \times I\!R^n$ de (x_0, ζ_0) telles que

$$\frac{\partial L}{\partial a^\alpha}(x, a^1(x, \zeta), \cdots, a^p(x, \zeta)) = \zeta_\alpha \text{ avec la condition} \tag{19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a^\alpha}(x_0, a^1(x_0, \zeta_0), \cdots, a^p(x_0, \zeta_0)) = (\zeta_0)_\alpha$$

Prenant en compte les relations (19), dans les coordonnées adaptées (x, ζ) sur $V \times W$, considérons la fonction

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, \zeta) = a^\alpha(x, \zeta)\zeta^\alpha \ - \ L((x, a^1(x, \zeta), \cdots, a^p(x, \zeta)).$$

On peut donc considérer $\tilde{\mathcal{H}}$ comme une fonction $\mathcal{H}(x, \xi)$. Une courbe (γ, ξ) contenue dans $V \times W$ est alors une bi-extrémale normale si (γ, ξ) est une courbe intégrale du champ hamiltonien $\vec{\mathcal{H}}$.

D'autre part, si $\Lambda : E_{|U} \equiv U \times I\!R^p \to T^*M$ est la transformée de Legendre de L, on a $\Lambda[U \times I\!R^p] = U \times I\!R^p \equiv E^*_{|U}$, compte tenu des identifications du début de paragraphe. Comme on a : $\Lambda(V \times W) \equiv \{V \times W\} \cap E^*_{|U} \equiv V \times \{W \cap I\!R^p\}$, il résulte alors de (18) et (19) que l'application $(x, \zeta) \to (x, a^1(x, \zeta), \cdots, a^p(x, \zeta))$ en restriction à $\Lambda(V \times W) \equiv \{V \times W\} \cap E^*_{|U}$ est l'application réciproque de la restriction de Λ à $V \times W$:

$$\Lambda^{-1} : \Lambda(V \times W) \equiv \{V \times W\} \cap E^*_{|U} \equiv V \times \{W \cap I\!R^p\} \to U \times I\!R^p \equiv E_{|U}$$

De plus, sur $V \times W$ on a bien sûr :

$$[\Theta_C L - L](x, a(x, \zeta)) = \tilde{\mathcal{H}}(x, \zeta) \text{ où } a(x, \zeta) = (a^1(x, \zeta), \cdots, a^p(x, \zeta))$$

Compte tenu de (2) Ψ laisse invariant $U \times I\!R^p \equiv E^*_{|U}$ et sa restriction à $U \times I\!R^p \equiv E^*_{|U}$ est l'identité. Il en résulte que sur $\Lambda^{-1}(V \times W)$ on a :

$$\mathcal{H} \circ \Lambda = [\Theta_C L - L]$$

De plus, $\mathcal{H}$ est indépendant des variables $\xi_{p+1}, \cdots \xi_n$.

Notons $d\omega_L$ la 2-forme induite par $d\omega$ sur $V \times W$. Sur $\mathcal{E} \cap \Lambda^{-1}(V \times W)$, on a $\Omega_L = \Lambda^* d\omega_L$. La restriction de Λ à $\Lambda^{-1}(V \times W)$ étant un difféomorphisme sur $E^* \cap \{V \times W\}$, on a alors $d\omega(\Lambda_* S, \;) = -d\mathcal{H}$, ce qui achève la démonstration.

$\triangle$

3.3 Extrémales localement optimales

Etant donné un lagrangien L sur E, on peut lui associer un champ de tenseur sur le fibré vertical $\mathcal{E}^v$ défini de la manière suivante :

$$g_L(JX, JY) = \Omega_L(JX, Y), \text{ pour tout champ de vecteurs } X \text{ et } Y \text{ tangent à } \mathcal{E}. \tag{20}$$

Le tenseur g_L est bien défini et il est symétrique. De plus, g_L est non dégénéré si et seulement si L est régulier. Ainsi, lorsque L est régulier, g_L est alors une métrique pseudo-riemannienne sur le fibré $\mathcal{E}^v$. Comme M est connexe, la signature de la forme quadratique sur $\mathcal{E}^v$ associée est constante. Les conditions suffisantes d'optimalité qui suivent, vont concerner seulement les cas où cette métrique est riemannienne ou bien lorentzienne.

Définition 3.12
On dira que le lagrangien L régulier est de type riemannien (resp. lorentzien) si g_L est une métrique riemannienne (resp. lorentzienne) sur $\mathcal{E}^v$.

Un lagrangien L sera de type riemannien (resp. lorentzien) si et seulement si, au voisinage de chaque point de E, il existe un système de coordonnées adaptées $(x^1, \cdots, x^n, a^1, \cdots, a^p)$ dans lequel la matrice $(\dfrac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta})$ est définie positive (resp. de signature $(1, p-1)$). Il est clair, qu'en général, une extrémale n'est pas optimale ni même localement optimale. Nous allons maintenant donner des conditions suffisantes pour que ce soit le cas :

Théorème 3.13
Soit L un lagrangien régulier sur E et $\gamma : [a,b] \to M$ une extrémale de L telle que $\Theta_C L(\gamma, \dot\gamma) \neq 0$ sur $[a,b]$ alors on a :

i) si L (resp. $-L$) est de type riemannien alors γ est localement minimisante (resp. maximisante).

ii) si L (resp. $-L$) est de type lorentzien et si $g_L(\dot\gamma^v, \dot\gamma^v) < 0$ (resp. $g_L(\dot\gamma^v, \dot\gamma^v) > 0$) sur $[a,b]$ alors γ est localement maximisante (resp. minimisante), $\dot\gamma^v$ étant le relèvement vertical de $\dot\gamma$.

Remarque 3.14 *Dans le cas où la signature de la métrique g est (k,l) avec $k > 1$ ou $l > 1$, les extrémales ne sont pas, en général, localement minimisantes ou maximisantes. Ce résultat est établi dans [PP1] dans le cas où L est homogène de degré 2.*

La preuve de ce théorème est technique. Compte tenu de sa longueur et malgré son indépendance avec le contexte des paragraphes suivants, cette démonstration sera donnée en Appendice

4 Connexions Lagrangiennes métriques et semi-gerbes

4.1 Connexions canoniques associées à une semi-gerbe

La proposition suivante permet à toute semi-gerbe S de lui associer une connexion canonique (relativement au choix de $[\ ,\ ]_P$) :

Proposition 4.1 *[F]*
Soit S une semi-gerbe sur E. Alors l'application Γ_S sur $\mathcal{E}$ caractérisée par :

$$\Gamma_S(Z) = [JX, S] - J[X, S]_\Pi \tag{21}$$

est une connexion sur $\mathcal{E}$. Dans un système de coordonnées adaptées, les coefficients de la connexion Γ_S associée à $S = a^\alpha A_\alpha + S^\beta \dfrac{\partial}{\partial a^\beta}$ sont :

$$\Gamma^\beta_\alpha = \frac{1}{2}(a^\gamma C^\beta_{\alpha\gamma} - \frac{\partial S^\beta}{\partial a^\alpha}) \text{ pour } \alpha = 1, \cdots, p.$$

avec $[A_\alpha, A_\beta]_P = C^\gamma_{\alpha\beta} A_\gamma$.

Lorsque S est quadratique (c'est à dire si S vérifie $[C, S] = S$) on a :

Proposition 4.2 *[F]*
les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *(i) S est quadratique*
- *(ii) dans tout système de coordonnées adaptées, S a une décomposition du type :*

$$S = a^\alpha A_\alpha + \frac{1}{2} a^\gamma a^\lambda S^\beta_{\gamma\lambda} \frac{\partial}{\partial a^\beta}$$

- *(iii) Γ_S est linéaire*
- *(iv) S est la semi-gerbe canonique de Γ_S.*

Théorème 4.3 *[F]*
Etant donné le pré-crochet de Lie canonique $[\ ,\ ]_0$, soit S une semi-gerbe sur $\mathcal{E}$ et Γ^0_S la connexion canonique associée. Alors, toute connexion Γ s'écrit de manière unique $\Gamma^0_S + \Upsilon$ où Υ est un tenseur de type $(1,1)$ semi-basique.
De plus, S est la semi-gerbe canonique de Γ si et seulement si $\Upsilon(S) = [C, S] - S$. Enfin si Γ est linéaire, alors sa semi-gerbe canonique S est quadratique. Dans ce cas, la connexion canonique Γ_S (associée à un pré-crochet de Lie $[\ ,\ ]_P$ quelconque sur E) est aussi linéaire et S est la semi-gerbe canonique de Γ_S.

Si L est un Lagrangien régulier sur E et S_L la semi gerbe associée, à tout pé-crochet de Lie $[\ ,\ ]_P$ sur E est associée une connexion canonique Γ_{LP} sur E. La connexion canonique associée au pré-crochet de Lie canonique $[\ ,\ ]_0$ sur E sera notée Γ_L

Remarque 4.4 *compte tenu de la Remarque 2.4, la connexion canonique Γ_L associée à un Lagrangien régulier L sur E correspond à la connexion de Cartan-Kern selon la terminologie de [PoPo].*

4.2 Connexions métriques associées à une semi-gerbe

Dans toute cette section, nous choisissons le pré-crochet de Lie canonique $[\ ,\ ]_{\mathbf{0}}$ sur E que l'on notera simplement $[\ ,\ ]$. La semi-gerbe S est fixée et Γ_S désigne la connexion canonique de S associée à ce pré-crochet de Lie. Dans ce cas, étant donné un champ de repères adaptés $(A_1, \cdots, A_p, \frac{\partial}{\partial a^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial a^p})$, les coefficients de la connexion Γ_S sont

$$\Gamma^\beta_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial S^\beta}{\partial a^\alpha} \text{ pour } \alpha, \beta = 1, \cdots, p.$$

Nous allons adapter à notre contexte la notion de dérivation introduite dans [BU].

Nous appelons **dérivation verticale** associée à S toute application

$$D : \mathcal{X}(\mathcal{E}^v) \to \mathcal{X}(\mathcal{E}^v)$$

qui vérifie :

(1) $D(Y + Y') = DY + DY'$ pour tout Y et Y' verticaux ;

(2) $DfY = S(f)Y + fDY$ pour tout Y vertical et toute fonction différentiable f sur E.

Soit Z un élément de $\mathcal{X}^*(E)$, c'est à dire un champ de vecteurs sur E. Soit $h_\Gamma(Z)$ la projection horizontale relativement à une connexion Γ du relèvement Z^T de Z. Localement, on a alors

$$h_\Gamma(Z) = Z^\alpha(A_\alpha - \Gamma^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial a^\beta}).$$

D'autre part, rappelons que J induit un isomorphisme $\tilde{J}$ de $\mathcal{X}^*(E)$ sur $\mathcal{X}(\mathcal{E}^v)$ caractérisé par

$$\tilde{J}(Z) = Z^v.$$

Proposition 4.5 *[F]*

1. *Soit Γ une connexion sur E. Alors l'application*

$$D_\Gamma Y = [S, Y] + h_\Gamma(\tilde{J}^{-1}(Y))$$

est une dérivation verticale associée à (S, Γ).

2. *Pour toute dérivation verticale D associée à S, il existe une unique connexion Γ telle que $D = D_\Gamma$.*
3. *Si $D = D_\Gamma$ alors dans un système de coordonnées adaptées nous avons :*

$$D\frac{\partial}{\partial a^a} = \Gamma^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial a^\beta} \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad \alpha = 1, \cdots, p.$$

où Γ^β_α sont les coefficients de la connexion Γ.

Preuve. (résumée)
Nous montrons d'abord le résultat pour $\Gamma = \Gamma_S$, en utilisant les coordonnées locales adaptées. Pour une connexion Γ quelconque, il existe un tenseur semi-basique Υ de type $(1,1)$ sur E tel que $\Gamma = \Gamma_S + \Upsilon$ (lemme 2.5).
Nous avons donc

$$h_\Gamma = h_{\Gamma_S} - \frac{1}{2}\Upsilon$$

Par suite on a :

$$D_\Gamma Y = D_{\Gamma_S} Y - \frac{1}{2}(\tilde{J}^{-1}(Y)).$$

Il en résulte que $D_\Gamma Y$ vérifie bien les propriétés caractéristiques d'une dérivation verticale.
Soit D une dérivation verticale. Alors $\triangle = D - D_{\Gamma_S}$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}^v$. On considère l'endomorphisme de $T\mathcal{E}$ défini par :

$$\Upsilon(Z) = -2\triangle JZ$$

On vérifie que $\Gamma = \Gamma_S + \Upsilon$ est une connexion sur $\mathcal{E}$ et l'unicité résulte de l'écriture locale.

$\triangle$

Etant donnée une dérivation verticale D_Γ associée à un couple (S, Γ), de manière classique, nous pouvons définir une notion de transport parallèle le long des courbes intégrales de S :

si $c : [0, T] \to E$ est une courbe intégrale de S, un champ de vecteurs vertical est parallèle le long de c si on a $D_\Gamma Y(c(s)) = 0$ pour tout $s \in [0, T]$.

De plus, si $v \in \mathcal{E}^v_{c(0)}$ alors il existe un unique champ de vecteur vertical V parallèle le long de c et tel que $V(c(0)) = v$.
On définit ainsi un champ d'isomorphisme $\tau_s : \mathcal{E}^v_{c(0)} \to \mathcal{E}^v_{c(s)}$ pour tout $s \in [0, T]$.

Considérons maintenant une métrique pseudo-riemannienne g sur $\mathcal{E}^v$. Comme dans [BM], nous avons :

Définition 4.6

1. *La connexion* Γ *est dite* g*-métrique relativement à* S *s'il existe une métrique pseudo-riemannienne* g *sur* $\mathcal{E}^v$ *telle que le transport parallèle* τ_s *le long de toute courbe intégrale* c *de* S *soit un isométrie de* $\mathcal{E}^v_{c(0)}$ *dans* $\mathcal{E}^v_{c(s)}$ *pour tout* s*.*
2. *On dit que* S *est* g*-métrique si sa connexion canonique* Γ_S *est* g*-métrique.*

A la métrique g est naturellement associé le tenseur $D_\Gamma g$ de type $(2,0)$ sur $\mathcal{E}^v$, défini par :

$$D_\Gamma g(Y,Y') = Sg(Y,Y') - g(D_\Gamma Y, Y') - g(Y, D_\Gamma Y').$$

Comme dans le cas classique, on a :

Lemme 4.7 *[F] La connexion* Γ *est* g*-métrique si et seulement si* $D_\Gamma g \equiv 0$

Par ailleurs, la métrique g définit un isomorphisme $\tilde{g}$ de $\mathcal{E}^v$ dans $[\mathcal{E}^v]^*$. Considérons alors le morphisme de fibré $\Phi_g : [\mathcal{E}^v]^* \otimes \mathcal{E}^v \to \otimes^2[\mathcal{E}^v]^*$ défini par :

$$\Phi_g(\triangle) = < \tilde{g} \circ \triangle, \ >$$

où $< \, , \, >$ est le crochet classique de dualité.

Lemme 4.8 *[F] L'application* $\Phi_g : [\mathcal{E}^v]^* \otimes \mathcal{E}^v \to \otimes^2[\mathcal{E}^v]^*$ *est un isomorphisme.*

Notons $\mathcal{S}(\mathcal{E}^v)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{E}^v)$ les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques sur $\mathcal{E}^v$ respectivement.
On a bien sûr la décomposition canonique :

$$\otimes^2[\mathcal{E}^v]^* = \mathcal{S}(\mathcal{E}^v) \oplus \mathcal{A}(\mathcal{E}^v)$$

On notera $\Phi_g^{\mathcal{S}}$ et $\Phi_g^{\mathcal{A}}$ la composition de Φ_g avec la projection canonique de $\otimes^2[\mathcal{E}^v]^*$ sur $\mathcal{S}(\mathcal{E}^v)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{E}^v)$ respectivement (paralèllement à l'autre facteur de la décomposition)
Avec ces notations nous avons alors :

Proposition 4.9 *[F]*
L'ensemble des connexions g*-métriques* Γ *est caractérisé par :*

$$\{\Gamma = \Gamma_S - 2\triangle \circ J, \ \textit{avec } \triangle \in [\Phi_g^{\mathcal{S}}]^{-1}(D_{\Gamma_S} g)\}$$

où D_{Γ_S} *est la dérivation verticale associée à* Γ_S*.*

4.3 Connexion métrique lagrangienne associée à une semi-gerbe

Rappelons que si L est un Lagrangien régulier, la 2-forme différentielle Ω_L associée est de rang maximum $2p$ et sa restriction à $\mathcal{E}$ est symplectique et $\mathcal{E}^v$ est une distribution lagrangienne (voir paragraphe 3.2).
A L est également associée une métrique pseudo-riemannienne canonique sur $\mathcal{E}^v$

$$g_L(Y, Y') = \Omega_L(Y, Z') \quad \text{où} \quad JZ' = Y'.$$

Plus généralement, considérons une 2-forme différentielle Ω sur E ayant les propriétés suivantes :

(1) Ω est compatible avec J c'est à dire $\Omega(JX, Y) + \Omega(X, JY) = 0$ pour tout X et Y ;

(2) Ω est de rang constant $2p$;

(3) la restriction de Ω à $\mathcal{E}$ est symplectique.

Dans tout ce paragraphe, la 2-forme Ω vérifiant de telles hypothèses est fixée.

Lemme 4.10 *[F] Nous avons les propriétes suivantes :*

1. *$\mathcal{E}^v$ est un sous fibré Lagrangien dans $\mathcal{E}$.*
2. *Le noyau de Ω est un supplémentaire de $\mathcal{E}$ dans TE.*
3. *Il existe une unique métrique g_Ω sur $\mathcal{E}^v$ définie par*

$$g_\Omega(Y, Y') = \Omega(Y, Z')$$

où Z' est tel que $JZ' = Y'$.

4. *Dans un système de coordonnées adaptées, la restriction de Ω à $\mathcal{E}$ a une écriture du type :*

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \; + \; \bar{\omega}_{\alpha\beta} da^\alpha \wedge dx^\beta \tag{22}$$

où la matrice de terme général $\omega_{\alpha\beta}$ (resp. $\bar{\omega}_{\alpha\beta}$) est antisymétrique (resp. symétrique) de rang p et on a :

$$g_\Omega = \bar{\omega}_{\alpha\beta} da^\alpha \otimes da^\beta. \tag{23}$$

Dans la suite, nous écrivons la décomposition (22) :

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \; + \; g_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge da^\beta \tag{24}$$

Définition 4.11
Nous dirons qu'une connexion Γ est lagrangienne si l'espace horizontal associé est un sous fibré lagrangien relativement à Ω.

Nous allons établir le résultat suivant :

Théorème 4.12
Soit S une semi-gerbe. Il existe une unique connexion lagrangienne g_Ω-métrique relativement à S. Dans un système de coordonnées adaptées, avec les notations (23) et (24), les coefficients de cette connexion sont caractérisés par :

$$g_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_\beta = \frac{1}{2}(S(g_{\alpha\beta}) + \omega_{\alpha\beta}). \tag{25}$$

Preuve. On notera simplement g la métrique g_Ω. Considérons une connexion $\Gamma = \Gamma_S + T$.
Nous allons montrer qu'il existe un unique tenseur semi-basique T tel que $\Gamma_S + T$ vérifie les conclusions du théorème.
Comme Γ doit être g-métrique relativement à S, d'après la proposition 4.9, le tenseur doit déjà s'écrire

$$T = -2\triangle \circ J, \text{ avec } \triangle \in [\Phi^{\mathcal{S}}_g]^{-1}(D_{\Gamma_S} g).$$

Pour une telle connexion, le projecteur horizontal h_Γ est égal à :

$$h_\Gamma = h_S + \triangle J \tag{26}$$

où h_S est le projecteur associé à Γ_S.
Pour que la connexion soit lagrangienne il faut et il suffit que l'on ait :

$$\Omega(h_\Gamma(Z), h_\Gamma(Z')) = 0 \text{ pour tout } Z \text{ et } Z' \text{ tangent à } \mathcal{E}.$$

Il résulte de (26) que cette condition est équivalente à :

$$\Omega(h_S(Z), h_S(Z')) = \Omega(\triangle JZ', h_S(Z)) - \Omega(\triangle JZ, h_S(Z')) - \Omega(\triangle JZ, \triangle JZ'). \tag{27}$$

Or $\triangle$ est à valeurs dans $\mathcal{E}^v$, nous avons donc :

$$\Omega(\triangle JZ, \triangle JZ') = 0 \text{ (propriété (3) de } \Omega).$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\Omega(\triangle JZ', h_S(Z)) - \Omega(\triangle JZ, h_S(Z)) &= g(\triangle JZ', Jh_S(Z)) - g(\triangle JZ, Jh_S(Z')) \\ &= g(\triangle JZ', JZ) - g(\triangle JZ, JZ')\end{aligned} \tag{28}$$

pour tout Z et Z' tangent à $\mathcal{E}$.
Par ailleurs, J est un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\Gamma_S}$ sur $\mathcal{E}^v$, notons H_S l'isomorphisme réciproque de $\mathcal{E}^v$ dans l'espace horizontal $\mathcal{H}_{\Gamma_S}$ (canoniquement associé à Γ_S, pour plus de détails voir [F]). La condition (28) est alors équivalente à

$$\Phi^{\mathcal{A}}_g(\triangle) = \Omega(H_S, H_S).$$

Par suite, Γ sera une connexion lagrangienne g-métrique relativement avec S si et seulement si $\Gamma = \Gamma_S + \triangle J$ avec $\Phi_g(\triangle) = D_S g + \Omega(H_S, H_S)$.
Comme Φ_g est un isomorphisme, alors $\triangle$ est unique à vérifier cette condition.

On se place maintenant dans un système de coordonnées adaptées. Compte tenu des propriétés de Γ avec les notations (23) et (24) on a :

$$\begin{aligned} D_\Gamma g(\frac{\partial}{\partial a^\alpha}, \frac{\partial}{\partial a^\beta}) &= S(g_{\alpha\beta}) - g_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_\alpha - g_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_\beta = 0 \\ \Omega(h_\Gamma(\frac{\partial}{\partial a^\alpha}), h_\Gamma(\frac{\partial}{\partial a^\beta})) &= \omega_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_\beta + g_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_\alpha = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

d'où les équations :

$$\begin{aligned} S(g_{\alpha\beta}) &= g_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_\alpha + g_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_\beta \\ \omega_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_\beta - g_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_\alpha \end{aligned} \tag{30}$$

En additionnant ces deux équations, nous obtenons le résultat annoncé.

□

Nous allons appliquer ce résultat dans le cas d'un Lagrangien régulier, nous avons alors :

Théorème 4.13
Soit L un lagrangien régulier et S_L sa semi-gerbe canonique.

1. *La connexion canonique associée $\Gamma_L = [J, S_L]$ est l'unique connexion lagrangienne (relativement à Ω_L) et g_L-métrique relativement à S_L.*
2. *Il existe une unique connexion $\tilde\Gamma_L$ lagrangienne (relativement à Ω_L) vérifiant les deux propriétés suivantes :*
   (i) S_L est la semi-gerbe canonique de $\tilde\Gamma_L$.
   (ii) Si $\mathcal{H}_L$ et $\tilde{\mathcal{H}}_L$ sont les fibrés horizontaux associés à Γ_L et $\tilde\Gamma_L$ respectivement, alors $\tilde{\mathcal{H}}_L$ est contenue dans la distribution engendrée par S_L et $\mathcal{H}_L$.
3. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
   (1) $\tilde\Gamma_L = \Gamma_L$
   (2) Γ_L est linéaire
   (3) $[C, S] = S$
   (4) $[C, L] = L$.

Preuve.
1. On applique le théorème 4.12 à $\Omega = \Omega_L$ et $g = g_L$. Soit Γ_L l'unique connexion ayant les propriétés du théorème pour le couple (Ω_L, g_L).
Il suffit donc de montrer que dans un système (quelconque) de coordonnées adaptées, les coefficients de la connexion Γ_{S_L} vérifient la propriété (25).

Etant donné un système de coordonnées adaptées, d'après le paragraphe 3.2, on a :

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= \frac{\delta}{\delta x^\alpha}(\frac{\partial L}{\partial a^\beta}) - \frac{\delta}{\delta x^\beta}(\frac{\partial L}{\partial a^\alpha}) \\ g_{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta} \\ g_{\alpha\beta}S^\beta &= \frac{\delta L}{\delta x^\alpha} - a^\lambda \frac{\delta}{\delta x^\lambda}(\frac{\partial L}{\partial a^\alpha}) \end{aligned} \tag{31}$$

Les coefficients de la connexion Γ_{S_L} sont donnés par

$$\Gamma^\beta_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial S^\beta}{\partial a_\alpha}.$$

De manière classique, on note $g^{\alpha\beta}$ le terme général de la matrice $(g_{\alpha\beta})^{-1}$ inverse de la matrice $(g_{\alpha\beta})$.
Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \Gamma^\beta_\alpha &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial g^{\gamma\beta}}{\partial a^\alpha}(a^\lambda \frac{\delta}{\delta x^\lambda}(\frac{\partial L}{\partial a^\gamma} - \frac{\delta L}{\delta x^\gamma})+ \\ &\quad +g^{\gamma\beta}(\frac{\delta}{\delta x^\alpha}(\frac{\partial L}{\partial a^\gamma} - \frac{\delta}{\delta x^\gamma}(\frac{\partial L}{\partial a^\alpha})) + g^{\gamma\beta}a^\lambda \frac{\delta g_{\alpha\gamma}}{\delta x^\lambda}\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial g^{\gamma\beta}}{\partial a\alpha}(a^\lambda \frac{\delta}{\delta x^\lambda}(\frac{\partial L}{\partial a^\gamma})\frac{\delta L}{\delta x^\gamma}) + g^{\gamma\beta}\omega_{\alpha\gamma} + g^{\gamma\beta}a^\lambda \frac{\delta g_{\alpha\gamma}}{\delta x^\lambda}\Big]. \end{aligned}$$

Or on a :

$$g_{\beta\gamma}\frac{\partial g^{\gamma\beta}}{\partial a^\alpha}(a^\lambda \frac{\delta}{\delta x^\lambda}(\frac{\partial L}{\partial a^\gamma}) - \frac{\delta L}{\delta x^\gamma}) = S_\beta \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial a^\alpha}.$$

Pour achever la preuve de cette partie, il suffit de noter que l'on a :

$$\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial a^a} = \frac{\partial^3 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta \partial a^\gamma} = \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial a^\beta}.$$

2. Existence :
La connexion $\tilde{\Gamma}_L$ est caractérisée par son fibré horizontal $\tilde{\mathcal{H}}_L$ dans $\mathcal{E}$. Notons $\mathcal{H}_L$ le fibré horizontal associé à Γ_L. Comme Ω_L est symplectique dans $\mathcal{E}$, l'orthogonal symplectique S_L° de S_L définit une distribution de codimension supérieure ou égal à 1 de $\mathcal{E}$ qui contient S_L.
Considérons $\tilde{H}_L$ la distribution engendrée par S_L et $H_L \cap S_L^\circ$. Dans chaque fibre $\mathcal{E}_{(x,u)}$ ou bien $S_L(x,u) \notin \mathcal{H}_L$ et dans ce cas $\mathcal{H}_L$ est transverse à S_L° en (x,u) et la dimension $\tilde{\mathcal{H}}_L$ en (x,u) est p ou bien $S_L(x,u) \in \mathcal{H}_L$ et dans ce cas, $\tilde{\mathcal{H}}_L = \mathcal{H}_L \cap S_L^\circ = \mathcal{H}_L$ et sa dimension est encore p. Il en résulte que $\tilde{\mathcal{H}}_L$ est un sous fibré de $\mathcal{E}$ supplémentaire de $\mathcal{E}^v$.
Comme Γ_L est lagrangienne, nous avons

$$\Omega_L(Z, Z') = 0$$

pour tout Z et Z' tangent à $\tilde{\mathcal{H}}_L \cap S_L^\circ$ et $\Omega_L(S, Z) = 0$ pour tout Z tangent à $\tilde{\mathcal{H}}_L \cap S_L^\circ$.
Par suite $\tilde{\Gamma}_L$ est bien lagrangienne et vérifie les conditions requises.

Unicité :
Soit Γ une connexion lagrangienne qui vérifient les conditions (i) et (ii) et notons $\mathcal{H}_\Gamma$ le fibré horizontal associé.
Comme Γ_L est lagrangienne, $\mathcal{H}_\Gamma$ est contenue dans S_L°.
En un point (x, u), si $S_L(x, u) \in \mathcal{H}_L$, dans ce cas, $\mathcal{H}_\Gamma = \mathcal{H}_L = \tilde{\mathcal{H}}_L$ en ce point.
Si $S_L(x, u) \notin \mathcal{H}_L$ alors l'espace vectoriel engendré par S_L et $\mathcal{H}_L$ en (x, u) est transverse à S_L° et son intersection avec S_L° est de dimension p et contient $\mathcal{H}_\Gamma$.
Nous avons donc encore $\mathcal{H}_L = \tilde{\mathcal{H}}_L$ en ce point.

Les équivalences (1) (2) et (3) de la partie **3.** sont élémentaires compte tenu de la proposition 4.2 d'une part, et l'expression de S_L en fonction de L (voir paragraphe 3.2) d'autre part.

5 Appendice

Dans cette appendice, nous donnons une démonstration du théorème 3.13 .
Une courbe extrémale γ définie sur un intervalle $[a, a+T]$ étant fixée, nous pouvons déjà remarquer que γ est C^∞. Nous reprenons les notations et le contexte de la proposition 3.8.
Le problème étant local, nous considèrons un voisinage $V \times W$ de $(\gamma(t_0), \dot{\gamma}(t_0))$ dans E avec la propriété (19) et des voisinages I de t_0 de sorte que que $(\gamma(I), \dot{\gamma}(I))$ $\in V \times W$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $t_0 = 0$ et considérer un voisinage I de $t_0 = 0$ du type $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Considérons deux points $t_1 < 0$ et $t_2 > 0$ de I.
Notons alors (γ, η) la bi-extrémale $\Lambda(\gamma, \dot{\gamma})$ associée à γ.
Rappelons que si $\mathcal{H} = [\Theta_C L - L] \circ \Lambda^{-1}$ alors (γ, η) est une courbe intégrale du champ hamiltonien $\vec{\mathcal{H}}$ sur $V \times W$ et que par suite on a :

$$\mathcal{H}(\gamma(t), \eta(t)) = C = \text{constante} \tag{32}$$

Dans les coordonnés adaptées, on a la décomposition :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^\alpha A_\alpha \text{ et } \eta = \eta_\alpha dx^\alpha.$$

De plus, par hypothèse, on a

$$\eta(\dot{\gamma}) = \Theta_C L(\gamma, \dot{\gamma}) \neq 0.$$

Ainsi $\dot{\gamma}$ et η ne sont pas nuls en 0. On a bien sûr $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_\alpha}(\gamma(0), \eta(0)) = \dot{\gamma}^\alpha(0)$. Après une transformation linéaire sur les variables $(x^1, \cdots, x^p)$, sans perte de généralité, on peut donc supposer que

$$dx^1(0) = \eta(0) \text{ en } \gamma(0).$$

On a alors :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_1}(\gamma(0), \eta(0)) \neq 0.$$

Dans $V \times W$, l'ensemble $S_0 = \{(x,\xi) \ : \ \mathcal{H}(x,\xi) = C\}$ est une hypersurface régulière et la restriction de π^*_M à S_0 est une submersion, quitte à restreindre $V \times W$. Désignons par S_1 l'hypersurface d'équation $x^1 = 0$ dans $V \times W$. Les hypersurfaces S_0 et S_1 sont transverses en $z_0 = (\gamma(0), \eta(0))$ et par suite, pour $V \times W$ assez petit, définissent localement une sous variété Σ de S_0 de codimension 1 et la restriction $\pi^*_{|\Sigma}$ de π^*_M à Σ est encore une submersion.
Il existe donc une section C^∞ s_0 de la submersion $\pi^*_{|\Sigma}$ telle que $s_0(\gamma(0)) = \eta(0)$.
Notons Σ_0 le graphe de cette section.
On peut remarquer que, dans le système de coordonnées canoniques

$$(x^1, \cdots, x^n, \xi_1, \cdots, \xi_n),$$

la section s_0 est caractérisée par une équation du type :

$$\mathcal{H}(u, \xi_1(u)), \cdots, \xi_n(u)) = C$$

où $u = (0, x^2, \cdots, x^n) \in U$.
D'après le théorème des fonctions implicites, on en déduit que s_0 a une écriture du type :

$$\xi_1 = s_0(u) \tag{33}$$

Le champ hamiltonien $\vec{\mathcal{H}}$ est tangent à S_0, $d\pi^*_{|\Sigma}(\vec{\mathcal{H}}(z_0))$ est égal à $\dot{\gamma}(0)$ et $\vec{\mathcal{H}}$ est transverse à Σ_0 en z_0.
Il en résulte que dans $\{(x^1, \cdots, x^n) \in V \ \ : x^1 = 0\}$, il existe un voisinage ouvert relativement compact U de $x_0 = \gamma(0)$ tel que $\vec{\mathcal{H}}$ soit transverse à Σ_0 dans $S_0 \cap (\pi^*_M)^{-1}(U)$.
Soit Φ_t le flot du champ hamiltonien $\vec{\mathcal{H}}$ et désignons par Σ_t l'image par Φ_t de Σ_0.
Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, la réunion des variétés Σ_t pour $-\varepsilon < t < \varepsilon$ est une sous variété de S_0 de dimension n. On note σ sur V' (resp. σ_0 sur U) la 1-forme défine par Σ (resp. Σ_0). 0n notera que $\sigma = s^*\omega$.
Compte tenu de (33), on a

$$d\sigma_0 = s_0^* d\omega = 0.$$

Dans ces conditions, il est bien connu que (cf [PP2]) Σ est une variété lagrangienne et par suite il existe une fonction $F : V' \to I\!R$ de sorte que $\sigma = dF$ au dessus de V'.
L'hamiltonien H_1 du PMP en restriction à Σ s'écrit :

$$H_1(x, a, s(x)) = a^\alpha < \sigma, A_\alpha > -L(x,a) = dF(a^\alpha A_\alpha) - L(x,a) \tag{34}$$

Comme $\dot\gamma = \gamma^\alpha A_\alpha$, alors $\mathcal{H}$ possède les propriétés suivantes :

$$H_1(\gamma(t), \dot\gamma(t), s \circ \gamma(t)) = H_1(\gamma(t), \dot\gamma(t), \eta(t)) = \mathcal{H}(\gamma(t), \eta(t)) \tag{35}$$

Par ailleurs, pour $t \in [a, b]$ fixé la différentielle de la fonction $a \to H_1(\gamma(t), a, \eta(t))$ est caractérisée par :

$$\frac{\partial H_1}{\partial a^\alpha} =< \sigma, A_\alpha > -\frac{\partial L}{\partial a^\alpha}$$

Cette différentielle s'annule pour $a = (\gamma^1(t), \cdots \gamma^p(t))$. De plus, en ce point, la hessienne de cette fonction est :

$$\mathcal{S}_{(x,a)} = -(\frac{\partial^2 L}{\partial a^\alpha \partial a^\beta}).$$

Considérons d'abord le cas où L est est **de type riemannien**.
Pour tout $(c(t), \dot c(t)) \in V' \times W$, posons $\zeta(t) = s \circ c(t)$.
Soit $\bar a(t)$ défini par

$$\Lambda(c(t), \bar a(t)) = \zeta(t).$$

On aura

$$H_1(c(t), \bar a(t), \zeta(t)) = C$$

$\mathcal{S}_{(c(t),\zeta(t))}$ définie négative, ainsi $b \to H_1(c(t), b, \zeta(t))$ possède un maximum en $\bar a(t)$.
On a donc

$$H_1(c(t), \bar a(t), \zeta(t)) = \sup\{H_1(\gamma(t), b, \zeta(t)), b \in W\} \tag{36}$$

Considérons maintenant deux points quelconques $t_1 < t_2$ de $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Posons $T = t_2 - t_1$ et soit $c : [0, T] \to V'$ un chemin horizontal absolument continu tel que $c(0) = \gamma(t_1)$ et $c(T) = \gamma(t_2)$. Si $a(t) = (a^1(t), \cdots, a^p(t))$ sont les composantes de $\dot c$ sur $A_1, \cdots, A_p$, alors $a(t) \in W$.
Par suite :

$$\begin{aligned} L(c(t), a(t)) - L(\gamma(t_1 + t), \dot\gamma(t_1 + t)) &= dF(\dot c) - dF(\dot\gamma) - [H_1(c(t), a(t), \zeta(t)) - C] \\ &= dF(\dot c) - dF(\dot\gamma) - [H_1(c(t), a(t), \zeta(t)) - H_1(c(t), \bar a(t), \zeta(t))] \end{aligned}$$

Compte tenu de (36), on a alors :

$$L(c(t), a(t)) - L(\gamma(t_1 + t), \dot\gamma(t_1 + t)) \geq dF(\dot c) - dF(\dot\gamma).$$

On en déduit :

$$\int_0^T [L(c(t), a(t)) - L(\gamma(t_1 + t), \dot\gamma(t_1 + t))]dt$$

$$\geq F(c(T)) - F(c(0)) - F(\gamma(t_2)) + F(\gamma(t_1)) = 0.$$

Ce qui achève la démonstration dans le cas L (resp. $-L$) de type riemannien.

Considérons maintenant le cas où L est de **type lorentzien**. Dans cette situation, la signature de la hessienne $\mathcal{S}$ est $(p-1,1)$. La restriction de $\mathcal{S}$ aux point de Σ permet de définir une métrique pseudo-riemannienne - que l'on note encore $\mathcal{S}$- sur $\triangle_{|V'}$. Notons $\triangle^+$, $\triangle^-$ et $\triangle^0$ l'ensemble des points $a \in \triangle$ de la fibre tels que $\mathcal{S}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)(a,a)$ soit strictement positif, strictement négatif, et nul respectivement. Remarquons que $\triangle^+$ possède deux composantes connexes.

On suppose désormais que :
$g_L(\dot{\gamma}^v, \dot{\gamma}^v) < 0$ ou de manière équivalente $\mathcal{S}_{(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) > 0$.
Etant donné le champ de vecteurs X sur V', on peut choisir un (autre) système de coordonnées adaptées $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, \bar{a}^1, \cdots, \bar{a}^p)$ ayant les propriétés suivantes :

1. $\bar{A}_1 = X = \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^1}$;
2. $\mathcal{S}(X, X) > 0$;
3. $\mathcal{S}(X, \bar{A}_\alpha) = 0$ pour $\alpha = 2, \cdots, p$;
4. $\mathcal{S}(\bar{A}_\alpha, \bar{A}_\beta) = -\delta_{\alpha\beta}$, pour $\alpha, \beta = 2, \cdots, p$

On note $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, \bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_p)$ les coordonnées adaptées sur E^* associées au nouveau champ de repères adaptés $\bar{A}_1, \cdots, \bar{A}_p$. Soit $\hat{\Phi}(\bar{x}, \bar{a}, \bar{\zeta})$ (resp. $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$), le difféomorphisme associé au passage des nouvelles coordonnées aux anciennes dans $V' \times \Lambda(V' \times W)$ (resp. $(V' \times W)$. On pose
$\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \circ \Phi$, $\bar{H}_1 = H_1 \circ \hat{\Phi}$, $\bar{L} = L \circ \Phi$ respectivement. On a bien sûr

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x,a) \quad &= H_1(x, a, s(x)) = \bar{H}_1(\bar{x}, \bar{a}, s(\bar{x})) \\ &= \bar{a}^\alpha \bar{A}_\alpha\{F(\bar{x})\} - L \circ \Phi(\bar{x}, \bar{a}) = \bar{\mathcal{H}}(\bar{x}, \bar{a}) \end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n, \bar{a}^1, \cdots, \bar{a}^p)$, on a :

$$\gamma : t \to (t, 0, \cdots, 0)$$

$$s(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{a}}(\bar{x}, 1, 0 \cdots, 0)$$

$$\bar{\mathcal{H}}_{|\Sigma}(\bar{x}, s(\bar{x})) = \bar{H}_1(\bar{x}, 1, 0, \cdots, 0, s(\bar{x})) = \bar{\mathcal{H}}(\bar{x}, 1, 0 \cdots, 0) = C$$

Comme $\dot{\gamma} = X(\gamma)$, il existe un voisinage relativement compact V" de $\gamma([a,b])$ dans V' et une boule B centrée en 1 dans $I\!R^p$ de rayon $\rho < 1$ telle que $V" \times B \subset D^+$ et $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ appartienne à $V" \times B \subset D^+$ pour tout $t \in [a,b]$.

Considérons $t_1, t_2 \in]a,b[$, avec $t_1 < t_2$ et soit $c : [t_1, t_2] \to V"$ un chemin horizontal ayant les propriétés suivantes :

$$c(t_1) = \gamma(t_1) = (t_1, 0 \cdots, 0) \text{ et } c(t_2) = \gamma(t_2) = (t_2, 0 \cdots, 0)$$

avec $(c(t), \dot{c}(t)) \in V" \times B$ pour $t \in [t_1, t_2]$.
On écrit $c(t) = (c^1(t), \cdots, c^p(t))$ et $\dot{c} = b_\alpha \bar{A}_\alpha$ (presque partout). On a bien sûr

$$c^1(t) = t_1 + \int_{t_1}^{t} b^1(s)ds \text{ et } b^1 > 0 \text{ (presque partout).}$$

L'application c^1 est donc un homéomorphisme absolument continu de $[t_1, t_2]$ dans lui-même, l'application

$$\tau : t \to t_1 + \int_{t_1}^{t} 1/b^1(s)ds$$

est l'homéomorphisme absolument continu réciproque de c^1.
Si on considère la reparamétrisation $\tilde{c}^1(t) = c \circ \tau$, on aura $\dot{\tilde{c}}^1 = 1$.
On peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathcal{H}}(c(t), b^1(t), \cdots, b^p(t)) - \bar{\mathcal{H}}(c(t), 1, 0 \cdots, 0) \\
&= \bar{\mathcal{H}}(c(t), b^1(t), \cdots, b^p(t)) - \bar{\mathcal{H}}(c(t), b^1(t), 0, \cdots, 0) \\
&+ \bar{\mathcal{H}}(c(t), b^1(t), 0, \cdots, 0) - \bar{\mathcal{H}}(c(t), 1, 0, \cdots, 0).
\end{aligned}$$

On a d'une part :

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} [\bar{\mathcal{H}}(c(s), b_1(t), 0 \cdots, 0) - \bar{\mathcal{H}}(c(t), 1, 0, \cdots, 0)]ds \\
&= \int_{t_1}^{t_2} [\bar{\mathcal{H}}(c \circ (u), 1, 0 \cdots, 0) \frac{1}{b^1(u)} du - C(t_2 - t_1) \\
&= C \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{b^1(u)} du - C(t_2 - t_1) = 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathcal{H}}(c(t), b^1(t), 0, \cdots, 0) - \bar{\mathcal{H}}(c(t), 1, 0, \cdots, 0) \\
&= \bar{\mathcal{S}}(\dot{c} - \dot{c}^1 X, \dot{c} - \dot{c}_1 X) + [\sum_{\alpha=2}^{p} (\dot{c}^\alpha)^2] \varepsilon(t) \\
&= [\sum_{\alpha=2}^{p} (\dot{c}^\alpha)^2][-1 + \varepsilon(t)] < [\sum_{\alpha=2}^{p} (\dot{c}^\alpha)^2](-1 + \rho] < 0.
\end{aligned}$$

Le même argument que dans le cas riemannien permet de conclure.

Références

[BU] I. Bucataru : *Metric nonlinear* connections. Diff. Geometry and its Applications 25, 335-343,(2007).

[BM] I. Bucataru, R. Miron : *Non linear connections for non conservative mechanical systems*, Reports on Mathematical Physics, No.2, Vol. 59, (2007).

[CLM] F. Cantrijn, M. De León, D. Martï¿½n De Diego : *On almost-Poisson structures in nonholonomic mechanics.* Nonlinearity, 12, 721-737,(1999).

[CLMM] J. Cortés, M. De León, J-C. Marrero, E. Martìnez : *Nonholonomic Lagrangian systems on Lie Agebroids*, Discete and Continuous Dynamical Systems-Serie A 24(2) 213-271 ,(2009)

[F] F. Farah : *Etude des courbes extrémales et optimales d'un Lagangien régulier sur une distribution,* Thèse Université de Savoie,(2009).

[GMM] X. Gràcia, J. Marìn-Solano, M. C. Muñoz-Lecanda, : *Some geometric aspects of variational calculus in constrained systems*, Rep. Math. Phys., 51(1) :127148, (2003).

[GU] J. Grabowski, P. Urbanski, *Lie algebroid and Poisson-Nijenhuis structures,* Rep. Math. Phys. 40, 195-208, (1997).

[GM] J. Grifone, M. Mehdi : *On the geometry of Lagrangian mechanics with non-holonomic constraints.* Journal of Geometry and Physics 30, 187-203, (1999).

[Go] C. Godbillon, Géométrie différentiable et mécanique analytique, Hermann, Paris 1969.

[Gr] J. Grifone : *Structure presque-tangente et connexions I* , Ann. Inst. Fourier, XXII (1), 287-334, (1972).

[LS] W. Liu, H-J. Sussmann : *Abnormal sub-Riemanniann,* MinimizersTrans. Amer. Math. Soc., (1992).

[PV] F. Pelletier, L. Valère : *Abnormality of trajectory in sub-Riemannian structure.* Workshop Geometry in nonlinear control and differential inclusions, Banach Center Publ Vol. 32, 301-317, Warszawa (1995)

[PBG] L-S. Pontryagin, . V-G. Boltyanskii, R-V. Gamkrelidze, E-F. Mishchenko : *The Mathematical Theory of Optimal Processes,* (1965).

[PP1] M. Popescu, F. Pelletier : *Necessary optimality conditions with application in sub-pseudo-Riemannian geometry,* Rev. Roum. Math. Pures Appl. 47, No. 1, 81-98, (2002).

[PP2] M. Popescu, F. Pelletier : *Optimal curves for an affine distribution,* Bull. Sci. Math. 129, No. 9, 701-725, (2005).

[Po] L. Popescu : *Poisson structures on Lie Algebroids* . Publ. Math. Debrecen 72, 1-2, 95-109. (2008).

[PoPo] M. Popescu, P. Popescu : *Geometric objects defined by almost Lies structure,* Workshop on Lie Algebroids and related topics in Differential Geometry. Banach Center Publications, Vol 54,217-233, (2001).

[S] H-J. Sussmann : *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. , vol 80, 171-188, (1973).

Received : 23.01.2010
Revised : 17.06.2010
Accepted : 23.06.2010

Laboratoire de mathématiques,
Université de Savoie,
Campus scientifiques 73 376
Le Bourget du Lac Cedex,