GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ

ANUL XXV(CIV) **Nr. 3 / 2007**

Metoda funcţiilor generatoare (II)

DE LIVIU I. NICOLAESCU

(*urmare din numărul 2/2007*)

Abstract

We survey, from a modern point of view, but relying only on high-school mathematics, some classical applications of the very versatile method of generating functions.

Key words: generating functions, finite difference equations, recurrence relations, *Stirling*, *Catalan* and *Bernoulli* numbers, *Lagrange* inversion formula, translation invariant differential operators, *Bernoulli* and *Laguerre* polynomials, *Euler-MacLaurin* formula

M.S.C.: 05A15, 11B73, 13F25, 13J05, 30B10

5. Şiruri de polinoame

În această secţiune iniţiem descrierea unui formalism modern care se ascunde în spatele multor probleme din combinatorică. Într-o formă sau alta, aceste trucuri erau cunoscute marilor clasici precum *Euler*, *Lagrange*, *Gauss*, *Cauchy*. În cele ce urmează vom conveni că gradul polinomului trivial $p = 0$ este $-\infty$.

Definiţia 5.1. (a) *Un şir bazic de polinoame este un şir de polinoame $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, $n \geq 0$ cu proprietatea că*

$$\mathrm{grad} p_n(x) = n,$$

pentru orice $n \geq 0$. Şirul bazic se numeşte normalizat dacă $p_0(x) = 1$, $p_n(0) = 0$, pentru orice $n \geq 1$.

(b) *Un şir binomial este un şir bazic normalizat $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ cu proprietatea că*

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y), \tag{5.1}$$

pentru orice $n \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) *Dat fiind un şir bazic* $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$, *definim funcţia lui generatoare prin*

$$P_x(t) := \mathbf{Fg}_{exp}(p_n(x);t) = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n(x)t^n}{n!}.$$

Această serie poate fi gândită în două moduri: fie ca o serie de puteri ai cărui coeficieţi sunt polinoame, fie ca o familie de serii de puteri parametrizată de variabila x.

Exemplul 5.2. (a) Formula binomului lui Newton ne spune că şirul de polinoame $1, x, x^2, \dots$ este un şir binomial. Funcţia lui generatoare este

$$1 + \frac{1}{1!}xt + \frac{1}{2!}(xt)^2 + \dots = \mathrm{e}^{tx}.$$

(b) Să presupunem că $g(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ este o serie f-inversabilă,

$$g(t) = g_1 t + g_2 t^2 + \dots, \quad g_1 \neq 0.$$

Pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat, formăm seria formală

$$G_x(t) := \mathrm{e}^{xg(t)}.$$

Atunci $G_x(t)$ admite o dezvoltare de forma

$$G_x(t) = p_0(x) + \frac{p_1(x)}{1!}t + \frac{p_2(x)}{2!}t^2 + \dots,$$

unde $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este un şir bazic normalizat.

Să observăm că

$$G_x(t)G_y(t) = \mathrm{e}^{(x+y)t} = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n(x+y)}{n!}t^n.$$

Pe de altă parte,

$$G_x(t)G_y(t) = \Big(\sum_{k\geq 0} \frac{p_k(x)}{k!}t^k\Big) \cdot \Big(\sum_{j\geq 0} \frac{p_j(y)}{j!}t^j\Big) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_{n-k}(y}{k!(n-k)!}\right) t^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k+j=n} \binom{n}{k} p_k(x)p_{n-k}(y)\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Rezultă că şirul de polinoame $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este un şir binomial. Să observăm că situaţia (b) conţine ca un caz special situaţia (a). Pentru a vedea acest lucru considerăm seria

$$M_x(t) = \sum_{n\geq 0} x^n \frac{t^n}{n!} = \mathrm{e}^{xt}.$$

Rezultă că dacă alegem $g(t)$ de forma cea mai simplă posibilă, $g(t) = t$, obţinem şirul binomial fundamental $\{x^n\}_{n\geq 0}$.

(c) Pentru orice $n \geq 1$, definim

$$[x]_n := x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

Pentru uniformitate, definim $[x]_0 = 1$. Să observăm că şirul $\{[x]_n\}_{n\geq 0}$ este un şir bazic normalizat. Vom arăta prin două metode diferite că şirul $\{[x]_n\}_{n\geq 0}$ este un şir binomial.

Prima metodă este prin inducţie. Trebuie să demonstrăm identitatea

$$[x+y]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}[y]_k,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Dacă fixăm x arbitrar, este suficient să demonstrăm că această identitate este valabilă pentru orice y *întreg nenegativ*. Vom arăta prin *inducţie după* y că identitatea de mai sus este valabilă pentru orice n.

Când $y = 0$ afirmaţia este trivială. Pentru pasul inductiv să observăm că pentru orice număr real z are loc identitatea

$$[z+1]_n - [z]_n = n[z]_{n-1},$$

pentru orice $n \geq 1$. Prin urmare,

$$[x+(y+1)]_n = [x+y]_n + n[x+y]_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}[y]_k + n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} [x]_{n-k}[y]_{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}[y]_k + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} [x]_{n-k}[y]_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}\big([y]_k + k[y]_{k-1} \big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k}[y+1]_k.$$

Cealaltă metodă de demonstraţie foloseşte funcţia generatoare a acestui şir, anume

$$S_x(t) = \sum_{n\geq 0} [x]_n \frac{t^n}{n!}.$$

Conform Exerciţiului (1.10), pentru x fixat, seria $S_x(t)$ este convergentă când $|t| < 1$, iar suma ei este funcţia $t \mapsto (1+t)^x$. Dacă scriem

$$(1+t)^x = \mathrm{e}^{x \log(1+t)},$$

observăm că ne aflăm exact în situaţia descrisă în exemplul (b), unde

$$g(t) = \log(1+t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots.$$

Aceasta arată din nou că şirul $\{[x]_n\}_{n\geq 0}$ este binomial.

Exemplul 5.2.(b) ne arată că dacă $\mathbf{Fg}_{exp}(p_n(x);t)$ are forma

$$P_x(t) = \mathrm{e}^{xs(t)}, \quad s(t) \in \mathbb{R}[[t]], \quad s(t) = O(1), \quad [t^1]s(t) \neq 0,$$

atunci şirul $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este binomial. În cele ce urmează, dorim să producem alte criterii de recunoaştere ale şirurilor binomiale.

Definiţia 5.3. (a) *Un operator admisibil este o aplicaţie*

$$L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad \mathbb{R}[x] \ni p \mapsto Lp$$

care satisface următoarele condiţii:

• *L este liniar, adică,*

$$L(\lambda p + \mu q) = \lambda Lp + \mu Lq,$$

pentru orice $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}[x]$.

• *pentru orice* $p \in \mathbb{R}[x]$,

$$\mathrm{grad} Lp \leq \mathrm{grad} p.$$

(b) *Un operator diferenţial este un operator admisibil L care satisface condiţiile*

$$L1 = 0 \;\; \text{şi} \;\; \mathrm{grad} Lp = \mathrm{grad} p - 1,$$

pentru orice $p \in \mathbb{R}[x]$, $\mathrm{grad} p > 0$.

Vom nota cu **Op** *mulţimea operatorilor admisibili şi cu* **DiffOp** *mulţimea operatorilor diferenţiali.*

Compunerea a doi operatori admisibili S, T este un operator admisibil $S \circ T$. Pentru a simplifica notaţia, vom scrie ST în loc de $S \circ T$. De asemenea, vom folosi notaţia

$$S^k := \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{k \text{ ori}}.$$

Definim

$$\mathbf{Op}^* := \big\{ T \in \mathbf{Op}^* : \;\; \mathrm{grad} Tp = \mathrm{grad} p, \;\; \forall p \in \mathbb{R}[x] \big\}.$$

Exemplul 5.4. (a) Operatorul

$$D_x : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad D_x p = \frac{dp}{dx}$$

este un operator diferenţial.

(b) Operatorul

$$\Delta : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad (\Delta p)(x) = p(x+1) - p(x)$$

este operator diferenţial.

(c) Pentru un număr real h, definim $E_h : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, prin egalitatea

$$(E_h p)(x) = p(x+h).$$

E_h este un operator admisibil numit *operatorul de translaţie cu h*. Să observăm că

$$\Delta = E_1 - \mathbf{1},$$

unde $\mathbf{1}$ este aplicaţia identică $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$.

(d) *Operatorul lui Bernoulli*

$$B : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad p \mapsto \int_x^{x+1} p(t)dt$$

este un operator admisibil care păstrează gradul, adică $B \in \mathbf{Op}^*$.

(e) Dat fiind un operator diferenţial $\mathbb{L}$, şi o serie formală de puteri

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n,$$

putem forma operatorul admisibil

$$u(\mathbb{L}) = \sum_{n \geq 0} u_n \mathbb{L}^n,$$

a cărui acţiune pe un polinom p este dată de

$$u(\mathbb{L})p = u_0 p + u_1 \mathbb{L} p + \cdots + u_n \mathbb{L}^n p + \cdots .$$

Să observam că *suma de mai sus este finită*, pentru că $\mathbb{L}^n p = 0$, pentru orice $n > \mathrm{grad} p$. De exemplu, are loc egalitatea

$$E_h = e^{hD_x}. \tag{5.2}$$

Pentru a vedea acest lucru, folosim formula lui Taylor care spune că

$$(E_h p)(x) = p(x+h) = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} p^{(n)}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} (D_x^n p)(x) = \Big(\sum_{n \geq 0} \frac{h^n}{n!} D_x^n \Big) p(x).$$

În particular, rezultă că

$$\Delta = e^{D_x} - \mathbf{1}. \tag{5.3}$$

Exerciţiul 5.5. Arătaţi că dacă $L \in \mathbf{DiffOp}$, iar $u, v \in \mathbb{R}[[t]]$, atunci

$$u(L)v(L) = (u \cdot v)(L) \text{ şi } u(L) = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$$

Propoziţia 5.6. *Orice operator $\mathbb{T} \in \mathbf{Op}^*$ este inversabil, iar inversul lui este un operator admisibil, care păstrează gradul.*

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că $\mathbb{T}$ este injectiv.

Într-adevăr, dacă

$$\mathbb{T}p = \mathbb{T}q,$$

atunci

$$\mathbb{T}(p - q) = 0,$$

de unde

$$\mathrm{grad}(p-q) = \mathrm{grad} 0 = -\infty,$$

deci

$$p - q = 0.$$

Să notăm cu $\mathbb{R}[x]_n$ mulţimea polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n. Este clar că

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$$

şi vom arăta că aplicaţia $\mathbb{T} : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ este surjectivă.

Considerăm matricea $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le n}$, definită de egalităţile

$$\mathbb{T}x^j = \sum_{i=0}^{n} a_{ij} x^i, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Să observăm că dacă

$$q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x,$$

atunci

$$\mathbb{T}q = p_0 + \cdots + p_n x^n,$$

unde

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Privim egalitatea (5.4) ca pe un sistem liniar, în care necunoscutele sunt coeficienţii q_i. A rezolva ecuaţia

$$\mathbb{T}q = p, \quad p \in \mathbb{R}[x]_n,$$

în care necunoscuta este polinomul $q \in \mathbb{R}[x]_n$, revine la a rezolva sistemul liniar (5.4). Deoarece $\mathbb{T}$ este injectiv, deducem că sistemul de mai sus, în care $p_j = 0$, are doar soluţia trivială $q_i = 0$. Rezultă că $\det A \neq 0$, adică matricea A este inversabilă.

Prin urmare, pentru orice polinom $p \in \mathbb{R}[x]_n$ există un singur polinom $q \in \mathbb{R}[x]_n$, astfel încât

$$\mathbb{T}q = p.$$

Exemplul 5.7. (a) Operatorul de translaţie E_h păstrează gradul, $E_h \in \mathbf{Op}^*$ şi, prin urmare, este bijectiv. Inversul lui este operatorul E_{-h}.

(b) Operatorul lui *Bernoulli* păstrează gradul şi prin urmare este inversabil.

Să observăm că $D_x B = \Delta$ şi deci putem scrie *formal*

$$B = \Delta D^{-1}.$$

Egalitatea de mai sus ar trebui pusă între ghilimele fiindcă operatorul de derivare D nu este inversabil.

Să presupunem că $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este un şir bazic. Acestui şir îi asociem o aplicaţie $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\{p_n\}} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, descrisă astfel:

$$\mathcal{R}\big(\, a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \,\big) = a_0 p_0 + a_1 p_1(x) + \ldots + a_n p_n(x).$$

Este evident că $\mathcal{R}$ este un operator admisibil.

Îl vom numi *reperul* asociat şirului bazic $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$.

Să observăm că

$$\mathcal{R}(x^n) = p_n(x),$$

pentru orice $n \geq 0$ şi, prin urmare,

$$\mathrm{grad}\mathcal{R}q = \mathrm{grad}q, \tag{5.5}$$

pentru orice $q \in \mathbb{R}[x]$, $q \neq 0$.

Rezultă că $\mathcal{R} \in \mathbf{Op}^*$.

Folosind Propoziţia (5.6) deducem următorul rezultat:

Corolarul 5.8. *Reperul $\mathcal{R}$ asociat unui şir basic $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este bijectiv, iar inversul lui este un operator admisibil $\mathcal{R}^{-1}$, care satisface condiţiile*

$$\mathcal{R}^{-1} p_n = x^n,$$

pentru orice $n \geq 0$ şi

$$\mathrm{grad}\mathcal{R}^{-1}q = \mathrm{grad}q, \tag{5.6}$$

pentru orice $q \in \mathbb{R}[x]$.

Corolarul 5.9. *Fie $\{p_n\}_{n\geq 0}$ un şir bazic. Orice polinom q de grad n se descompune unic sub forma*

$$q(x) = q_0 p_0(x) + q_1 p_1(x) + \ldots + q_n p_n(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $q_0, \ldots, q_n$ sunt numere reale.

Demonstraţie. Polinomul $\mathcal{R}q(x)$ admite o descompunere unică de forma

$$\mathcal{R}q(x) = \sum_{k=0}^{n} q_k x^k.$$

Prin urmare

$$q(x) = \mathcal{R}^{-1}(\,\mathcal{R}q(x)\,) = \sum_{k=0}^{n} q_k(\mathcal{R}x^k) = \sum_{k=0}^{n} q_k p_k(x).$$

Să presupunem că $p = \{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ şi $q = \{q_n(x)\}_{n\geq 0}$ sunt două şiruri bazice cu repere $\mathcal{R}_p$ şi respectiv $\mathcal{R}_q$. Atunci avem un operator liniar

$$\mathcal{T}_{q/p} : \mathcal{R}[x] \to \mathcal{R}[x], \;\; \mathcal{T}_{p/q} := \mathcal{R}_p \mathcal{R}_q^{-1}.$$

Să observăm că

$$\mathcal{T}_{q/p} p_n = \mathcal{R}_q((\mathcal{R}_p^{-1} p_n) = \mathcal{R}_q(x^n) = q_n.$$

Vom spune că $\mathcal{T}_{q/p}$ este operatorul de tranziţie de la p la q. Acestui operator îi asociem matricea infinită

$$A(q,p) = (a_{ij})_{0\leq i,j},$$

definită de egalităţile

$$q_j = \sum_{j=0}^{i} a_{ij} p_i.$$

Aceasta este o matrice triunghiulară superior, adică are forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{22} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Vom spune că $A(q,p)$ este *matricea tranziţiei* de la p la q. Această matrice este inversabilă, iar inversa ei este matricea tranziţiei de la q la p. Să observăm că operatorul reper asociat şirului $\{p_n\}_{n\geq 0}$ este exact operatorul de tranziţie de la şirul canonic $\{x^n\}_{n\geq 0}$ la şirul $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$.

Exemplul 5.10. (a) Să considerăm şirurile bazice $\left\{\, p_n(x) = (x-1)^n \,\right\}_{n\geq 0}$ şi $\left\{\, q_n(x) = x^n \,\right\}_{n\geq 0}$. Din formula binomului lui *Newton*, obţinem

$$x^n = \big(1 + (x-1)\big)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (x-1)^m$$

şi deducem că matricea tranziţiei de la p la q este dată de

$$A = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \cdots \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Recunoaştem mai sus triunghiul lui *Pascal*.

Un şir de numere reale se poate gândi ca o matrice infinită cu o sigură linie

$$X = [x_0, x_1 \cdots]$$

Prodususl $Y = XA$ este o matrice infinită cu o singură linie

$$Y = [y_0, y_1, \cdots],$$

unde

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k,$$

pentru orice $n \geq 0$.

Pentru a calcula matricea inversă a lui A folosim din nou formula lui *Newton*

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k$$

şi deducem că matricea inversă a lui A este

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & -\binom{3}{0} & \cdots \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \binom{3}{1} & \cdots \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & -\binom{3}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Rezultă că

$$X = (XA)A^{-1} = YB$$

şi deci

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k.$$

Rezultă de aici *formula de inversiune binomială* (comparaţi cu Exercitiul 3.5(b).)

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k,$$

pentru orice $n \geq 0$, ceea ce este echivalent cu

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k, \tag{5.7}$$

pentru orice $n \geq 0$.

Exerciţiul 5.11. Considerăm două şiruri de numere reale $\{x_n\}_{n\geq 0}$ şi $\{y_n\}_{n\geq 0}$. Formăm seriilor lor generatoare de tip exponenţial

$$x(t) = \sum_{n\geq 0} x_n \frac{t^n}{n!} \text{ şi } y(t) = \sum_{n\geq 0} y_n \frac{t^n}{n!}.$$

Arătaţi că

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k, \quad \forall n \geq 0 \Longleftrightarrow y(t) = \mathrm{e}^t x(t)$$

şi deduceţi de aici formula de inversiune binomială.

Definiţia 5.12. *Dat fiind un şir bazic* $\{\, p_n(x)\}_{n\geq 0}$ *cu reper* $\mathcal{R}$, *definim*

$$\mathbb{L} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \;\; \mathbb{L} := \mathcal{R} D_x \mathcal{R}^{-1}$$

şi îl vom numi operatorul fundamental al şirului $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$.

Propoziţia 5.13. *Fie un şir bazic normalizat* $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ *cu operator fundamental* $\mathbb{L}$. *Atunci au loc următoarele*:

(a) $\mathbb{L}$ *este un operator diferenţial care satisface*

$$\mathbb{L} p_n = n p_{n-1}, \tag{5.8}$$

pentru orice $n \geq 1$.

(b) *Dacă* L *este un operator diferenţial care satisface* (5.8), *atunci*

$$L = \mathbb{L}.$$

Demonstraţie. (a) Fie p un polinom de grad n. Atunci

$$\mathbb{L}(p) = \mathcal{R} D_x(\mathcal{R}^{-1} p).$$

Din (5.6) deducem că $\text{grad}\mathcal{R}^{-1}p = n$ şi, prin urmare,

$$\text{grad} D_x(\mathcal{R}^{-1}p) = n - 1.$$

Folosind (5.5), deducem că

$$\text{grad}\mathbb{L}p = \text{grad}\mathcal{R}D_x(\mathcal{R}^{-1}p) = (n-1),$$

relaţie care arată că $\mathbb{L}$ este operator diferenţial. Să observăm acum că

$$\mathbb{L}p_n = \mathcal{R}D_x(\mathcal{R}^{-1}p_n) = \mathcal{R}D_x)(x^n) = n\mathcal{R}x^{n-1} = np_{n-1}(x).$$

(b) Fie L un operator diferenţial care satisface (5.8). Definim $S = \mathcal{R}^{-1}L\mathcal{R}$. Atunci

$$Sx^n = \mathcal{R}^{-1}(Lp_n) = \mathcal{R}^{-1}(np_{n-1}) = nx^{n-1}.$$

Aceasta arată că

$$Sq = D_x q,$$

pentru orice $q \in \mathbb{R}[x]$. Cu alte cuvinte

$$\mathcal{R}^{-1}L\mathcal{R} = D_x,$$

de unde

$$L = \mathcal{R}D_x\mathcal{R}^{-1} = \mathbb{L}.$$

Exemplul 5.14. Operatorul fundamental al şirului $\{x^n\}_{n\geq 0}$ este operatorul obişnuit de derivare D_x. Deoarece

$$\Delta[x]_n = [x+1]_n - [x]_n = n[x]_{n-1},$$

deducem că operatorul fundamental al şirului $\{[x]_n\}_{n\geq 0}$ este Δ.

Propoziţia 5.15. *Orice operator diferenţial L este operatorul fundamental al unui unic şir bazic normalizat.*

Demonstraţie. Vom construi inductiv un astfel de şir. Unicitatea va rezulta imediat din metoda de construcţie. Vrem să construim un şir bazic normalizat $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$, astfel încât

$$Lp_n = np_{n-1},$$

oricare ar fi $n \geq 1$.

p_0 este unic determinat pentru că $p_0 = 1$.

Presupunem că am determinat $p_0, \dots, p_{n-1}$ şi dorim să-l găsim pe p_n. Observăm că $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ formează o bază a spaţiului $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ constând din polinoame de grad $\leq n-1$. Căutăm p_n sub forma

$$p_n(x) = ax^n + c_{n-1}p_{n-1}(x) + \ldots + c_1p_1(x) + c_0.$$

Deoarece dorim ca $p_n(0) = 0$ şi deja ştim că $p_k(0) = 0$, pentru $1 \leq k \leq n-1$, deducem că $c_0 = 0$. Polinomul $L(x^n)$ are gradul $n-1$ şi deci admite o descompunere de forma

$$L(x^n) = \ell_0 + \ell_1 p_1(x) + \cdots + \ell_{n-1}p_{n-1}(x),$$

unde $\ell_{n-1} \neq 0$.

Coeficienţii ℓ_i trebuiesc gândiţi ca fiind cunoscuţi, pentru că operatorul L este cunoscut. Dorim să determinam numărul a şi coeficenţii c_k în funcţie de numerele ℓ_i. Deducem că

$$np_{n-1}(x) = Lp_n(x) = aL(x^n) + \sum_{k=1}^{n-1} kc_k p_{k-1}(x) =$$

$$= a\ell_{n-1}p_{n-1}(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(a\ell_{k-1} + kc_k)p_{k-1}(x).$$

Rezultă

$$a = \frac{n}{\ell_{n-1}}, \quad c_k = -\frac{a\ell_{k-1}}{k} = -\frac{n\ell_{k-1}}{k\ell_{n-1}},$$

pentru orice $k = 1, \dots, n-1$.

Propoziţiile 5.13 şi 5.1.5 implică existenţa unei bijecţii

$$\text{operatori diferenţiali} \longleftrightarrow \text{şiruri bazice } \textit{normalizate}.$$

Această bijecţie va juca un rol fundamental în cele ce urmează.

Să considerăm un şir bazic *normalizat* $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ cu operatorul de referinţă $\mathcal{R}$ şi operator fundamental $\mathbb{L}$. Să observăm că

$$\mathbb{L}^k p_m = [m]_k p_{m-k},$$

pentru orice $0 < k \leq n$.

În particular, deducem că

$$(\mathbb{L}^k p_m)_{x=0} = \begin{cases} n!, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}.$$

Prin urmare

$$p_m(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(\mathbb{L}^k p_m)_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

Dacă înmulţim egalitatea de mai sus cu o constantă q_m şi apoi sumăm după $m = 0, \ldots, n$, obţinem

$$q_0 p_0(x) + \cdots + q_n p_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\big(\mathbb{L}^k (q_0 p_0(x) + \cdots + q_n p_n(x))\big)_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

Să notăm

$$q(x) := q_0 p_0(x) + \cdots + q_n p_n(x).$$

Deducem

$$\sum_{k \geq 0} q_k p_k(x) = q(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\big(\mathbb{L}^k q(x)\big)_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

Din Corolarul 5.9., găsim că

$$q_k = \frac{\big(\mathbb{L}^k q(x)\big)_{x=0}}{k!}.$$

Corolarul 5.16. *Fie $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ un şir bazic normalizat cu operatorul fundamental $\mathbb{L}$. Atunci, pentru orice polinom $q(x)$ de grad n, are loc descompunerea*

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(q) p_k(x), \quad A_k(q) := \frac{1}{k!}\big(\mathbb{L}^k q\big)_{x=0} p_k.$$

În particular, dacă $q = \{q_n(x)\}_{n \geq 0}$ este un şir bazic, atunci matricea de tranziţie de la p la q este descrisă de numerele

$$a_{kn} = A_k(q_n) = \frac{1}{k!}\big(\mathbb{L}^k q_n\big)_{x=0}.$$

Rezultatul de mai sus pune în evidenţă o aplicaţie $\mathcal{S} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, dată de

$$p(x) = p(0).$$

Această aplicaţie se numeşte *aplicaţia de specializare în* 0. Mai general, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, definim $\mathcal{S}_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, dată de

$$\mathcal{S}_a p := p(a),$$

pentru orice $p \in \mathbb{R}[x]$.

$\mathcal{S}_a$ se numeşte *aplicaţia de specializare în* a. Concluzia Corolarului 5.16 se poate rescrie sub forma

$$q(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\mathcal{S}(\mathbb{L}^k q)p_k(x), \tag{5.9}$$

pentru orice $q \in \mathbb{R}[x]$.

Remarca 5.17. Putem folosi ultima egalitate pentru a reformula construcţia şirul bazic normalizat $\{p_n\}_{n\geq 0}$ asociat unui operator diferenţial $\mathbb{L}$ descrisă în Propoziţia 5.15. Mai exact, avem

$$p_0 = 1$$

şi, folosind (5.9), deducem formula inductivă

$$\frac{1}{(n+1)!}\mathcal{S}\mathbb{L}^{n+1}(x^{n+1})p_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathcal{S}\mathbb{L}^k(x^{n+1})p_k(x).$$

Reamintim că expresiile $\mathcal{S}\mathbb{L}^k(x^k)$ sunt numere reale care se obţin calculând valoarea în $x = 0$ a polinomului $\mathbb{L}^k(x^{n+1})$ care are gradul $n + 1 - k$.

Exemplul 5.18 [Numerele *Stirling* de tipul 2]. Să considerăm şirul bazic normalizat $\{[x]_n\}_{n\geq 0}$. Atunci, pentru orice întreg nenegativ, are loc descompunerea

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{k,n}[x]_k,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Numerele

$$(S_{k,n}) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^k}{dx^k}[x]_n\right)_{x=0}$$

se numesc *numerele Stirling de tipul* 2. Matricea

$$S = (S_{k,n})_{0\leq k,n}$$

este matricea tranziţiei de la şirul bazic $\{[x]_n\}_{n\geq 0}$ la şirul bazic $\{x^n\}_{n\geq 0}$.

Numerele *Stirling* de tipul 2 sunt numere *întregi pozitive* care au o interpretare combinatorică foarte interesantă.

Să considerăm o mulţime finită N, de cardinal $|N| = n$, şi o mulţime finită R, de cardinal $|R| = r$. Notăm cu R^N mulţimea tuturor funcţiilor $f : N \to R$. După cum este bine cunoscut, $|R^N| = r^n$. Pentru orice submulţime $K \subseteq R$, notăm cu $\mathrm{Sur}(N, K)$ mulţimea *surjecţiilor* $N \to K$. Cardinalul mulţimii $\mathrm{Sur}(N, K)$ depinde doar de cardinalul n a lui N şi de cardinalul k a mulţimii K. Să notăm

$$c_{k,n} := |\mathrm{Sur}(N, K)|, \;\; n := |N|, \;\; k := |K|.$$

Vrem să arătăm că

$$c_{k,n} = k!S_{k,n}.$$

Într-adevăr, avem

$$r^n = |R^N| = \sum_{K\subseteq R} |\mathrm{Sur}(N, K)| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{K\subseteq R,\;\; k=|K|} c_{k,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} c_{k,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{[r]_k}{k!} c_{k,n}.$$

Prin urmare, au loc egalităţile

$$\sum_{k=0}^{n} S_{k,n}[r]_k = r^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_{k,n}}{k!}[r]_k,$$

pentru orice $n, r \in \mathbb{Z}$, $n, r \geq 1$.

De aici rezultă egalitatea

$$k! S_{k,n} = |\mathrm{Sur}(N, K)|,$$

unde $n = |N|$, $k = |K|$.

Acum putem oferi o interpretare combinatorică a numerelor $S_{k,n}$.

Să presupunem că avem n bile *diferite* şi vrem să le distribuim în k cutii *identice* astfel încât fiecare cutie conţine cel puţin o bilă. Afirmăm că numărul acestor distribuţii este exact $S_{k,n}$.

Etichetăm bilele cu numerele $\{1, 2, \ldots, n\}$ şi cutiile cu numerele $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Să observăm că fiecărei surjecţii

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$$

îi corespunde o distribuţie de bile cu proprietăţile dorite: bila i se duce în cutia $f(i)$.

Pe de altă parte, două surjecţii

$$f, g : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$$

conduc la aceeaşi distribuţie de bile dacă putem obţine g din f printr-o re-etichetare a cutiilor, adică dacă există o permutare

$$\lambda : \{1, 2 \ldots, k\} \to \{1, 2 \ldots, k\},$$

astfel încât, $g = \lambda \circ f$. Deoarece există $k!$ re-etichetări, deducem ca număr de distribuţii a n bile *distincte* în k cutii *identice* astfel încât nici o cutie să nu fie goală, este egal cu

$$\frac{1}{k!}|\mathrm{Sur}(N, K)| = S_{k,n}, \quad n = |N|, \quad k = |K|.$$

Exerciţiul 5.19. Folosind formula de inversiune binomială (5.7), arătaţi că numerele *Stirling* de tipul 2 satisfac egalitatea

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Exerciţiul 5.20. Să formăm seriile formale de puteri

$$S_k(t) = \sum_{n \geq k} \frac{S_{k,n}}{n!} t^n, \quad k \geq 1.$$

(a) Folosind definiţia combinatorică a numerelor *Stirling* de tipul 2 arătaţi că

$$S_{k,n} = k S_{k,n-1} + S_{k-1,n-1}$$

şi apoi deduceţi că

$$S_k(t) = \frac{1}{k!}(\mathrm{e}^t - 1),$$

pentru orice $k \geq 1$.

(b) Demonstraţi egalitatea de mai sus folosind funcţia generatoare a şirului binomial $\{[x]_n\}_{n\geq 0}$.

6. Operatori invarianţi la translaţii

În această secţiune vom investiga legătura strânsă dintre şirurile binomiale şi o clasă specială de operatori diferenţiali.

Definiţia 6.1. *Un operator admisibil $T \in \mathbf{Op}$ se numeşte invariant la translaţii dacă*

$$E_h T = T E_h,$$

pentru orice $h \in \mathbb{R}$, unde reamintim că E_h este operatorul de translaţie descris astfel:

$$(E_h p)(x) = p(x+h),$$

pentru orice $p \in \mathbb{R}[x]$.

Vom nota cu $\mathbf{Op}_{inv}$ mulţimea operatorilor admisibili invarianţi la translaţii, iar cu $\mathbf{DiffOp}_{inv}$ mulţimea operatorilor diferenţiali invarianţi la translaţii.

Să analizăm puţin condiţia de invarianţă la translaţii. Dacă $T \in \mathbf{Op}$, iar $p \in \mathbb{R}[x]]$, atunci pentru orice număr real h deducem din formula lui *Taylor* că

$$(E_h p)(x) = p(x+h) = \sum_{n\geq 0} \frac{h^n}{n!} D_x p(x),$$

şi prin urmare

$$(TE_h p)(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{h^n}{n!} T(D_x^n p)(x).$$

În mod asemănător deducem

$$(E_h T p)(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{h^n}{n!} D_x^n (Tp)(x).$$

Rezultă că T este invariant la translaţii dacă şi numai dacă

$$\sum_{n\geq 0} \frac{h^n}{n!} T(D_x^n p)(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{h^n}{n!} D_x^n (Tp)(x), \tag{6.1}$$

pentru orice $h \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}[x]$.

Din egalitatea de mai sus deducem că dacă operatorul T comută cu D_x, i.e., $TD_x = D_x T$, atunci T este invariant la translaţii.

Exemplul 6.2. Operatorii D_x şi Δ sunt operatori diferenţiali invarianţi la translaţii. Operatorul *Bernoulli* B este, de asemenea, un operator invariant la translaţii.

Exercițiul 6.3. (a) Arătați că dacă $S, T \in \mathbf{Op}_{inv}$, iar $c \in \mathbb{R}$, atunci $cS,\ S+T,\ \ ST \in \mathbf{Op}_{inv}$. Deduceți că mulțimea $\mathbf{Op}_{inv}$ cu operațiile de adunare și compunere este un inel cu unitate.

(b) Arătați că dacă $\mathbb{L} \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$, atunci, pentru orice serie formală $u(t) = u_0 + u_1 t + \ldots \in \mathbb{R}[[t]]$, operatorul admisibil $u(\mathbb{L})$ este invariant la translații. În particular, operatorii de forma $u(D_x)$ sunt invarianți la translații.

(c) Arătați că $T \in \mathbf{Op}$ este invariant la translații dacă și numai dacă T comută cu D. (Indicație: Folosiți identitatea $D_x p = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h}(E_h - \mathbf{1})p$, oricare ar fi $p \in \mathbb{R}[x]$.)

Următorul rezultat arată de ce suntem interesați în operatori invarianți la translații.

Teorema 6.4. *Să presupunem că $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este un șir bazic normalizat cu operator fundamental $\mathbb{L}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

(a) $\mathbb{L}$ *este invariant la translații.*

(b) $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ *este șir binomial.*

Demonstrație. (a) $\Longrightarrow$ (b). Avem

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y),$$

pentru orice $n \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Să observăm că

$$p_n(x+y) = (E_y p_n)(x).$$

Acum folosim identitatea (5.9) în care $q(x) = (E_y p_n)(x)$ și deducem

$$p_n(x+y) = (E_y p_n)(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \mathcal{S}(\mathbb{L}^k E_y p_n) p_k(x).$$

Deoarece $\mathbb{L}$ este invariant la translații, deducem că $\mathbb{L}^k E_y = E_y \mathbb{L}^k$ și, prin urmare,

$$p_n(x+y) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \mathcal{S}(E_y \mathbb{L}^k p_n) p_k(x).$$

Reamintindu-ne că $\mathbb{L}$ este operatorul fundamental al șirului $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$, deducem că

$$\mathbb{L}^k p_n = [n]_k p_{n-k}.$$

Pe de altă parte, pentru orice polinom p, are loc egalitatea

$$\mathcal{S}(E_y p) = \mathcal{S}_y p = p(y).$$

Deducem

$$p_n(x+y) = \sum_{k\geq 0} \frac{[n]_k}{k!} (\mathcal{S}_y p_{n-k}) p_k(x) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y).$$

(b) $\Longrightarrow$ (a). Știm deci că $\{p_n\}_{n\geq 0}$ este un șir binomial și trebuie să arătăm că pentru orice polinom q are loc egalitatea

$$E_y \mathbb{L} q = \mathbb{L} E_y q, \tag{6.2}$$

pentru orice $y \in \mathbb{R}$.

Deoarece orice polinom q se scrie ca o combinaţie liniară în polinoamele p_n,

$$q(x) = \sum_{n \geq 0} q_n p_n(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este suficient să verificăm egalitatea (6.2) doar în cazul special când $q(x)$ este egal cu unul din polinoamle bazice $p_n(x)$. În acest caz avem

$$(E_y \mathbb{L} p_n)(x) = n(E_y p_{n-1})(x) = n p_{n-1}(x+y) = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p_k(x) p_k(y).$$

Pe de altă parte,

$$(E_y p_n)(x) = p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y).$$

În egalitatea de mai sus y *este fixat*, iar numerele $p_{n-k}(y)$ trebuie gândite ca fiind constante. Deducem

$$(\mathbb{L} E_y p_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{n-k}(y) (\mathbb{L} p_k)(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p_{n-k}(y) p_{k-1}(x) =$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p_{k-1}(x) p_{n-k}(y) = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p_k(x) p_k(y) = (E_y \mathbb{L} p_n)(x).$$

Să presupunem că $\mathbb{L}$ este un operator diferenţial invariant la translaţii, iar $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ este şirul bazic asociat. Atunci $\{p_n\}_{n \geq 0}$ este şir binomial şi, prin urmare, satisface egalităţile

$$p_n(x+h) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_{n-k}(x) p_k(h) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (\mathbb{L}^k p_n)(x) p_k(h).$$

Dacă fixăm h, putem rescrie egalitatea de mai sus sub forma

$$E_h p_n = \sum_{k \geq 0} \frac{p_k(h)}{k!} \mathbb{L}^k p_n,$$

pentru orice $n \geq 0$.

Orice polinom p se scrie ca o combinaţie liniară *finită*

$$p = \sum_{n \geq 0} c_n p_n.$$

Deducem

$$E_h p = E_h \sum_{n \geq 0} c_n p_n = \sum_{n \geq 0} c_n E_h p_n = \sum_{n \geq 0} c_n \Big(\sum_{k \geq 0} \frac{p_k(h)}{k!} \mathbb{L}^k p_n \Big) =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{p_k(h)}{k!}\mathbb{L}^k\Big(\sum_{n\geq 0} c_n p_n\Big) = \sum_{k\geq 0}\frac{p_k(h)}{k!}\mathbb{L}^k p.$$

Am obţinut astfel următorul rezultat.

Propoziţia 6.5 [Formula lui Taylor generalizată]. *Să presupunem că $\mathbb{L}$ este un operator diferenţial invariant la translaţii, iar $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este şirul binomial asociat lui $\mathbb{L}$. Atunci are loc egalitatea*

$$E_h p = \sum_{k\geq 0} \frac{p_k(h)}{k!}\mathbb{L}^k p,$$

pentru orice $p \in \mathbb{R}[x]$.

Să presupunem că $L \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$. Exerciţiul 5.5 arată că operatorii de forma $u(L)$, $u \in \mathbb{R}[[t]]$, sunt operatori admisibili invarianţi la translaţii. Rezultatul care urmează va arăta că aceştia sunt *toţi* operatorii admisibili invarianţi la translaţii.

Teorema 6.6. *Fie $L \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$. Aplicaţia $\mathrm{Q}_L : \mathbb{R}[[t]] \to \mathbf{Op}_{inv}$, descrisă astfel:*

$$\mathbb{R}[[t]] \ni u \mapsto \mathrm{Q}_L u = u(L) \in \mathbf{Op}_{inv},$$

este un izomorfism de inele.

Demonstraţie. Exerciţiul 5.5 arată că Q_L este un *morfism injectiv* de inele. Vom arăta că este un morfism *surjectiv*. Reamintim că $\mathcal{S} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ este aplicaţia de specializare în 0, $\mathcal{S}p = p(0)$. Notăm cu $\{\ell_n(x)\}_{n\geq 0}$ şirul binomial asociat lui L.

Să presupunem că $U \in \mathbf{Op}_{inv}$. Formăm şirul de numere reale

$$u_n := \mathcal{S}U\ell_n = (U\ell_n)_{x=0}.$$

Notăm cu $u(t)$ funcţia generatoare de tip exponenţial a acestui şir, anume

$$u(t) := \mathbf{Fg}_{exp}(u_n; t) = \sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!}t^n.$$

Vom arăta că

$$U = \sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{n!}L^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(U\ell_n)_{x=0}}{n!}L^n. \tag{6.3}$$

Să notăm cu T operatorul din partea dreaptă a egalităţii de mai sus. Vom arăta că au loc egalităţile

$$(U\ell_n)_{x=h} = (T\ell_n)_{x=h},$$

pentru orice $n \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$.

Ultima egalitate se poate rescrie sub forma

$$\mathcal{S}E_h L\ell_n = \mathcal{S}E_h T\ell_n,$$

pentru orice $n \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$.

Din definiţia şirului u_n, deducem că egalitatea de mai sus are loc pentru $h = 0$, deoarece

$$L^m \ell_n = 0,$$

pentru orice $m \neq m$ şi

$$(L^n \ell_n)_{x=0} = n!.$$

Aceasta implică faptul că, pentru orice polinom p, avem

$$\mathcal{S}Up = \mathcal{S}Tp,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\mathcal{S}U = \mathcal{S}T.$$

Prin urmare, pentru orice număr real h, are loc egalitatea

$$\mathcal{S}UE_h = (\mathcal{S}U) \circ E_h = (\mathcal{S}T) \circ E_h = \mathcal{S}TE_h.$$

Deoarece U si T sunt invarianţi la translaţii deducem că $UE_h = E_hU$ şi $TE_h = E_h$.

Prin urmare,

$$\mathcal{S}E_hU = \mathcal{S}E_hT,$$

de unde

$$\mathcal{S}E_hU\ell_n = \mathcal{S}E_hU\ell_n,$$

pentru orice $n \geq 0$ şi pentru orice $h \in \mathbb{R}$.

Remarca 6.7. Morfismul Q_L se mai numeşte şi *morfismul de cuantizare*. Inversul lui se numeşte *morfismul simbol*. Pentru orice operator $T \in \mathbf{Op}_{inv}$, seria formală $\mathrm{Q}_L^{-1}(T)$ se numeşte *simbolul operatorului T relativ la L*. Vom folosi notaţia

$$\Sigma_{T/L}(t) := \mathrm{Q}_L^{-1}T.$$

Seria formală $\Sigma_{T/L}$ este *unic* determinată de condiţia $T = \Sigma_{T/L}(L)$.

Exerciţiul 6.8. Să presupunem că $P, Q \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$, $R \in \mathbf{Op}_{inv}$.

Arătaţi că

$$\Sigma_{R/Q} \circ \Sigma_{Q/B} = \Sigma_{R/P} \in \mathbb{R}[[t]], \text{ şi } \Sigma_{Q/P}(t) = \Sigma_{P/Q}^{\langle -1 \rangle}(t).$$

Reamintim ca ultima egalitate înseamnă că

$$\Sigma_{Q/P} \circ \Sigma_{P/Q}(t) = \Sigma_{P/Q}(t) \circ \Sigma_{Q/P} = t \in \mathbb{R}[[t]].$$

Definiţia 6.9. *Pentru orice $T \in \boldsymbol{Op}_{inv}$, definim $\sigma_T(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ prin egalitatea*

$$\sigma_T(t) := \Sigma_{T/D_x}(t),$$

unde D_x este operatorul obişnuit de diferenţiere.

Vom spune că $\sigma_T(t)$ este simbolul (complet) al operatorului T.

Exerciţiul 6.10. Arătaţi că pentru orice $S, T \in \mathbf{Op}_{inv}$ au loc egalităţile

$$\sigma_{S+T}(t) = \sigma_S(t) + \sigma_T(t),$$

şi

$$\sigma_{ST}(t) = \sigma_S(t) \cdot \sigma_T(t).$$

Exercițiul 6.11. (a) Să observăm mai întâi că $\sigma_{D_x}(t) = t$. Folosind egalitățile (5.2) și (5.3),

$$E_h = e^{hD_x} \text{ şi } \Delta = e^{D_x} - \mathbf{1},$$

deducem că

$$\sigma_{E_h}(t) = e^{ht} \text{ şi } \sigma_{\Delta}(t) = e^t - 1.$$

(b) Operatorul lui *Bernoulli* B, definit de

$$(Bp)(x) := \int_x^{x+1} p(s)ds,$$

satisface egalitatea

$$(D_x B)p(x) = p(x+1) - p(x) = (\Delta p)(x) \Longleftrightarrow D_x B = \Delta$$

şi, prin urmare,

$$\sigma_{D_x B} = \sigma_{\Delta} \Longrightarrow \sigma_B(t) = \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}.$$

Operatorul lui *Bernoulli* este inversabil, iar inversul lui are simbolul

$$\sigma_{B^{-1}}(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}.$$

Funcția $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t - 1}$ joacă un rol remarcabil în matematică pentru că este implicată în multe dintre cele mai profunde descoperiri de la *Newton* până în prezent.

(c) Definim

$$L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad Lp(x) = \int_0^{\infty} e^{-s} p(x+s)ds,$$

pentru orice $p \in \mathbb{R}[x]$.

Operatorul lui Laguerre $\mathrm{Lag} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ este definit de egalitatea

$$(\mathrm{Lag}p)(x) = -D_x Lp.$$

Să observăm că Lp este într-adevăr un polinom atunci când p este polinom. Pentru a vedea acest lucru este suficient să studiem cazurile particulare $p(x) = x^n$. În această situație deducem

$$(Lp)(x) = \int_0^{\infty} e^{-s}(x+s)^n ds = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \int_0^{\infty} e^s s^k ds.$$

Dacă notăm

$$I_k = \int_0^{\infty} e^{-s} s^k ds$$

deducem, integrând prin părţi,

$$I_k = -(e^{-s}s^k)\Big|_{s=0}^{s=\infty} + k\int_0^\infty e^{-s}s^{k-1} = kI_{k-1}.$$

Observând că $I_0 = 1$, deducem $I_k = k!$ şi, prin urmare,

$$L(x^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}k! = \sum_{k=0}^n [n]_k x^{n-k}.$$

În particular, deducem că $L \in \mathbf{Op}^*$ şi deci este inversabil. Este clar invariat la translaţii. Vrem să-i calculăm simbolul. Să observăm că

$$(D_xLp)(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\frac{dp}{\mathrm{d}x}(x+s)\mathrm{d}s = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\frac{dp}{ds}(x+s)\mathrm{d}s =$$

$$= \mathrm{e}^{-s}p(x+s)\Big|_{s=0}^{s=\infty} - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}p(x+s)\mathrm{d}s = -p(x) + L(x).$$

Putem rescrie concluzia calculului de mai sus sub forma

$$(D_xL)p = -\mathbf{1}p + Lp, \ \text{ pentru orice } \ p \in \mathbb{R}[x] \Leftrightarrow (D_x - \mathbf{1})L = -\mathbf{1}.$$

Dacă notăm $\ell(t) = \sigma_L(t)$, deducem

$$(t-1)\ell(t) = -1 \Longleftrightarrow \ell(t) = -\frac{1}{t-1}.$$

Din egalitatea $\mathrm{Lag} = -D_xL$ deducem că operatorul lui Laguerre este un operator diferenţial invariant la translaţii al cărui simbol este

$$\sigma_{\mathrm{Lag}}(t) = -\sigma_{D_x}(t)\ell(t) = \frac{t}{t-1}.$$

Putem rescrie ultima egalitate sub forma

$$\mathrm{Lag} = D_x(D_x - 1)^{-1}.$$

Să presupunem că $Q, R \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$. Notăm cu $\{q_n(x)\}_{n\geq 0}$ şirul binomial asociat lui Q şi cu $\{r_n(x)\}_{n\geq 0}$ şirul binomial asociat lui Q. Dorim să găsim o metodă convenabilă de exprimare a polinoamelor r_n în funcţie de polinoamele q_n şi operatorul Q.

Să notăm

$$f(t) := \Sigma_{R/Q}(t) \in \mathbb{R}[[t]]$$

şi

$$g(t) := \Sigma_{Q/R}(t) \in \mathbb{R}[[t]].$$

Prin urmare $R = f(Q)$, $Q = g(R)$ şi $g = f^{\langle -1 \rangle}$. Să considerăm operatorul $\mathcal{T}_{Q/R} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ de tranziţie de la şirul $\{r_n\}_{n\geq 0}$ la şirul $\{q_n\}_{n\geq 0}$, adică operatorul admisibil definit de egalităţile

$$\mathcal{T}_{Q/R} r_n = q_n,$$

pentru orice $n \geq 0$. $\mathcal{T}_{Q/R}$ este bijectiv, iar inversul lui este descris de

$$\mathcal{T}_{Q/R}^{-1} = \mathcal{T}_{R/Q} \Longleftrightarrow \mathcal{T}_{Q/R}^{-1} q_n = r_n,$$

pentru orice $n \geq 0$.

Are loc egalitatea

$$Q = \mathcal{T}_{Q/R} R \mathcal{T}_{Q/R}^{-1} = \mathcal{T}_{Q/R} R \mathcal{T}_{R/Q}.$$

Într-adevăr, pentru orice $n \geq 0$, avem

$$\mathcal{T}_{Q/R} R \mathcal{T}_{Q/R}^{-1} q_n = \mathcal{T}_{Q/R} R r_n = \mathcal{T}_{Q/R}(n r_{n-1}) = n \mathcal{T}_{Q/R} r_{n-1} = n q_{n-1} = Q q_n.$$

Să considerăm un alt operator $S \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$ al cărui şir biomial asociat este $\{s_n(s)\}_{n\geq 0}$. Notăm

$$p_n := \mathcal{T}_{Q/R} s_n,$$

pentru orice $n \geq 0$ şi definim

$$P = \mathcal{T}_{Q/R} S \mathcal{T}_{Q/R}^{-1}.$$

Teorema 6.12. (a) *Operatorul* $P = \mathcal{T}_{Q/R} S \mathcal{T}_{Q/R}^{-1}$ *este un operator diferenţial invariant la translaţii, iar* $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ *este şirul binomial asociat lui* P.

(b) *Definim*

$$h(t) := \Sigma_{S/R}(t),$$

adică

$$S = h(R).$$

Atunci

$$P = h(Q),$$

adică

$$\Sigma_{P/Q}(t) = \Sigma_{S/R}(t),$$

şi

$$\Sigma_{P/S}(t) = \Sigma_{S/R} \circ \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{S/R}^{\langle -1 \rangle}.$$

Concluzia (b) a teoremei de mai sus se poate ilustra în diagrama următoare

$$\begin{tikzcd}
\{r_n\} \arrow[r, "\mathcal{T}_{S/R}"] \arrow[d, "\mathcal{T}_{Q,R}"'] & \{s_n\} \arrow[d, "\mathcal{T}_{P/S}=\mathcal{T}_{Q,R}"] & & R \arrow[r, "\Sigma_{S/R}"] \arrow[d, "\Sigma_{Q/R}"] & S \arrow[d, dashed] \\
\{q_n\} \arrow[r, dashed] & \{p_n\} & \Longrightarrow & Q \arrow[r, "\Sigma_{P/Q}=\Sigma_{S/R}"'] & P
\end{tikzcd}$$

Demonstrație. Să notăm $p_{-1} = 0$. Pentru a aerisi prezentarea vom scrie $\mathcal{T}$ în loc de $\mathcal{T}_{Q/R}$. Împărțim demonstrația în trei pași.

Pasul 1. *Șirul $(p_n)_{n\geq 0}$ este un șir bazic asociat lui P, adică*

$$Pp_n = np_{n-1},$$

pentru orice $n \geq 0$.

Într-adevăr, au loc egalitățile

$$Pp_n = \mathcal{T}S\mathcal{T}^{-1}p_n = \mathcal{T}Ss_n = \mathcal{T}(ns_{n-1}) = n\mathcal{T}s_{n-1} = np_n.$$

Pasul 2. *Șirul p_n este normalizat.*

Să observăm că, prin definiție, șirurile $\{q_n\}_{n\geq 0}$, $\{r_n\}_{n\geq 0}$ și $\{s_n\}_{n\geq 0}$ sunt normalizate. Prin urmare

$$q_0 = r_0 = s_0 = 1.$$

Rezultă că

$$p_0 = \mathcal{T}s_0 = \mathcal{T}r_0 = q_0 = 1.$$

Fie $n \geq 1$. Atunci, conform Corolarului 5.9, polinomul q_n se descompune ca o combinație liniară

$$s_n(x) = c_0p_1(x) + c_1p_1(x) + \cdots + c_np_n(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Deoarece

$$q_n(0) = p_k(0) = 0,$$

pentru orice $k, n \geq 1$, deducem $c_0 = 0$. Prin urmare,

$$p_n = \mathbb{C}s_n = \mathcal{T}(c_1p_1 + \cdots + c_np_n) = c_1q_1 + \cdots + c_nq_n,$$

și deci

$$p_n(0) = 0,$$

pentru orice $n \geq 1$.

Aceasta arată că $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ este șirul bazic normalizat asociat lui P.

Pasul 3. $P = h(S)$. *În particular $P \in$ **DiffOp**$_{inv}$.*

Din egalitatea

$$Q = \mathcal{T}R\mathcal{T}^{-1},$$

deducem că, pentru orice $k \geq 1$, are loc egalitatea

$$\mathcal{T}R^k\mathcal{T}^{-1} = \underbrace{(\mathbb{C}R\mathbb{C}^{-1})\cdots(\mathbb{C}R\mathbb{C}^{-1})}_{k} = Q^k.$$

Rezultă că, pentru orice polinom $u(t) \in \mathbb{R}[t]$, are loc egalitatea

$$\mathbb{C}u(R)\mathbb{C}^{-1} = u(Q).$$

Să considerăm acum seria formală

$$h(t) = h_1t + h_2t^2 + \cdots .$$

Notăm

$$h_n(t) = h_1 t + \cdots + h_n t^n \in \mathbb{R}[t].$$

Atunci

$$\mathcal{T} h_n(R) \mathcal{T}^{-1} = h_n(Q).$$

Dacă $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ este un polinom de grad $\leq n$, atunci $Q^N q = 0 = R^N q$, pentru orice $N > n$. În particular, deoarece grad$p$ = grad$\mathbb{C}^{-1}p$, pentru orice $p \in \mathbb{R}[x]$, deducem că

$$h(Q)q = h_n(Q)q = \mathcal{T} h_n(R)(\mathcal{T}^{-1}p) = \mathcal{T} h(R)\mathcal{T}^{-1}q,$$

pentru orice $q \in \mathbb{R}[x]$, grad$p \leq n$.

Ultima egalitate se poate rescrie astfel:

$$h(Q) = \mathcal{T} h(R) \mathcal{T}^{-1}.$$

Reamintindu-ne că $h(R) = S$, deducem

$$h(Q) = \mathcal{T} S \mathcal{T}^{-1} = P.$$

Rezultă că

$$\Sigma_{P/Q}(t) = h(t) = \Sigma_{S/R}(t).$$

Folosind Exerciţiul 6.8, deducem

$$\Sigma_{P/S} = \Sigma_{P/Q} \circ \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{R/S} = \Sigma_{S/R} \circ \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{S/R}^{\langle -1 \rangle}.$$

Dacă aplicăm teorema de mai sus în cazul particular când $S = Q$, obţinem următorul rezultat:

Corolarul 6.13. *Să presupunem că* $R, Q \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$, $\{r_n(x)\}_{n \geq 0}$ *este şirul binomial asociat lui* R, *iar* $\{q_n\}_{n \geq 0}$ *este şirul binomial asociat lui* Q.

Să notăm $f(t) := \Sigma_{R/Q}(t)$, *adică* $R = f(Q)$.

Atunci şirul bazic $\{p_n(x) = \mathcal{T}_{Q/R} q_n\}_{n \geq 0}$ *este şirul binomial asociat operatorului*

$$P = f^{\langle -1 \rangle}(Q).$$

Demonstraţie. Din Teorema 6.12, deducem

$$\Sigma_{P/Q} = \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{Q/R} \circ \Sigma_{Q/R}^{-1} = \Sigma_{Q/R} = f^{\langle -1 \rangle}.$$

Folosind egalitatea (5.9) pentru şirul binomial $\{p_n(x)\}_{n \geq 0}$ din corolarul de mai sus, deducem că, pentru orice polinom $q \in \mathbb{R}[x]$, avem o descompunere de forma

$$q(x) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} (P^k q)_{x=0} p_k.$$

În particular, dacă alegem $q = q_n$, deducem

$$q_n = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} (P^k q_n)_{x=0} p_k$$

şi deci

$$r_n = \mathcal{T}_{Q/R}^{-1} q_n = \mathcal{T}_{R/Q}^{-1}\Big(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(P^k q_n)_{x=0} p_k\Big) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(P^k q_n)_{x=0}\mathcal{T}_{Q/R}^{-1} p_k =$$

$$= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(P^k q_n)_{x=0} q_k = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\big(\, f^{\langle -1\rangle}(Q)^k q_n\,\big)_{x=0} q_k.$$

Am obţinut astfel următorul rezultat fundamental.

Teorema 6.14. *Să presupunem că* $Q, R \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$.

Notăm cu $\{q_n(x)\}_{n\geq 0}$ *şirul bazic asociat lui* Q *şi cu* $\{r_n(x)\}_{n\geq 0}$ *şirul binomial asociat lui* R.

Dacă $f(t) = \Sigma_{R/Q}(t)$, *adică* $R = f(Q)$, *atunci*

$$r_n = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\big(\, f^{\langle -1\rangle}(Q)^k q_n\,\big)_{x=0} q_k,$$

pentru orice $n \geq 0$.

Remarca 6.15. (a) În teorema de mai sus să observăm că numărul real

$$\big(\, f^{\langle -1\rangle}(Q)^k q_n\,\big)_{x=0} q_k$$

este egal cu $n!$ înmulţit cu coeficientul lui t^n în seria $f^{\langle -1\rangle}(t)$, adică

$$\frac{1}{k!} f^{\langle -1\rangle}(Q)^k q_n = n![t]^n\big(\, f^{\langle -1\rangle}(t)\,\big)^k.$$

Dacă notăm $g(t) = f^{\langle -1\rangle}(t)$ deducem că matricea de tranziţie de la şirul $\{q_n(x)\}_{n\geq 0}$ la şirul $\{r_n(x)\}_{n\geq 0}$ este dată de

$$A_{kn} = \frac{n!}{k!}[t^n]g(t)^k.$$

Rezultă că

$$A_k(t) := \sum_{n\geq 0} A_{kn}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}g(t)^k.$$

Cu alte cuvinte, $A_k(t)$, funcţia generatoare de tip exponenţial a numerelor de pe linia k a matricei de tranziţie este egală cu seria formală $\dfrac{1}{k!}g(t)^k$.

(b) Să scriem $f(t)$ sub forma

$$\frac{t}{h(t)},\ \ h(t) = h_0 + h_1 t + \cdots \in \mathbb{R}[[t]],\ \ h_0 \neq 0.$$

Atunci, din formula de inversiune a lui *Lagrange*, deducem

$$[t]^n g(t)^k = \frac{k}{n}[t^{n-k}]h(t)^k,\ \ n, k \geq 0.$$

Rezultă

$$A_{kn} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!}[t^{n-k}]h(t)^k \Leftrightarrow \frac{1}{(n-1)!}A_{kn} =$$
$$= \frac{1}{(k-1)!}[t^{n-k}]h(t)^k = \frac{1}{(k-1)!}[t^n](th(t))^k.$$

Înmulţind ultima egalitate cu t^n şi apoi sumând după $n \geq 1$, deducem

$$\sum_{n\geq 1} A_{kn}\frac{t^n}{(n-1)!} = \frac{1}{(k-1)^n}t^k h(t)^k.$$

Putem rescrie acest lucru sub forma

$$tD_t A_k(t) = \frac{1}{(k-1)^n}t^k h(t)^k.$$

Dacă ne reamintim că $f(t) = \dfrac{t}{h(t)}$, deducem că $th(t) = \dfrac{t^2}{f(t)}$ şi, prin urmare,

$$t^{-k+1}D_t A_k(t) = \frac{1}{(k-1)!}\Big(\frac{t}{f(t)}\Big)^k.$$

În aplicaţii, un caz particular al Teoremei 6.14 este foarte util.

Corolarul 6.16. *Să presupunem că* $R \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$. *Notăm cu* $\{r_n(x)\}_{n\geq 0}$ *şirul binomial asociat lui* R *şi cu* $\sigma(t) \in \mathbb{R}[[t]]$ *simbolul lui* R, *adică*

$$R = \sigma(D_x).$$

Dacă notăm cu $\mu_n(x)$ *monomul* $\mu_n(x) = x^n$, *atunci*

$$r_n(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(\sigma^{\langle -1\rangle}(D_x)^k\mu_n)_{x=0}\mu_k(x).$$

Demonstraţie. În Teorema 6.14, alegem $Q = D_x$.
Atunci

$$Q_n(x) = x^n = \mu_n(x) \text{ şi } f(t) = \Sigma_{R/D_x}(t) = \sigma_R(t) = \sigma(t).$$

Corolarul 6.17. *Să presupunem că* $P \in \mathbf{DiffOp}_{inv}$, *iar* $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ *este şirul binomial asociat lui* P. *Dacă* $\sigma(t)$ *este simbolul lui* P, *adică* $P = \sigma(D_x)$, *iar* $g(t) = \sigma^{\langle -1\rangle}(t)$, *atunci*

$$\sum_{n\geq 0} p_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{xg(t)}.$$

Demonstraţie. Să notăm cu G operatorul

$$G = g(D_x) \in \mathbf{DiffOp}_{inv} \Longleftrightarrow \Sigma_{G/D_x}(t) = g(t).$$

Folosind Corolarul 6.16, deducem

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} G^k(x^n)_{x=0}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} G^k(x^n)_{x=0}\frac{x^k}{k!}.$$

Pentru $h \in \mathbb{R}$ considerăm operatorul

$$Q_h : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad Q_h p = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n(h)}{n!} D_x^n p.$$

Să observăm că Q_h este un operator admisibil invariant la translaţii al cărui simbol este

$$\Sigma_{Q_h/D_x}(t) = \sum_{n\geq 0} p_n(h)\frac{t^n}{n!}.$$

Pe de altă parte

$$Q_h = \sum_{n\geq 0} \frac{p_n(h)}{n!} D_x^n = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k\geq 0}^{n} G^k(x^n)_{x=0}\frac{h^k}{k!}\Big)\frac{1}{n!}D_x^n = \sum_{k\geq 0}\frac{h^k}{k!}\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{G^k(x^n)_{x=0}}{n!}D_x^n\Big).$$

Deoarece $\{x^n\}_{n\geq 0}$ este şirul binomial asociat lui D_x, deducem, din (6.3), că

$$G^k = \sum_{n\geq 0}\frac{G^k(x^n)_{x=0}}{n!}D_x^n.$$

Prin urmare,

$$Q_h = \sum_{k\geq 0}\frac{h^k}{k!}G^k = e^{hG} \Longrightarrow \Sigma_{Q_h/G}(t) = e^{ht}.$$

Folosind Exerciţiul 6.8, deducem

$$\sum_{n\geq 0} p_n(h)\frac{t^n}{n!} = \Sigma_{Q_h/D_x} = \Sigma_{Q_h/G} \circ \Sigma_{G/D_x}(t) = e^{hg(t)}.$$

7. Exemple

Să ilustrăm rezultatele obţinute pe câteva situaţii celebre.

Exerciţiul 7.1. [**Polinoamele lui Laguerre**]. Ca să vedem cum funcţionează Corolarul 6.16 îl aplicăm într-o situaţie concretă, dar cu multe aplicaţii în matematică.

Să presupunem că R este operatorul lui *Laguerre*

$$R = \mathrm{Lag} = D_x(D_x - 1)^{-1}.$$

Să notăm cu $\{\ell_n(x)\}_{n\geq 0}$ sirul binomial asociat operatorului lui *Laguerre.*

Dorim să dăm o descriere mai explicită a acestor polinoame folosind Corolarul 6.16.

Simbolul operatoratorului Lag este

$$s(t) = t(t-1)^{-1}.$$

Pentru a afla inversa compoziţională a seriei s rezolvăm ecuaţia

$$s = t(t-1)^{-1},$$

în care necunoscuta este t.

Ajungem la concluzia surprinzătoare

$$t = s(s-1)^{-1}.$$

Cu alte cuvinte

$$s^{\langle -1 \rangle}(t) = s(t).$$

Deducem

$$\ell_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (\mathrm{Lag}^k \mu_n)_{x=0} x^k$$

şi

$$\mu_n(x) = x^n.$$

Pentru a calcula $(\mathrm{Lag}\mu_n)_{x=0}$ putem folosi fie calculele din Exemplul 6.11, fie putem proceda direct, folosind formula

$$\mathrm{Lag} = -D(1-D)^{-1} \Longrightarrow \mathrm{Lag}^k = -D^k(1-D)^{-k} = (-1)^k D^k \sum_{j \geq 0} \binom{j+k-1}{j} D^j.$$

Coeficientul lui D^n în această serie este

$$(-1)^k \binom{n-1}{n-k} = (-1)^k \binom{n-1}{k-1}$$

şi deci

$$(\mathrm{Lag}^k \mu_n)_{x=0} = (-1)^k \binom{n-1}{k-1} (D^n \mu_n)_{x=0} = (-1)^k n! \binom{n-1}{k-1}.$$

Prin urmare

$$\ell_n(x) = n! \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n-1}{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Deoarece $\ell_n(0) = 0$, pentru orice $n > 0$, deducem că polinomul $\ell_{n+1}(x)$ se scrie ca un produs

$$\ell_{n+1}(x) = x L_n(x),$$

unde $\mathrm{grad} L_n = n$.

Mai exact

$$L_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

De exemplu

$$L_0(x) = 1, \;\; L_1(x) = (1-x), \;\; L_2(x) = (2-4x+x^2).$$

Polinoamele $L_n(x)$ au multe aplicaţii în matematică. Au apărut mai întâi în fizica matematică, dar în ultimile decenii şi-au făcut apariţia şi în combinatorică. Să meţionăm o astfel de aplicaţie surprinzătoare.

Probabil cititorul a auzit deja de problema deranjamentelor, dar pentru orice eventualitate o reamintim. Să presupunem că avem n bile, numerotate cu numerele $1, \dots, n$ şi n cutii numerotate cu numerele $1, \dots n$. Problema clasică a deranjamentelor întreabă în câte moduri putem distribui bilele, una pe cutie, încât niciuna din bile să nu fie situată într-o cutie cu acelaşi număr ca şi bila.

Răspunsul la acestă întrebare se găseşte prin metoda includerii-excluderi şi deducem că numărul de deranjamente este

$$D_n = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Putem considera o situaţie mult mai sofisticată. Să presupunem că avem o partiţie a mulţimii $\{1, \dots, n\}$ în k submulţimi nevide

$$\{1, \dots, n\} = F_1 \cup \cdots \cup F_k, \;\; F_i \cap F_j \neq \emptyset,$$

pentru orice $i \neq j$.

Notăm $f_i := |F_i|$. Notăm cu $D(f_1, \dots, f_k)$ numărul de permutări φ ale mulţimii $\{1, \dots, n\}$ cu proprietatea că nu există $i \in \{1, \dots, n\}$ încât i şi $\varphi(i)$ se afla în aceeaşi mulţime a partiţiei. Punem această problemă într-un mod mai amuzant.

Să presupunem că la o petrecere participă k familii $F_1, \dots, F_k$ şi în total sunt n persoane. Fiecare din persoane îşi scrie numele pe o bucată de hârtie pe care apoi o pune într-o cutie. Urmează o tragere la sorţi în care fiecare persoană extrage un nume din cutie. Atunci $D(f_1, \dots, f_k)$ este numărul de posibiltăţi de trageri la sorţi cu proprietatea că nici una dintre persoane nu a extras numele unei persoane din familia sa. Problema clasică a deranjamentelor corespunde cazului special când $k = n$, $f_i = 1$.

Un rezultat din 1976 datorat matematicienilor *S. Even* şi *J. Gillis* oferă un răspuns surprinzător, anume:

$$D(f_1, \dots, f_k) = (-1)^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} L_{f_1}(x) \cdots L_{f_k}(x) \mathrm{d}x.$$

Este uşor de verificat că într-adevăr

$$n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} (x-1)^n \mathrm{d}x.$$

Demostraţia cazului general este bazată tot pe principiul includerii-excluderii, dar necesită mai multă ingeniozitate pentru a formula rezultatul final într-o formă aşa de elegantă.

La foarte scurt timp după ce *Even* şi *Gillis* au demonstrat acest fapt, *D. M. Jackson* a dat o demonstraţie foarte scurtă bazat pe rezultatele din Exerciţiul 2.9. Cititorul are acum toate cunoştiinţele necesare demonstrării acestui rezultat curios.

Exerciţiul 7.2. Arătaţi că

$$\ell_n(x) = xe^x D_x^n(e^{-x}x^{n-1}),$$

pentru orice $n \geq 0$.

Exerciţiul 7.3. [Polinoame Bernoulli]. Polinoamele lui *Bernoulli* $\{\beta_n(x)\}_{n\geq 0}$ formează un şir bazic foarte special care nu este *normalizat*, dar al cărui operator fundamental este D_x, adică

$$D\beta_n(x) = n\beta_{n-1}(x), \tag{7.1}$$

pentru orice $n \geq 1$.

În plus, aceste polinoame satisfac ecuaţiile cu diferenţe

$$(\Delta\beta_n)(x) = D_x(x^n), \tag{7.2}$$

pentru orice $n \geq 1$.

Să arătăm ca aceste două condiţii de mai sus definesc unic şirul bazic $\{\beta_n(x)\}_{n\geq 0}$.

Să ne reamintim că operatorul lui *Bernoulli* B satisface

$$DB = BD = \Delta.$$

Aplicând operatorul B ambelor părţi ale egalităţii (7.1) obţinem

$$BD\beta_n = nB\beta_{n-1}.$$

Pe de altă parte, folosind (7.2), obţinem

$$BD\beta_n = \Delta\beta_n = nx^{n-1}$$

şi deducem

$$nx^{n-1} = nB\beta_{n-1},$$

pentru orice $n \geq 1$, ceea ce implică

$$\beta_n = B^{-1}(x^n),$$

pentru orice $n \geq 0$.

Să notăm

$$b_n := \beta_n(0).$$

Numerele b_n se numesc *numerele lui Bernoulli.*

Să observăm că

$$D_x^k\beta_n = [n]_k\beta_{n-k}.$$

Din formula lui *Taylor* deducem că, pentru orice $n \geq 1$, are loc egalitatea

$$\beta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (D_x^k \beta_n)(0) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} [n]_k \beta_{n-k}(0) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k. \tag{7.3}$$

Această egalitate ne arată ca polinoamle lui *Bernoulli* sunt unic determinate de numerele lui *Bernoulli*.

Să notăm cu $b(t)$ funcţia generatoare de tip exponenţial a numerelor lui *Bernoulli*, adică

$$b(t) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{t^n}{n!}.$$

Atunci egalitatea (7.3) se poate reformula compact sub forma

$$b(t) \mathrm{e}^{tx} = \sum_{n \geq 0} \beta_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{7.4}$$

Notăm seria din partea dreaptă cu $\beta_x(t)$. Să ne reamintim că

$$\beta_n(x+1) - \beta_n(x) = n x^{n-1},$$

pentru orice $n \geq 0$.

Prin urmare

$$\frac{t^n}{n!} (\beta_n(x+1) - \beta_n(x)) = t x^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

pentru orice $n \geq 1$.

Sumând aceste egalităţi după $n \geq 1$, deducem

$$\beta_{x+1}(t) - \beta_x(t) = t \mathrm{e}^{tx}.$$

Pe de altă parte, folosind (7.4), obţinem egalitatea

$$\beta_{x+1}(t) - \beta_x(t) = b(t) \big(\mathrm{e}^{t(x+1)} - \mathrm{e}^{tx} \big).$$

Prin urmare

$$t \mathrm{e}^{tx} = b(t) \big(e^{t(x+1)} - \mathrm{e}^{tx} \big) = \mathrm{e}^{tx} b(t) (\mathrm{e}^t - 1),$$

de unde

$$t = b(t)(\mathrm{e}^t - 1).$$

De aici rezultă

$$b(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}.$$

Trebuie să comentăm puţin ultima egalitate. Seria formală $\mathrm{e}^t - 1$ nu are invers multiplicativ. Să observăm însă că putem scrie

$$e^t - 1 = t(1 + \frac{t}{2!} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{n!} + \ldots) = t \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{(n+1)!}.$$

Seria $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(n+1)!}$ are invers multiplicativ şi atunci definim

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{1}{\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(n+1)!}}.$$

Pentru a face calcule concrete este însă mult mai util să folosim egalitatea

$$t = b(t)(e^t - 1),$$

care conduce la următoarele relaţii de recurenţă

$$b_0 = 1, \ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0,$$

pentru orice $n \geq 1$.

Mai explicit

$$\binom{n}{1} b_{n-1} + \binom{n}{2} b_{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} b_0 = 0,$$

de unde rezultă că

$$b_n = -\frac{1}{n}\left(\binom{n}{2} b_{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} b_0 \right),$$

pentru orice $n \geq 1$.

Iată câteva valori pentru numerele lui *Bernoulli*:

$$b_{2k+1} = 0, \text{ pentru orice } \quad k \geq 1,$$

n	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18
b_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3615}{510}$	$\frac{43867}{798}$

Iată şi câteva polinoame *Bernoulli*:

$$\beta_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$\beta_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$\beta_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$\beta_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}\,x^4 + \frac{5}{3}\,x^3 - \frac{1}{6}\,x,$$

$$\beta_6(x) = x^6 - 3\,x^5 + \frac{5}{2}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{42}.$$

Polinoamele *Bernoulli* apar în surpinzător de multe situaţii în matematică. Vrem să menţionam aici câteva aplicaţii elementare.

Din egalitatea

$$\beta_{k+1}(x+1) - \beta_{k+1}(x) = (k+1)x^k,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, deducem

$$\beta_k(n) - \beta_k(0) = (k+1)(1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k),$$

adică

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^k = \frac{1}{k+1}\big(\beta_{k+1}(n) - \beta_{k+1}(0)\big). \tag{7.5}$$

Mai general, are loc egalitatea

$$\sum_{j=0}^{n-1}(h+j)^k = \frac{1}{k+1}\big(\beta_{k+1}(h+n) - \beta_{k+1}(h),\big), \tag{7.6}$$

pentru orice $h \in \mathbb{R}$.

De exemplu

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + (n-1)^5 = \frac{1}{6}\left(n^6 - 3n^5 + \frac{5}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2\right),$$

pentru orice $n \geq 2$.

Exemplul de mai sus este un caz special al *formulei de sumare Euler-MacLaurin.*

Să presupunem că p este un polinom. Să notăm

$$q := Bp \Longleftrightarrow q(x) = \int_x^{x+1} p(t)\mathrm{d}t.$$

În particular,

$$q(x+j) = \int_{x+j}^{x+j+1} p(t)\mathrm{d}t.$$

Rezultă că

$$\sum_{j=0}^{n-1} q(x+j) = \int_0^n p(t)\mathrm{d}t.$$

Dacă acum scriem $p(x) = (B^{-1}q)(x)$, obţinem

$$\sum_{j=0}^{n-1} q(x+j) = \int_x^{x+j} (B^{-1}q)(t)\mathrm{d}t. \tag{7.7}$$

În fine, dacă polinomul q este derivata unui polinom f, adică $q = Df$ atunci $B^{-1}Df = DB^{-1}$ deoarece B^{-1} este invariant la translaţii şi deci comută cu D. Din formula *Leibniz-Newton*, obţinem celebra formulă de sumare *Euler-MacLaurin*:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} D_x f(x+j) &= \Big(\sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{k!}(D^k f)(x+n)\Big) - \Big(\sum_{k\geq 0} \frac{b_k}{k!}(D^k f)(x)\Big) = \\ &= (B^{-1}f)(x+n) - (B^{-1}f)(x).\end{aligned} \tag{7.8}$$

Probabil că ar trebui să explicăm de ce egalitatea de mai sus este uluitoare. Suma din partea stângă a egalităţii depinde de comportarea ***globală*** a polinomului f pe *întreg* intervalul $[x, x+n]$. Pe de altă parte, suma din partea dreaptă depinde doar de comportarea ***locală*** a lui f doar în ***vecinătatea a două puncte***, anume x şi $x+n$.

Exerciţiul 7.4. Să considerăm seria formală de puteri $u(t) = \sum_{n\geq 0} u_n \frac{t^n}{n!}$ cu proprietatea că $u_0 \neq 0$.

Notăm cu P operatorul $P = u(D) \in \mathbf{Op}^*_{inv}$ şi cu $p_n(x)$ polinoamele $P(x^n)$.

Arătaţi că

$$\sum_{n\geq 0} p_n(x)\frac{t^n}{n!} = u(t)\mathrm{e}^{tx}.$$

Exerciţiul 7.5. (a) Arătaţi că

$$\beta_n(x) = (-1)^n \beta_n(1-x),$$

pentru orice $n \geq 1$ şi orice $x \in \mathbb{R}$ şi

$$b_{2k+1} = 0,$$

pentru orice $k \geq 1$.

(b) Demonstraţi *formula lui Raabe*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \beta_k\big(\,x + \frac{j}{n}\,\big) = \frac{1}{n^k}\beta_k(nx),$$

pentru orice $k, n \geq 1$.

(c) Arătaţi că

$$\beta_k\left(\frac{1}{2}\right) = b_k\left(\frac{1}{2^{k-1}} - 1\right).$$

(d) Arătaţi că, pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, au loc inegalităţile

$$(-1)^k \beta_{2k-1}(x) > 0, \;\; (-1)^k\big(\,\beta_{2k}(x) - b_{2k}\,\big) > 0.$$

(e) Arătaţi că

$$(-1)^{k+1} b_{2k} > 0,$$

pentru orice $k \geq 0$.

Exerciţiul 7.6. Să definim funcţiile *Bernoulli* periodice

$$\bar{\beta}_n(x) = \beta_n(x - \lfloor x \rfloor),$$

unde $\lfloor x \rfloor$ este partea întregă a numărului real x.

Să presupunem că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie infinit diferenţiabilă.

(a) Arătaţi, prin inducţie după $n \geq 1$, că

$$f(0) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} = \frac{b_k}{k!}\Big(f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0) \Big) + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 \beta_n(t) f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

(b) Arătaţi că, pentru orice întregi pozitivi m, n, are loc egalitatea

$$\sum_{j=0}^{m-1} f(j) = \int_0^m f(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k!}\Big(f^{(k-1)}(m) - f^{(k-1)}(0) \Big) + \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^m \bar{\beta}_n(t) f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

Indicaţie: Folosiţi partea (a) pentru funcţiile $f_j(t) = f(t + j)$, unde $j = 0, \ldots, m-1$.

Exerciţiul 7.7. (a) Arătaţi că, pentru orice $k \geq 1$, are loc egalitatea

$$\int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(t)\mathrm{d}t = 0.$$

(b) Arătaţi că, pentru orice întregi $k, m \geq 1$, au loc egalităţile

$$\int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(t) \sin(2m\pi t)\mathrm{d}t = 0$$

şi

$$A_{k,m} := \int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(t) \cos(2\pi m t)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{(2\pi m)^{2k}}.$$

(c) Să considerăm funcţiile

$$f_m(t) = \sum_{j=1}^{m} A_{k,m} \cos 2\pi j t$$

şi

$$C_m(t) = \sum_{j=0}^{m} \cos(2\pi j t).$$

Arătaţi că

$$\int_0^1 C_m(t)\mathrm{d}t = 1$$

şi
$$b_{2k} = \bar{\beta}_{2k}(0) = \lim_{m\to\infty} f_m(0).$$

Indicaţie. Scrieţi diferenţa $b_{2k} - f_m(0)$ sub forma

$$b_{2k} - f_m(0) = \int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(0)\mathrm{d}t - \int_0^1 \bar{\beta}_{2k}(t) C_m(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 C_m(t)\big(\bar{\beta}_{2k}(0) - \bar{\beta}_{2k}(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Bibliografie

[1] $* * *$ *Enciclopedia electronică a şirurilor de numere întregi*, se poate consulta gratuit pe Internet la adresa
http://www.research.att.com/ njas/sequences/index.html?language=romanian.

[2] M. Aigner, *Combinatorial Analysis*, Springer-Verlag, 1979.

[3] G.M. Fihtenholţ, *Curs de Calcul Diferenţial şi Integral*, vol.II, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.

[4] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics. vol.I*, Cambridge University Press, 1986

[5] H. S. Wilf, *Generating functionology* (se poate consulta gratuit pe Internet la adresa http://www.math.upenn.edu/ wilf/DownldGF.html)

Department of Mathematics
University of Notre Dame
Notre Dame, IN 46556-4618.
e-mail: nicolaescu.1@nd.edu
http://www.nd.edu/ lnicolae/

Despre formula lui Taylor şi calculul unor limite

DE MARIAN TETIVA

Abstract

The aim of this article is the calculate some limits using *Taylor* series. Establishing the order of convergence of some sequences could be considered the starting point of this work. Some short presentation of function series and *Taylor* series is included.

Key words: *Taylor* formula, limits, *Taylor* series.

M.S.C.: 26A03, 26A06, 26A24.

1. Introducere. Să considerăm, pentru început, numerele reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_p$ (unde $p \geq 2$ este un număr natural) şi funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definită prin

$$h(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}, & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ \sqrt[p]{a_1 a_2 \ldots a_p}, & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

După cum se ştie, funcţia h este continuă pe $\mathbb{R}$, continuitatea în origine stabilindu-se prin calculul limitei „de tip 1^{∞}" $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}$, care este egală cu $\sqrt[p]{a_1a_2\ldots a_p}$, deci cu valoarea funcţiei în 0. Continuitatea pe $\mathbb{R}-\{0\}$ rezultă din faptul că funcţia se exprimă prin operaţii elementare cu funcţii elementare, şi în acelaşi fel ne dăm seama că ea este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0\}$; se pune în mod firesc problema: este funcţia h derivabilă în origine? Răspunsul la această întrebare este afirmativ şi arătăm acest lucru în continuare.

Deoarece funcţia este derivabilă în vecinătatea originii şi continuă în origine se poate utiliza corolarul teoremei lui *Lagrange*, conform căruia, dacă există şi este finită limita derivatei $\lim\limits_{x\to 0}h'(x)$, atunci funcţia este derivabilă în 0, având derivata în 0 egală cu această limită. Avem:

$$h'(x)=\frac{h(x)}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}\cdot$$

$$\cdot\frac{x\left(a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_p^x\ln a_p\right)-\left(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x\right)\ln\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p}}{x^2},$$

pentru orice $x\neq 0$. Se poate calcula limita primului raport din această expresie, pentru $x\to 0$ (anume, ea este $\dfrac{\sqrt[p]{a_1a_2\ldots a_p}}{p}$), iar pentru cea de-a doua fracţie folosim regula lui *l'Hospital* (ne aflăm în cazul $\dfrac{0}{0}$).

Derivata numărătorului este

$$\sum_{k=1}^{p}a_k^x\ln a_k+x\sum_{k=1}^{p}a_k^x\ln^2 a_k-\left(\sum_{k=1}^{p}a_k^x\ln a_k\right)\ln\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}a_k^x}{p}-\left(\sum_{k=1}^{p}a_k^x\right)\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}a_k^x\ln a_k}{\sum\limits_{k=1}^{p}a_k^x}=$$

$$=x\sum_{k=1}^{p}a_k^x\ln^2 a_k-\left(\sum_{k=1}^{p}a_k^x\ln a_k\right)\ln\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}a_k^x}{p}$$

şi, deoarece avem

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sum\limits_{k=1}^{p}a_k^x\ln^2 a_k-\left(\sum\limits_{k=1}^{p}a_k^x\ln a_k\right)\ln\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{p}a_k^x}{p}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}a_k^x\ln^2 a_k-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p}a_k^x\ln a_k\right)\ln\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}a_k^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\ln^2 a_k - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p}\ln a_k\right)\ln\sqrt[p]{a_1a_2...a_p} = \frac{p\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln^2 a_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln a_k\right)^2}{2p},$$

rezultă că aceasta este şi limita celui de al doilea raport din expresia derivatei $h'(x)$.

Atunci avem

$$h'(0) = \lim_{x\to 0} h'(x) = \frac{p\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln^2 a_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln a_k\right)^2}{2p^2}\sqrt[p]{a_1a_2...a_p}.$$

Să mai observăm că, dacă folosim definiţia derivatei, am obţinut relaţia

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{p} a_k^x}{p}\right)^{\frac{1}{x}} - \sqrt[p]{a_1a_2\dots a_p}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x} =$$

$$= h'(0) = \frac{p\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln^2 a_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln a_k\right)^2}{2p^2}\cdot\sqrt[p]{a_1a_2\dots a_p},$$

care conduce şi la

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\dots+\sqrt[n]{a_p}}{p}\right)^n - \sqrt[p]{a_1a_2\dots a_p}\right) = h'(0),$$

adică stabileşte ordinul de convergenţă al şirului cu termenul general

$$x_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\dots+\sqrt[n]{a_p}}{p}\right)^n = h\left(\frac{1}{n}\right)$$

(care are, la fel ca şi funcţia h în origine, limita $\sqrt[p]{a_1a_2...a_p}$).

După felul în care am calculat derivata funcţiei h se observă că aceasta este continuă (chiar şi în origine) şi, cum am arătat mai sus, h' este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0\}$ (h are derivate de orice ordin pe $\mathbb{R}-\{0\}$); întrebarea naturală care se pune acum este dacă funcţia h' este derivabilă în origine (deci dacă h este de două ori derivabilă în 0). Problema care se iveşte este, evident, aceea a calculelor care devin tot mai neplăcute (nici în prima fază nu au fost tocmai simple), de aceea se impune găsirea unei alte metode pentru investigarea derivabilităţii lui h' (şi, eventual, mai departe); remarcăm, totuşi, că datorită continuităţii derivatei întâi putem calcula $h''(0) = \lim\limits_{x\to 0} h''(x)$. Pentru a putea continua această discuţie să facem întâi o paranteză mai lungă, referitoare la formula pomenită în titlu precum şi alte chestiuni înrudite cu aceasta.

2. Formula lui Taylor se enunţă, de obicei, într-o formă asemănătoare cu cea care urmează (a se vedea [2], [3]).

Teorema 1. (Formula lui Taylor) *Fie I un interval şi f o funcţie definită şi de $n+1$ ori derivabilă pe I (n fiind un număr natural). Atunci, pentru orice $a, b \in I$, $a \neq b$, există $c \in I$, cuprins între a şi b (ceea ce înseamnă că $a < c < b$ sau $b < c < a$, în funcţie de ordinea care există între a şi b), astfel încât*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Se observă că, pentru $n = 0$, teorema devine binecunoscuta teoremă a creşterilor finite a lui *Lagrange*. Demonstraţia se bazează pe următoarea

Lemă. *Fie F, G două funcţii definite pe intervalul I, n un număr natural şi $a, b \in I$. Presupunem că F şi G sunt de $n+1$ ori derivabile pe I, că $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$, pentru $k = 0, 1, ..., n$ şi că $G^{(n+1)}$ nu se anulează în intervalul (a, b) (sau (b, a)). Atunci există $c \in I$, cuprins între a şi b astfel încât*

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}.$$

Demonstraţie. Vom presupune, pentru fixarea ideilor, că $a < b$ (cazul $b < a$ tratându-se la fel). Mai întâi observăm că funcţia G şi toate derivatele sale până la cea de ordinul n inclusiv nu se anulează în intervalul $(a, b]$; demonstrăm acest fapt pentru G, pentru derivate nefiind nici o deosebire esenţială.

Într-adevăr, dacă există un punct $\alpha \in (a, b]$ astfel încât $G(\alpha) = 0$, atunci (având şi $G(a) = 0$), conform teoremei lui *Rolle*, există $\alpha_1 \in (a, \alpha)$, astfel încât $G'(\alpha_1) = 0$. Apoi, pentru că şi $G'(a) = 0$, iarăşi aplicând teorema lui *Rolle*, rezultă existenţa unui $\alpha_2 \in (a, \alpha_1)$, astfel încât $G''(\alpha_2) = 0$; continuăm în acelaşi fel şi obţinem până la urmă un $\alpha_{n+1} \in (a, \alpha_n) \subseteq (a, b)$, astfel încât $G^{(n+1)}(\alpha_{n+1}) = 0$, deci o contrazicere a ipotezei că $G^{(n+1)}$ nu se anulează în intervalul (a, b).

Demonstraţia lemei se bazează pe aplicarea repetată a teoremei lui *Cauchy*. Mai întâi, există $c_1 \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)};$$

apoi aplicăm teorema lui *Cauchy* derivatelor funcţiilor şi găsim că există $c_2 \in (a, c_1) \subseteq (a, b)$, astfel încât

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}$$

ş.a.m.d.

În final se obţin c_k, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, astfel încât, $c_{k+1} \in (a, c_k)$, pentru $k = 1, 2, ..., n$ şi

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \ldots = \frac{F^{(n+1)}(c_{n+1})}{G^{(n+1)}(c_{n+1})}$$

şi demonstraţia se încheie cu $c = c_{n+1}$.

Demonstraţia teoremei 1. Aplicăm lema funcţiilor $F, G : I \to \mathbb{R}$ definite prin

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$
$$G(x) = (x-a)^{n+1},$$

pentru orice $x \in I$.

Se verifică uşor condiţiile

$$F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0,$$

pentru $k = 0, 1, ..., n$; de asemenea,

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

şi

$$G^{(n+1)}(x) = (n+1)! \neq 0,$$

pentru orice $x \in I$.

Atunci, conform lemei, există $c \in (a, b)$ (sau $c \in (b, a)$), astfel încât

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)},$$

egalitate care se dovedeşte echivalentă cu

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

şi formula lui *Taylor* este demonstrată.

Vom scrie această formulă în forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

unde $a < c < x$ sau $x < c < a$, sau în forma

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + R_n(f,a)(x),$$

unde

$$T_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

se numeşte *polinomul Taylor de grad* n asociat funcţiei f în punctul a, iar $R_n(f,a)(x)$ este restul de ordin n în formula lui *Taylor*; dacă nu există pericol de confuzie, vom nota simplu $T_n = T_n(f,a)$, respectiv $R_n = R_n(f,a)$.

Teorema demonstrată de noi oferă o exprimare a restului, anume ea arată că există (pentru a fixat şi x în intervalul I) $c = c_x$, cuprins între a şi x, astfel încât

$$R_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1};$$

aceasta este forma lui *Lagrange* a restului formulei lui *Taylor* de ordinul n (singura pe care o vom folosi în această lucrare).

Există şi alte forme ale restului, pentru care se poate consulta [2]. Mai amintim aici doar *forma integrală* a restului: dacă derivata de ordinul $n+1$ a funcţiei f este continuă pe I, atunci restul de ordin n poate fi pus în forma

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

cu alte cuvinte are loc egalitatea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

O primă consecinţă a teoremei 1 este formula „exactă" a lui *Taylor*, care, deşi nu va fi folosită în această lucrare, este utilă în nenumărate aplicaţii.

Corolarul 1. *Dacă f este o funcţie polinomială de grad n, atunci are loc egalitatea*:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

pentru orice numere reale a şi x.

Pentru demonstraţie este suficient să observăm că derivata de ordinul $n+1$ a funcţiei f este identic nulă pe $\mathbb{R}$, deci restul formulei lui *Taylor* este, de asemenea, nul. Mai remarcăm că, fiind o egalitate de funcţii polinomiale pe $\mathbb{R}$, formula este, de fapt, valabilă chiar pentru a şi x numere complexe.

Corolarul 2. *Fie f o funcţie de $n+1$ ori derivabilă pe intervalul I şi a un punct interior intervalului.*

a) *Dacă $f^{(n+1)}$ este mărginită într-o vecinătate a lui a, atunci*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

b) *Dacă derivata de ordinul $n+1$ a funcţiei f este continuă în punctul a, atunci*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}.$$

Demonstraţie. a) Din formula lui *Taylor* se poate scrie, pentru $x \in I$, $x \neq a$

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a),$$

deci, dacă presupunem că $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ pentru orice $x \in V \cap I$ (V fiind o vecinătate a lui a), vom avea

$$\left|\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n}\right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|,$$

oricare ar fi $x \neq a$, suficient de apropiat de a; din această inegalitate concluzia rezultă imediat.

b) La fel ca mai sus, putem rescrie formula lui *Taylor* în forma

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!},$$

pentru $x \in I$, $x \neq a$.

Avem, din ipoteză,

$$\lim_{x \to a} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(a);$$

c_x din formulă este cuprins între a şi x, de aceea, dacă $x \to a$, atunci şi $c_x \to a$.

Atunci

$$\lim_{x \to a} f^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(a)$$

şi din formula de mai sus rezultă şi concluzia, anume

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}.$$

De exemplu, deoarece funcţia exponenţială $x \mapsto \mathrm{e}^x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi toate derivatele sale au valoarea 1 în origine, obţinem formula

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2!} - \cdots - \dfrac{x^n}{n!}}{x^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}$$

(am ales $a = 0$, dar o formulă asemănătoare – nu esenţial diferită – se poate scrie pentru orice $a \in \mathbb{R}$).

Să mai remarcăm un lucru, anume că, dacă derivata de ordin $n+1$ a funcţiei f este mărginită în vecinătatea punctului a, să zicem, ca mai sus, că $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ pentru $x \in I$, cu $|x-a| < \alpha$, $\alpha > 0$ fiind fixat, atunci se poate deduce, din formula lui *Taylor*, inegalitatea:

$$|f(x) - T_n(x)| < M \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!},$$

valabilă pentru orice $x \in I$, $|x-a| < \alpha$. Dacă ar fi posibilă găsirea unei constante M care să fie independentă de n (măcar pentru un interval mic $(a-\alpha, a+\alpha)$ în jurul lui a), deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, aceasta conduce la concluzia că funcţia f poate fi aproximată, în vecinătatea lui a, cu polinoamele sale *Taylor*, aproximarea fiind cu atât mai bună cu cât n este mai mare, adică am avea $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} T_n(x)$ pentru $x \in (a-\alpha, a+\alpha) \cap I$. Acest fapt poate să nu fie adevărat; de pildă, se poate arăta că pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ dacă $x \neq 0$ şi $f(0) = 0$, există derivate de orice ordin în origine, toate egale cu 0. Desigur, aceasta înseamnă că polinomul *Taylor* de orice grad asociat funcţiei f în origine este identic nul, astfel că egalitatea $f(x) = \lim\limits_{x\to 0} T_n(f,0)(x)$ are loc numai pentru $x = 0$ (nu şi pentru x într-un interval nedegenerat care conţine originea, deoarece f este nenulă în toate punctele diferite de 0). În secţiunea care urmează precizăm în alţi termeni formula $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(f,a)(x)$ şi arătăm care este ideea care ne-a condus la scrierea acestui articol.

3. Serii numerice şi serii de funcţii. Serii Taylor. În mod obişnuit o *serie numerică* se defineşte ca fiind o pereche de şiruri de numere reale $\left((a_n)_{n\geq 1}, (S_n)_{n\geq 1}\right)$, unde, pentru orice $n \geq 1$, avem $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$; $(S_n)_{n\geq 1}$ se numeşte şirul sumelor parţiale ale seriei. Notaţia folosită pentru o serie este $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ (desigur că şirul (a_n) poate fi indexat şi cu $n \geq n_0$, unde n_0 poate fi orice număr natural – nu neapărat 1 –, ceea ce se va reflecta şi în notaţia seriei). Convergenţa unei serii este în directă legătură cu convergenţa şirului sumelor parţiale: dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi are limita S, atunci seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ se zice şi ea *convergentă* şi se scrie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = S$. Faptul că $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = \infty$ (sau $-\infty$) înseamnă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ (respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$). În general, dacă şirul sumelor parţiale are limita $S \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se mai spune că seria *are suma S*; dacă $(S_n)_{n\geq 1}$ nu are limită seria nu are sumă. În fine, seria se numeşte *divergentă* dacă şirul sumelor parţiale este divergent (o serie cu suma infinită este divergentă).

De exemplu, avem $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = 1$, deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

şi, mai general, $\sum\limits_{n\geq 1} q^n = \frac{q}{1-q}$, dacă $q \in (-1,1)$ (seria $\sum\limits_{n\geq 1} q^n$ se numeşte *seria geometrică* şi este convergentă pentru $q \in (-1,1)$). De asemenea se verifică uşor că seria geometrică are suma ∞, dacă $q \geq 1$ şi nu are nici un fel de sumă în cazul $q \in (-\infty, -1]$.

O altă serie celebră este *seria armonică*; aceasta este seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ şi are suma ∞. *Seria armonică generalizată*, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ (unde s este un număr real fixat) este convergentă dacă şi numai dacă $s > 1$. În particular, o celebră (şi frumoasă) formulă a lui *Euler* afirmă că $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (a se vedea [1], unde mai sunt demonstrate şi alte formule asemănătoare).

O serie nu trebuie să fie privită, simplist, ca fiind „o sumă infinită" (termen căruia, de altfel, nu-i acordăm nici un sens); dacă scriem $S = \sum\limits_{n\geq 1} a_n$ (sau, uneori, se mai foloseşte şi scrierea $S = a_1 + a_2 + \cdots$) trebuie să înţelegem că

$S = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ şi nimic altceva. Totuşi, notaţiile folosite amintesc de sume, iar unele din proprietăţile sumelor rămân valabile pentru serii. De exemplu avem

Propoziţia 1. *Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$ şi $\sum_{n\geq 1} b_n$ două serii având sumele S, respectiv T (eventual infinite) şi α un număr real nenul. Atunci:*

a) *Dacă $c_n = \alpha a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem $\sum_{n\geq 1} c_n = \alpha S$ (altfel spus, dar mai puţin precis, are loc egalitatea $\sum_{n\geq 1} \alpha a_n = \alpha \sum_{n\geq 1} a_n$; desigur cu convenţiile obişnuite de calcul cu simbolurile $\pm\infty$).*

b) *Dacă notăm $s_n = a_n + b_n$, pentru orice $n \geq 1$, avem $\sum_{n\geq 1} s_n = S + T$, mai puţin în cazul în care S şi T sunt una ∞, cealaltă $-\infty$ (adică $\sum_{n\geq 1} (a_n + b_n) = \sum_{n\geq 1} a_n + \sum_{n\geq 1} b_n$). În particular, dacă $S = \sum_{n\geq 1} a_n$, atunci $S - (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = \sum_{n\geq m+1} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots$.*

Demonstraţia nu este deloc complicată. Să notăm $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, respectiv $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ sumele parţiale ale celor două serii. Pentru punctul a) mai notăm $U_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$; deoarece $U_n = \alpha S_n$, oricare ar fi $n \geq 1$, evident vom avea $\sum_{n\geq 1} \alpha a_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha S = \alpha \sum_{n\geq 1} a_n$. Existenţa limitei din partea stângă a semnului de egalitate este asigurată de existenţa limitei din dreapta şi presupunerea că $\alpha \neq 0$. Observăm că dacă $\alpha = 0$ proprietatea nu rămâne adevărată: când seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ are suma ∞ (sau $-\infty$) egalitatea nu este valabilă, deoarece $c_n = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, implică $\sum_{n\geq 1} c_n = 0$, iar $0 \cdot (\pm\infty)$ nu are nici o semnificaţie. În schimb, ea este adevărată pentru orice α, dacă seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este convergentă.

Pentru punctul b) fie $V_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$, $n \geq 1$. Avem $V_n = S_n + T_n$, pentru orice $n \geq 1$ şi, deoarece am presupus că $S + T$ nu este o operaţie fără sens, rezultă că şirul $(V_n)_{n\geq 1}$ are limită, egală cu suma $S + T$ a limitelor şirurilor $(S_n)_{n\geq 1}$ şi $(T_n)_{n\geq 1}$; aşadar, $\sum_{n\geq 1} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} V_n = S + T = \sum_{n\geq 1} a_n + \sum_{n\geq 1} b_n$, ceea ce trebuia demonstrat. Ultima afirmaţie rezultă considerând şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ definit prin $b_1 = -a_1$, $b_2 = -a_2$, $\ldots$, $b_m = -a_m$ şi $b_n = 0$, oricare ar fi $n \geq m + 1$. (Mai remarcăm cu această ocazie şi o altă asemănare a seriilor cu sumele finite: dacă toţi termenii unui şir $(x_n)_{n\geq 1}$ sunt nuli, începând de la rangul $m + 1$, atunci seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă, suma sa fiind chiar $\sum_{n=1}^{m} x_n$.)

Este clar acum că o *serie de funcţii* se poate defini dacă avem un *şir de funcţii* f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, definite pe o aceeaşi mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$; seria de funcţii se notează prin $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ şi reprezintă, în fond, ansamblul tuturor seriilor numerice $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(a)$, unde $a \in A$. Seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este ***convergentă în punctul*** $a \in A$ (respectiv ***convergentă pe mulţimea*** $B \subseteq A$) dacă seria numerică $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(a)$ este convergentă (respectiv dacă seriile $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(b)$, $b \in B$ sunt toate convergente).

Desigur, şi în cazul seriilor de funcţii se pot defini sumele parţiale

$$S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

(doar că acum acestea formează un şir de funcţii); dacă în punctul $a \in A$ seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este convergentă, atunci avem

$$\sum_{n\geq 1} f_n(a) = \lim_{n\to\infty} S_n(a) = \lim_{n\to\infty} \left(f_1(a) + f_2(a) + \cdots + f_n(a)\right),$$

egalitate care defineşte ***suma seriei*** $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ***în punctul*** $a \in A$. Dacă seria este convergentă pe mulţimea $B \subseteq A$, se poate defini o funcţie pe B, egală în fiecare punct al mulţimii B cu suma seriei în punctul respectiv; aşadar, dacă notăm cu S suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ pe mulţimea de convergenţă B, avem

$$S(b) = \lim_{n\to\infty} S_n(b) = \lim_{n\to\infty} \left(f_1(b) + f_2(b) + \cdots + f_n(b)\right),$$

pentru oricare $b \in B$. Convergenţa despre care am discutat până acum a seriilor de funcţii se numeşte convergenţă *punctuală* sau simplă; dacă detaliem definiţia ei putem spune în felul următor: seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este (simplu sau punctual) convergentă pe mulţimea $B \subseteq A$ către funcţia $S : B \to \mathbb{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $b \in B$, există un rang $N = N(\varepsilon, b)$ (care deci depinde de ε şi de b), astfel încât să aibă loc inegalitatea $|S_n(b) - S(b)| < \varepsilon$, de îndată ce $n > N$.

Se poate defini un alt tip de convergenţă, foarte importantă în teoria seriilor de funcţii (şi a şirurilor de funcţii) punând în definiţia de mai sus o condiţie suplimentară, anume aceea ca N de acolo să depindă numai de ε, nu şi de b. Mai precis, spunem că seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este ***uniform convergentă pe mulţimea B către funcţia*** $S : B \to \mathbb{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (depinzând numai de ε), astfel încât inegalitatea $|S_n(b) - S(b)| < \varepsilon$ are loc pentru orice $b \in B$, de îndată ce $n > N$. În mod clar, convergenţa uniformă implică pe cea simplă, dar reciproca nu este adevărată (vezi exemple în [2], [3]).

Noi vom discuta în cele ce urmează despre un anume tip de serii de funcţii şi anume despre seriile *Taylor*, care cumva deja au apărut în lucrarea noastră. Dacă

f este o funcţie indefinit derivabilă într-o vecinătate a punctului $a \in \mathbb{R}$ pentru care egalitatea de la sfârşitul secţiunii 2 este adevărată, adică $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(f,a)(x)$ are loc pentru $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$ (unde $\alpha > 0$ este un număr fixat), se observă că putem scrie aceasta şi în forma

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

pentru $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$, adică f este suma unei serii de funcţii pe intervalul $(a-\alpha, a+\alpha)$; sumele parţiale ale acestei serii sunt tocmai cunoştinţele noastre mai vechi, polinoamele *Taylor* ale funcţiei f în punctul a. De aceea este firesc ca seria $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ să se numească *seria Taylor asociată funcţiei f în punctul a.* După cum deja am remarcat egalitatea unei funcţii cu seria ei *Taylor* poate să nu aibă loc decât în punctul a (în care egalitatea este desigur adevărată, oricare ar fi funcţia f şi punctul a în vecinătatea căruia ea este indefinit derivabilă); amintim că am observat acest lucru la funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

în cazul punctului $a = 0$. O serie de forma $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ (unde f este o funcţie definită şi indefinit derivabilă în vecinătatea originii) se numeşte *serie MacLaurin.* Dacă egalitatea

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

are loc pentru orice x din vecinătatea punctului a, ea se numeşte *dezvoltarea funcţiei f în serie Taylor în jurul punctului a* (respectiv în serie *MacLaurin*, dacă $a = 0$).

Un caz în care funcţia este egală cu suma seriei sale *Taylor* este prezentat în:

Propoziţia 2. *Fie f o funcţie indefinit derivabilă pe intervalul I şi a un punct interior intervalului.*

Presupunem că există constantele pozitive α şi M astfel încât să aibă loc inegalităţile

$$\frac{\alpha^n}{n!}\sup_{x\in I}\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

pentru $x \in I$, $|x-a| < \alpha$.

Demonstraţie. Conform formulei lui *Taylor*, pentru x aparţinând intervalului I, avem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, unde restul poate fi scris în forma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

c fiind cuprins între a şi x. Rezultă că pentru x în acest interval au loc inegalităţile

$$|R_n(x)| \leq M\left(\frac{|x-a|}{\alpha}\right)^{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$; dacă, în plus, îl alegem pe x astfel încât $|x-a| < \alpha$, avem

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\frac{|x-a|}{\alpha}\right)^{n+1} = 0.$$

Atunci inegalităţile de mai sus arată că şi $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, pentru orice $x \in I$ care verifică $|x-a| < \alpha$. Dar $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ înseamnă, practic, că $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$, adică

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

pentru $x \in I$ astfel încât $|x-a| < \alpha$ şi demonstraţia este încheiată.

De exemplu, să considerăm funcţia exponenţială, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; pentru aceasta avem $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$, pentru orice număr natural n şi orice $x \in \mathbb{R}$. Pentru x într-un interval de forma $(-\alpha, \alpha)$ marginea superioară a funcţiei (şi, implicit, a oricărei derivate) este e^a, astfel că

$$\frac{\alpha^n}{n!}\sup_{|x|<\alpha}\left|f^{(n)}(x)\right| = \frac{\alpha^n}{n!}\mathrm{e}^{\alpha}$$

are limita zero pentru $n \to \infty$.

Astfel am obţinut formula de dezvoltare în serie *Taylor* (de fapt *MacLaurin*, fiind în jurul originii) a funcţiei exponenţiale,

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!},$$

formulă valabilă pentru $x \in (-\alpha, \alpha)$; cum însă α poate fi orice număr real, formula are loc de fapt pentru orice număr real x. (Să mai spunem că analog se obţine dezvoltarea în serie *Taylor* într-un punct oarecare

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{(x-a)^n}{n!}\mathrm{e}^a,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$).

Totuşi, dacă împărţim în această egalitate prin e^a, ceea ce se poate, conform propoziţiei 1, şi apoi notăm $x - a = y$ obţinem aceeaşi formulă ca mai sus, adică dezvoltarea în serie *Taylor* în jurul punctului a nu este esenţial diferită de aceea în jurul originii.) Alte exemple mai des întâlnite de dezvoltare în serie *MacLaurin* (pe care le lăsăm pentru verificare cititorului – v. şi [2]) sunt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n\geq 0}\left(\cos\frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n\geq 0} \left(\sin \frac{n\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},\ x \in (-1,1],$$

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0} \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}x^n, \quad x \in (-1,1]$$

(aici r este un număr real fixat). Ultima formulă devine, pentru r număr natural, formula binecunoscută a binomului lui *Newton* (se reduce la o sumă finită); lăsăm cititorului verificarea acestui fapt. Dacă $r = -1$ formula binomială devine

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1,1],$$

sau, dacă înlocuim pe x cu $-x$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0} x^n, \quad x \in (-1,1],$$

deci este formula de însumare a unei progresii geometrice cu raţia subunitară. Recomandăm tot lucrarea [2] pentru alte cazuri particulare ale formulei seriei binomiale, precum şi pentru alte dezvoltări în serie *Taylor* sau *MacLaurin*.

În general nu este chiar uşor de stabilit dacă o funcţie dată este – sau nu – egală cu suma seriei sale *Taylor* în vecinătatea unui punct şi, dacă acest lucru se întâmplă, cât de mare este intervalul în jurul punctului respectiv în care egalitatea are loc. În schimb sunt bine studiate seriile de funcţii de forma $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$, unde $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale şi a un număr real fixat, pe care le vom numi *serii de puteri* (deşi această denumire se foloseşte mai ales în cazul $a = 0$; uneori ele se numesc chiar serii *Taylor*, fără a face referire la o anumită funcţie). Noi nu vom demonstra aici proprietăţile seriilor de puteri, căci ar ocupa nepermis de mult spaţiu şi întreaga lor teorie poate fi găsită în orice manual de analiză matematică de nivel universitar începător, dar ne vom folosi de câteva dintre ele, pe care (doar) le enunţăm în continuare.

Teorema 2. *Fie a un număr real şi $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale; notăm cu f suma seriei de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ într-o vecinătate a lui a, vecinătate pe care o presupunem interval deschis centrat în a (în fapt, se poate demonstra că, dacă mulţimea de convergenţă a unei asemenea serii nu se reduce doar la punctul a, atunci ea este un asemenea interval, eventual împreună cu una dintre sau cu ambele extremităţi). Cu alte cuvinte, presupunem că egalitatea $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ are loc pentru orice $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$, unde α este un număr real pozitiv fixat. Atunci funcţia f este indefinit derivabilă în vecinătatea lui a şi $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, oricare ar* *fi numărul natural n (adică $\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n$ este chiar seria Taylor a funcţiei f în punctul a).*

În particular, de aici rezultă că, dacă o egalitate de forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n = \sum_{n\geq 0} b_n (x-a)^n$$

are loc pentru orice x dintr-o vecinătate a punctului a, atunci

$$a_n = b_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, adică o proprietate de unicitate a coeficienţilor din scrierea ca sumă a unei serii de puteri a unei funcţii date.

La ce ne folosesc nouă toate aceste fapte? Pentru a vedea la ce folosesc, să mai scriem o dată egalitatea

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n,$$

pentru orice $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$, unde coeficienţii a_n sunt, conform propoziţiei 3, daţi de $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, pentru orice n; utilizăm acum proprietăţile pe care le-am demonstrat în propoziţia 1: pentru un număr natural p fixat, putem deduce de aici că

$$\frac{f(x) - T_p(f,a)(x)}{(x-a)^{p+1}} = \sum_{n\geq p+1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^{n-p-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n+p+1)}(a)}{(n+p+1)!} (x-a)^n,$$

egalitate ce are loc pentru orice $x \in (a-\alpha, a+\alpha), x \neq a$ (deoarece am împărţit prin $(x-a)^{p+1}$). Corolarul al doilea al teoremei 1 ne permite să prelungim această egalitate şi în punctul a; considerăm în acest scop funcţia $g : (a-\alpha, a+\alpha) \to \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - T_p(f,a)(x)}{(x-a)^{p+1}}, & x \neq a \\ \dfrac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}, & x = a \end{cases}.$$

Conform rezultatului amintit funcţia g este continuă, inclusiv în punctul a. În plus, putem scrie

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n+p+1)}(a)}{(n+p+1)!} (x-a)^n,$$

egalitate care, spre deosebire de cea anterioară, este valabilă pentru orice $x \in \in (a-\alpha, a+\alpha)$ (adică şi pentru $x = a$). Avem acum o dezvoltare în serie de puteri a funcţiei g în vecinătatea punctului a. Aplicând teorema 2, rezultă că g este o funcţie indefinit derivabilă pe intervalul $(a-\alpha, a+\alpha)$, partea mai importantă a acestei afirmaţii fiind că g este indefinit derivabilă în punctul a. Dacă mai ţinem seama şi de felul în care se pot calcula coeficienţii seriei din teorema 2 obţinem următorul rezultat (care constituie un ţel al nostru în această notă):

Teorema 3. *Fie f o funcţie definită şi indefinit derivabilă pe intervalul $(a-\alpha, a+\alpha)$, iar p un număr natural. Considerăm funcţia g definită pe intervalul $(a-\alpha, a+\alpha)$ prin*

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-T_p(f,a)(x)}{(x-a)^{p+1}}, & x\neq a\\ \dfrac{f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}, & x=a\end{cases},$$

unde

$$T_p(f,a)(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

este polinomul Taylor de grad p asociat funcţiei f în punctul a. Atunci funcţia g este, de asemenea, indefinit derivabilă pe intervalul $(a-\alpha, a+\alpha)$, iar derivatele sale în punctul a sunt date de formulele

$$\frac{g^{(n)}(a)}{n!}=\frac{f^{(n+p+1)}(a)}{(n+p+1)!}$$

i.e.

$$g^{(n)}(a)=\frac{n!f^{(n+p+1)}(a)}{(n+p+1)!},$$

pentru $n=0,1,2,\ldots$.

4. Aplicaţii. Să ne întoarcem la exemplul de la care am plecat. Pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}{p},$$

(unde $a_1,a_2,\ldots,a_p$ sunt numere reale pozitive fixate) avem derivata întâi

$$f'(x)=\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_p^x\ln a_p}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_p^x}$$

şi derivata a doua

$$f''(x)=\frac{1}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{p}a_k^x\right)^2}\cdot\left(\left(\sum_{k=1}^{p}a_k^x\ln^2 a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{p}a_k^x\right)-\left(\sum_{k=1}^{p}a_k^x\ln a_k\right)^2\right),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$; înseamnă că

$$f(0)=0,$$

$$f'(0)=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_p}{p}=\ln\sqrt[p]{a_1a_2\ldots a_p}$$

şi

$$f''(0)=\frac{p\sum\limits_{k=1}^{p}\ln^2 a_k-\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln a_k\right)^2}{p^2}.$$

În continuare vom aplica teorema 3 funcţiei f şi anume, vom considera $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}$ dacă $x\neq 0$ şi $g(0)=f'(0)$; conform teoremei această funcţie este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi prima sa derivată este

$$g'(0)=\frac{1}{2}f''(0)=\frac{p\sum\limits_{k=1}^{p}\ln^2 a_k-\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln a_k\right)^2}{2p^2}.$$

Atunci pentru funcţia h de la începutul lucrării (care este dată de $h(x)=\mathrm{e}^{g(x)}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$) vom avea

$$h'(0)=g'(0)\,e^{g(0)}=\frac{p\sum\limits_{k=1}^{p}\ln^2 a_k-\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln a_k\right)^2}{2p^2}\sqrt[p]{a_1a_2...a_p},$$

deci am ajuns şi pe această cale la acelaşi rezultat ca acolo; în plus am obţinut şi răspunsul la întrebarea referitoare la derivabilitatea funcţiei h: am demonstrat că $h=e^g$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ (deoarece g este astfel, conform teoremei 3). Putem chiar calcula în continuare derivata a doua a lui h în origine, anume avem $h''(0)=\left((g'(0))^2+g''(0)\right)e^{g(0)}$; singurul element necunoscut aici este $g''(0)$, dar, tot în baza teoremei 3, acesta se poate calcula, ca fiind $g''(0)=\dfrac{1}{3}f^{(3)}(0)$. În privinţa lui $f^{(3)}(0)$ dăm aici doar rezultatul, pe care cititorul îl poate verifica (relativ!) uşor:

$$f^{(3)}(0)=\frac{p^2\sum\limits_{k=1}^{p}\ln^3 a_k-3p\sum\limits_{k=1}^{p}\ln^2 a_k\sum\limits_{k=1}^{p}\ln a_k+2\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\ln a_k\right)^3}{p^3}.$$

Desigur, şi în cazul acestei metode calculele devin din ce în ce mai complicate, dar trebuie să recunoaştem că ea ne oferă mai multe posibilităţi decât abordarea directă.

Sau, putem considera funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2!}-\cdots-\dfrac{x^p}{p!}}{x^{p+1}}, & x\neq 0\\[2ex] \dfrac{1}{(p+1)!}, & x=0\end{cases}.$$

Conform teoremei 3, această funcţie este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ (am construit pe g pornind de la funcţia exponenţială, $f(x)=\mathrm{e}^x$), iar derivatele sale în origine se pot calcula cu formulele

$$g^{(n)}(0) = \frac{n! f^{(n+p+1)}(0)}{(n+p+1)!} = \frac{n!}{(n+p+1)!},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

În final vom mai da câteva aplicaţii, sub formă de exerciţii.

5. În loc de încheiere să mai dăm o demonstraţie pentru teorema 3. Cititorul atent trebuie să fi observat o inconsecvenţă: în demonstraţia teoremei am folosit esenţial faptul că funcţia f se poate dezvolta în serie Taylor în jurul punctului a, dar în enunţ nu am menţionat acest lucru, ci doar faptul că f este indefinit derivabilă în vecinătatea punctului a, care, după cum s-a văzut, nu este suficient pentru a deduce că f este suma seriei sale *Taylor* şi în alte puncte decât punctul a. Acest neajuns se poate corecta în cazul funcţiilor pentru care am aplicat teorema (destul de greu în cazul primului exemplu, tot folosind teoria seriilor de puteri), dar este oare ea valabilă şi în forma în care am enunţat-o sau menţionarea în ipoteză a faptului că f se poate dezvolta în serie *Taylor* în jurul punctului a este neapărat necesară?

Desigur că nu întâmplător am enunţat teorema în această formă: ea este valabilă astfel şi demonstraţia care urmează (care nu are nici o legătură cu seriile de puteri, dar, inevitabil, se leagă de formula lui Taylor) ne va lămuri complet în această privinţă. Demonstraţia cuprinde o inducţie după p astfel că avem nevoie mai întâi de cazul $p = 0$, care este cuprins în următoarea

Lemă. *Fie $f : (a-\alpha, a+\alpha) \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe $(a-\alpha, a+\alpha)$ şi funcţia $g : (a-\alpha, a+\alpha) \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}, & x \neq a \\ f'(a), & x = a \end{cases}.$$

Atunci funcţia g este, de asemenea, indefinit derivabilă pe $(a-\alpha, a+\alpha)$, iar derivatele sale în a sunt

$$g^{(n)}(a) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1},$$

pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Demonstraţie. Desigur, funcţia g este indefinit derivabilă pe $(a-\alpha, a+\alpha) - \{a\}$; problema este ce se întâmplă în punctul a.

Se poate calcula, cu ajutorul formulei lui *Leibniz*, derivata de ordinul n a funcţiei g în punctele mulţimii $(a-\alpha, a+\alpha) - \{a\}$. (Amintim că această formulă este

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

u şi v fiind două funcţii de n ori derivabile.)

Avem atunci

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n-k)} (f(x) - f(a))^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{(x-a)^{n-k+1}} (f(x) - f(a))^{(k)} =$$

$$= \frac{n!}{(x-a)^{n+1}} \left((-1)^n (f(x) - f(a)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k} f^{(k)}(x)}{k!} (x-a)^k \right) =$$

$$= \frac{n!}{(a-x)^{n+1}} \left(f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (a-x)^k \right) = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}} (f(a) - T_n(f,x)(a))$$

pentru orice $x \in (a-\alpha, a+\alpha)$, $x \neq a$.

O primă observaţie pe care o facem este că derivata de orice ordin a lui g are limită finită în punctul a.

Într-adevăr putem scrie formula lui *Taylor*

$$f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (a-x)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (a-x)^{n+1},$$

de unde

$$g^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{n+1},$$

unde c_x este un punct între a şi x (remarcăm că, faţă de forma în care am mai scris până acum formula, aici a şi x şi-au schimbat rolurile, dar asta nu afecează valabilitatea ei). De aceea, dacă $x \to a$, avem şi $c_x \to a$. Datorită continuităţii derivatei de ordinul $n+1$ a lui f în a, putem scrie $\lim\limits_{x\to a} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(a)$, ceea ce implică şi $\lim\limits_{x\to a} f^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(a)$.

Atunci, din exprimarea pe care am găsit-o pentru $g^{(n)}(x)$, rezultă că

$$\lim_{x\to a} g^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}.$$

Acum concluzia enunţată rezultă destul de uşor, prin inducţie după n. Întâi vedem că, deoarece g este continuă în a (prin chiar definiţia derivatei lui f în a) şi derivabilă în vecinătatea lui a, existând limita derivatei în acest punct, se poate folosi corolarul teoremei lui *Lagrange* pentru a deduce că g este derivabilă în a şi $g'(a) = \lim\limits_{x\to a} g'(x) = \dfrac{f''(a)}{2}$; totodată am obţinut şi că g' este continuă în a, ceea ce ne permite să calculăm derivata a doua a lui g în a ca limită: $g''(a) = \lim\limits_{x\to a} g''(x) = = \dfrac{f^{(3)}(a)}{3}$. Evident, continuând în acelaşi fel, se obţine concluzia că, pentru orice număr natural n, există $g^{(n)}(a)$ şi este egală cu $\lim\limits_{x\to a} g^{(n)}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}$; lema este demonstrată şi putem trece acum la

Demonstraţia teoremei 3. Considerăm funcţiile $g_0 = f, g_1, g_2, ..., g_{p+1}$ definite prin

$$g_{j+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{g_j(x) - g_j(a)}{x-a}, & x \neq a \\ \dfrac{f^{(j+1)}(a)}{(j+1)!}, & x = a \end{cases}, \quad j = 0, 1, 2, ..., p.$$

Se constată imediat, inductiv, că $g_{p+1} = g$ (din enunţul teoremei).

Mai precis, inductiv, se arată că

$$g_j(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - T_{j-1}(f,a)(x)}{(x-a)^j}, & x \neq a \\ \dfrac{f^{(j)}(a)}{j!}, & x = a \end{cases},$$

pentru $j = 1, 2, ..., p+1$. Într-adevăr, egalitatea valorilor în a este evidentă. Dacă presupunem că formula de mai sus este adevărată pentru $x \neq a$, atunci

$$g_{j+1}(x) = \frac{g_j(x) - g_j(a)}{x-a} = \frac{\dfrac{f(x) - T_{j-1}(f,a)(x)}{(x-a)^j} - \dfrac{f^{(j)}(a)}{j!}}{x-a} =$$

$$= \frac{f(x) - T_{j-1}(f,a)(x) - \dfrac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}{(x-a)^{j+1}} = \frac{f(x) - T_j(f,a)(x)}{(x-a)^{j+1}},$$

deci formula are loc şi pentru indicele $j+1$ (şi $x \neq a$).

Acum demonstraţia teoremei constă în aplicarea „în cascadă" a lemei. Deoarece f este indefinit derivabilă, va rezulta, pe baza lemei, că tot aşa este g_1; pentru că g_1 este indefinit derivabilă, la fel va fi g_2, ş. a. m. d. În final rezultă că $g = g_{p+1}$ este indefinit derivabilă, iar derivatele sale succesive în a se pot calcula astfel

$$g^{(n)}(a) = g_{p+1}^{(n)}(a) = \frac{g_p^{(n+1)}(a)}{n+1} = \frac{g_{p-1}^{(n+2)}}{(n+1)(n+2)} = ... =$$

$$= \frac{g_0^{(n+p+1)}(a)}{(n+1)(n+2)...(n+p+1)} = \frac{n!f^{(n+p+1)}(a)}{(n+p+1)!},$$

pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$, ceea ce trebuia demonstrat.

Să mai spunem că, dacă urmărim cu atenţie această demonstraţie, remarcăm că enunţul este valabil şi într-o formă uşor modificată; anume, se poate presupune funcţia f derivabilă doar de m ori în vecinătatea punctului a, cu derivata de ordinul m continuă în a. În acest caz vom considera funcţia g numai pentru $p \leq m$ şi se va obţine că ea este de $m - p$ ori derivabilă în punctul a (având loc aceleaşi formule, însă doar dacă $n \leq m - p$).

În final propunem cititorului nişte

Exerciţii. 1) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, dacă $x \neq 0$ şi $f(0) = 0$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi că $f^{(n)}(0) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2) Să se arate că $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$ şi $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

3) Să se dezvolte în serie *MacLaurin* funcţia $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

4) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie polinomială de grad n şi a un număr real. Să se arate că există şi sunt unic determinate numerele reale $a_0, a_1, ..., a_n$ astfel încât

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Coeficienţii $a_0, a_1, ..., a_n$ sunt daţi de formulele $a_i = \dfrac{f^{(i)}(a)}{i!}$ pentru fiecare $i = 0, 1, ..., n$. (Partea de existenţă a rezultat anterior ca un corolar al formulei lui *Taylor*; mai trebuie demonstrată unicitatea.)

5) Fie a şi b numere reale pozitive fixate. Să se arate că

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - \sqrt{ab}}{x} = \frac{(\ln a - \ln b)^2}{8}\sqrt{ab}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} - \sqrt{ab} - \dfrac{(\ln a - \ln b)^2}{8}\sqrt{ab}x}{x^2} = \frac{(\ln a - \ln b)^4}{128}\sqrt{ab}$$

şi, dacă are răbdare, cititorul poate continua.

Bibliografie

[1] A. M. Iaglom, I. M. Iaglom, *Probleme neelementare tratate elementar*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983.

[2] Miron Nicolescu, Nicolae Dinculeanu, Solomon Marcus, *Analiză matematică*, ediţia a V-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980 (alte ediţii 1965, 1971, 1974).

[3] G. E. Şilov, *Fonctions d'une variable*, Editions Mir, Moscou, 1973 (apărută şi în româneşte).

Colegiul Naţional Gheorghe Roşca Codreanu
str. Nicolae Bălcescu, nr.11
Bârlad, 6400

PUNCTE DE VEDERE

Locul geometriei analitice[1)]

DE DAN BRÂNZEI

Ne permitem în această expunere câteva *opinii personale* referitoare la poziţia geometriei analitice în didactica matematicii în general şi a geometriei în special. Mai adăugăm că aceste opinii par *minoritare*.

Dedicăm o prima secţiune geometriei analitice în şcoală.

Reluăm în acest scop eterna alternativă: predare *în spirală* sau *liniară*. Ne raliem ideii că predarea în spirală (numită uneori şi *ciclică* sau *concentrică*) are numeroase avantaje: asigură un plus de accesibilitate, este formativă, motivantă, flexibilă şi asigură fixări în trepte, dar temeinice. Ramurile matematicii potrivite acestei strategii sunt algebra (algoritmi de calcul) şi geometria (sintetică). Aici se

[1)] Prezentul articol a fost publicat iniţial în vol. IX (2005) al „Anuarului Matematic“ editat de S.S.M.R., filiala Bistriţa. (N.R.)

poate lărgi treptat clasa de numere sau obiecte matematice, respectiv evolua de la intuitiv la abstract. Ne vom referi la aceste două capitole cu notaţia A.

Nu prea se poate concepe predare în spirală pentru domenii ce le notăm B: analiza matematică, algebra structurilor, geometria analitică. Acestea se bazează pe cunoştinţe dobândite la A şi nu prea rămâne timp pentru spirale succesive.

Aparent, se dă câştig de cauză predării liniare: trei discipline în B faţă de două în A. O analiză mai atentă ne arată însă că rostul prezenţei în şcoală a lui B nu este cel al unui studiu intrinsec, ci acela de a realiza o *sinteză* a matematicii învăţate în şcoală. Gândind aşa, matematica se predă în şcoală în spirală: cunoştinţe de temelie se dobândesc spiralat în A şi sunt conexate, pe următoarele spire, în B.

Avem însă a aduce reproşuri tuturor celor din B: odată ajunse în şcoală, au uitat rostul lor şi fiecare vrea un studiu *pentru sine*. Trebuie oare algebra structurilor să marcheze spre A-module înainte de a aduce vorbă de relaţii de echivalentă? Trebuie oare analiza să insiste asupra cazurilor patologice ale funcţiilor neintegrabile sau integrabile dar neprimitivabile înainte de a se *coborî* să spună cum se separă rădăcinile ecuaţiilor algebrice şi cum se aproximează? Trebuie oare geometria analitică să dezvolte un breviar de formule cu tangente la conice înainte de a povesti esenţa metodei carteziene?

Asistăm, de o vreme, la o campanie de a duce fapte din B la clase mai mici. Nu spunem neapărat că acestea ar fi, una câte una inaccesibile, ci doar că sunt plantate pe un teren nepregătit. Nu este loc aici (şi poate că nu ne pricepem destul) să detaliem erori didactice în devansările din algebra structurilor şi analiză; ne vom restrânge spre geometria analitică.

Nu îndrăzneşte nimeni să nege virtuţile formative ale geometriei sintetice. Dar, dacă răsfoieşte cineva programe sau manuale, constată că este pe cale de dispariţie. Aşa cum, mai dinainte, a fost extirpată aritmetica, se pregăteşte şi exilarea geometriei (sintetice), Prea erau incomode prin cererea lor de a gândi mereu şi prin frecvenţa redusă a unor algoritmi memorabili mecanic.

Care a fost instrumentul principal de amputare a geometriei sintetice? Vectorii. Nu le negăm utilitatea, dar spunem că sunt aduşi în atenţia elevilor prea devreme. Ei reprezintă un *al doilea* limbaj de descriere a faptelor geometrice intuitive. El poate fi asimilat (formativ) abia când primul limbaj este însuşit suficient şi se vădeşte insuficient pentru adâncirea spre abstract.

Experienţe cu vectori (devreme) în şcoală s-au mai făcut: şi la noi prin anii '70 şi prin alte părţi. Noi ne deşteptaserăm; franţujii nu prea ştiu cum ar putea scăpa de ei.

Se impune să vorbim despre interpretarea geometrică a numerelor complexe. Este faţa cea mai accesibilă a vectorilor (dimensiunea 2). Capitolul nu prea era accesibil la clasa a X-a. Dar era imperios necesar măcar pentru că aducea spre intuiţia elevilor studiul numerelor complexe. Acesta este indiscutabil necesar algebrei. Dar polinoamele au fost fugărite spre nicăieri, se va vedea cum facem matematică fără ele.

Zicem că studiul (inclusiv geometric) al lui $\mathbb{C}$ este important şi că el trebuie să *prefaţeze* introducerea vectorilor. Este adevărat că se pot înhăma caii şi în urma căruţei, dar ce om cuminte este dispus să experimenteze?

Solicit îngăduinţa şi pentru a discuta locul geometriei analitice şi dincolo de şcoală, făcând deci referiri şi la facultăţi de matematică.

Se afirma frecvent că (*) „*principala virtute* a geometriei analitice este aceea de a asigura o metodă algoritmica de rezolvare a tuturor problemelor de geometrie". Avem mai *multe obiecţii* faţă de asemenea formulări.

Geometria analitică este o *metodă*; ea oferă *linii de abordare* pentru majoritatea problemelor de geometrie, dar este discutabil că aceste linii pot fi convenabil *finalizate*. Investigând în clasa problemelor de geometrie ce le cunoaştem, apreciem la 25% procentajul problemelor *soluţionabile* (în esenţa lor şi nu neapărat în detalii) *analitic*.

Am adăuga că mai mult de jumătate dintre acestea câştigă în „viteză" şi „precizie" dacă în soluţie se apelează şi la considerente sintetice. Nu gândim fraza de mai sus ca un reproş, ci doar ca o nuanţare a unei formulări exagerat de abrupte. Ca metodă (sau ansamblu de metode) geometria analitica trebuie comparată cu *alte metode geometrice* şi o asemenea comparaţie este favorabilă geometriei analitice. (Metode ca „transformări geometrice", „relaţii metrice", „comparări de arii" dovedindu-şi eficienţa pe procentaje de 1-2%). Este corect să spunem că geometria analitica transferă o problemă de geometrie P într-o problemă de algebră P'. Apare aici speranţa că algebra oferă metode algoritmice de rezolvare a problemei P', dar intră în discuţie *bogăţia de metode* şi *creativitatea* ce le posedă rezolvitorul în geometrie comparativ cu algebra.

În plan didactic este util să luăm în discuţie şi estetica problemelor P şi P'; presupunându-le rezolvabile, merită vorbit şi de estetica soluţiei. Apreciem că, relativ frecvent, probleme P frumoase se transferă (uneori cu opinteli) în probleme P' urâte ce au parte de soluţii nerelevante. Această apreciere nu porneşte de la un plus personal de simpatie faţă de geometrie, ci de la faptul că se analizează aici trecerea de la P la P'. În replică, putem vorbi despre probleme de algebră Q ce se transferă prin mijloace ale geometriei analitice în probleme de geometrie Q'; aici, preponderent, Q va fi frumoasă, transferul discutabil, Q' urâtă şi cu rezolvare nerelevantă.

Din partizanat faţă de o formulare (*) au fost selecţionate probleme P' dintr-o clasă C de probleme algoritmizabile algebric. (Discuţia sistemelor liniare şi reducerea formelor pătratice par a contura acceptabil clasa C). Se constituie apoi o clasă A de probleme P de geometrie, precizându-se modul lor de transfer t în probleme $P' \in C$ şi se acreditează ideea (**) că geometria analitică este (A, t)! Apreciem că o astfel de idee (**) este justificată doar ca *pledoarie* (iniţială) pentru geometria analitică. (Nu se considera nesportiv ca într-o pledoarie să fie minuţios selectate argumentele „pro" şi ignorate sau minimalizate cele „contra"). Să admitem deci din formularea (*) că este o virtute a geometriei analitice posibilitatea de transfer a unei clase largi de probleme de geometrie în probleme algoritmizabile algebric. Nu împărtăşim părerea că aceasta ar fi *principala* virtute!

Am aprecia prioritar geometria analitica, atât în plan ştiinţific cât şi în plan didactic, pentru capacitatea ei de a conexa domenii matematice relativ disjuncte: geometria şi algebra (uneori şi analiza). Această conexare *poate fi* benefică şi pentru geometrie şi pentru algebră.

Dar acest *poate fi* nu prea îl credem realizabil dacă ne mărginim la indicarea doar a unui mecanism *singular* de transfer t. Puşi în faţa unei probleme P nebanale şi decişi să o rezolvăm analitic, trebuie întâi să optăm pentru un *sistem de reperare* (euclidian, sau afin, sau chiar proiectiv, baricentric sau normal, punctual sau tangenţial). Apoi să alegem efectiv un asemenea reper (spre a simplifica transferul efectiv fără a diminua simetriile). Prima alegere reclamă şi *cunoaştere*, ambele înseamnă şi *creativitate* (atât în geometrie cât şi în algebră). Alegerea efectivă a transferului necesită preestimarea dificultăţii calculelor şi *preestimarea* pare a fi mai importantă decât calculul efectiv.

Cu alte cuvinte, problema P impune gândirea transferului t într-o înălţime (cât mai amplă) T; problema P' depinde de alegerea lui t în T atât ca rezolvabilitate cât şi ca estetică! Rezolvarea problemei P' poate *deveni relevantă* dacă este analizată dependenţa ei de alegerea lui t în T şi dacă etapele ei principale sunt „întoarse prin t^{-1} în geometrie“.

Dorim să semnalăm încă *două dezavantaje didactice* ce ni se par majore ce derivă din adoptarea punctului de vedere (*).

Un dezavantaj constă în apariţia unui dispreţ fata de „demodata geometrie sintetică“. Geometria analitică, metodă a geometriei, nu îşi poate exercita rolul de a prezenta geometria (la un nivel de abstractizare şi unitate mai înalt) negând obiectul (= geometria) pe care îl studiază.

Un al doilea dezavantaj derivă din *supraestimarea laturii algoritmice*. Exagerând în scopul argumentării am spune că se transmite mesajul: „Învaţă cum să nu gândeşti, memorează formule, aplică-le şi lasă calculele *să se ducă* unde vor ele“. Gândim acum la elevii ce vor face o facultate la care învaţă şi matematica. (Chiar dacă procentajul lor este mai mic, sunt prea importanţi pentru a-i ignora). Pentru aceştia geometria analitică este (sau trebuie să fie) *principala legătură* între geometria din şcoală şi matematica din facultate. În facultăţi se cam trece direct la geometria analitică n-dimensională. Desigur, se câştigă astfel în generalitate şi în abstractizare. Noi ne întrebăm dacă asta este geometrie sau algebră liniară în formularea ce am prezentat-o drept cuplu (A, t)? Nu avem nimic împotriva algebrei liniare, dar ne întrebăm dacă titulatura este bună.

Când se exagerează în abstractizare şi generalitate, peste pregătirea intuitivă anterioară corespunzătoare, creşte riscul învăţării mecanice ce nu este *formativă* ci *deformantă*. Zăbava asupra cazului $n = 2$ începe să fie esenţială pentru că aici conicele au definiţii atât geometrice cât şi algebrice şi compararea lor este element esenţial al geometriei analitice. Tot $n = 2$ asigură şi „vizualizarea calculelor“, deci sprijinul concret necesar în înţelegerea şi acceptarea unor idei generale.

Zicem că **fiecare învăţătură îşi are vârsta optimă**.

Zicem că geometriei sintetice i se potriveşte *adolescenţa*. Spre sfârşit de facultate prezumţia adolescenţei devine aproape gratuită. A fost aici inserată nuanţarea dată de aproape, deoarece vizarea meseriei de profesor de matematică facilitează disponibilităţi de apropiere *raţională* şi *afectivă* de potenţialii elevi. Ideea de a reveni la geometria sintetică prin meodele celei analitice ni se pare potrivită tinerilor ce aprofundează studii universitare de matematică.

Universitatea Alexandru Ioan Cuza
Iaşi

NOTE MATEMATICE

Asupra unei clase de şiruri

de Adrian Stroe

Abstract

This note deals with the properties of some sets of sequences which can be considered as generalizations of the classical sequences of *Leonhard Euler*, *Traian Lalescu* and *R. T. Ianculescu*.

Key words: *Euler* constant, sets of sequences, *Stolz-Cesàro* lemma.
M.S.C.: 40A05.

Având ca punct de plecare şirurile clasice ale lui *Leonhard Euler*, *Traian Lalescu* şi *R. T. Ianculescu*, introducem o mulţime de şiruri care, prin proprietăţile sale, duce la generalizarea acestor rezultate.

În lucrarea „De Progressionibus Harmonics Observationes" publicată în 1740, *Euler* arăta că şirul $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ converge la $c \approx 0,577218\ldots$, numită prima dată constanta lui *Euler*, în 1790, de *Lorenzo Mascheroni*, căreia în prezent i-au fost calculate primele 10^{242080} zecimale fără a i se stabili însă natura algebrică sau transcendentă.

Reamintind că şirul $(h_{k,n})_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}_+^*$, dat de

$$h_{k,n} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+kn},$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$ este fixat, este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} h_{k,n} = \ln(k+1).$$

Definim mulţimile de şiruri:

$$\Delta = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}_+^* \mid x_n \in [n, n+1), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$\Gamma = \Big\{(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R} \mid \text{există } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Delta, \text{ astfel încât } y_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} - \ln x_n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*\Big\},$$

$$H_k = \Big\{(z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}_+^* \mid \text{există } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Delta, \text{ astfel încât } z_{k,n} = \frac{1}{x_{n+1}} + \ldots + \frac{1}{x_{n+kn}} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*\Big\},$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Propoziţia 1. *Mulţimile* Δ, Γ, $(H_{n,k})_{k\,\text{fixat}}$ *sunt echivalente şi nenumărabile.*

Demonstraţie. Echivalenţa mulţimilor rezultă din modul lor de definire, orice şir din Δ generând câte un şir în celelalte mulţimi. Cum orice interval $[n, n+1)$ are puterea continuului, rezultă că Δ este nenumărabilă şi implicit, datorită echivalenţei, şi celelalte mulţimi au aceeaşi proprietate.

Propoziţia 2. *Avem*

$$\gamma_n = \sup\left\{y_n \mid (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Gamma\right\}$$

şi, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ *fixat,*

$$h_{k,n} = \sup \left\{ z_{k,n} \mid (z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}^*} \in H_r \right\}.$$

Demonstraţie. Şirurile γ_n şi $h_{k,n}$ se obţin din Γ, respectiv H_k, luând în Δ şirul $x_n = n$. Fie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Gamma - \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$. Atunci există $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât

$$x_n \in (n, n+1),$$

$$x_{n+1} - x_n \geq 1$$

şi

$$y_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \ln \frac{1}{x_n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Deoarece $x_n > n$, deducem că

$$\frac{1}{x_n} < \frac{1}{n}$$

şi

$$\ln \frac{1}{x_n} < \ln \frac{1}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde

$$y_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \ln \frac{1}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \ln \frac{1}{n} = \gamma_n.$$

Analog se arată cealaltă parte a concluziei.

Teorema 1. *Fie şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Gamma$. *Atunci* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} y_n \in (c-1, c].$$

Demonstraţie. Există $x_n \in \Delta$ astfel încât

$$y_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n},$$

de unde

$$\gamma_n - y_n = \ln \frac{x_n}{n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x_k} \right).$$

Deoarece

$$n \leq x_n < n+1,$$

deducem că

$$1 \leq \frac{x_n}{n} < \frac{n+1}{n},$$

de unde

$$1 < \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} < \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x_n} = 1$$

şi în final avem

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n}{x_n} = \ln 1 = 0.$$

Inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x_k} \right) \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{n}{n+1} < 1$$

implică convergenţa şirului $\gamma_n - y_n$ şi, implicit, a şirului y_n.

Deoarece

$$k \le x_k < k+1,$$

deducem că

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{x_k} \le \frac{1}{k}.$$

Prin urmare

$$\gamma_n - 1 + \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{x_n} < y_n \le \gamma_n + \ln \frac{n}{x_n}$$

şi trecând la limită rezultă

$$\lim_{n\to\infty} y_n \in (c-1, c].$$

Consecinţă. *Fie şirurile* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Gamma$. *Atunci*

$$\left| \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) \right| < 1.$$

Demonstraţie. Conform teoremei anterioare şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente şi avem inegalităţile

$$c - 1 < \lim_{n\to\infty} x_n \le c$$

şi

$$-c \le -\lim_{n\to\infty} y_n < -c + 1.$$

Adunând inegalităţile, obţinem

$$-1 < \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n < 1,$$

de unde

$$\left| \lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) \right| < 1.$$

Propoziţia 3. *Fie şirul* $x_n \in \Delta$, *astfel încât*

$$x_{n+1} - x_n \ge 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci şirul convergent $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Gamma$, *dat de*

$$y_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \ln \frac{1}{x_n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, este strict descrescător.

Demonstraţie. Aplicând inegalitatea $\ln x \geq \dfrac{2(x-1)}{x+1}$, valabilă pentru orice $x \in [1, \infty)$, pentru $x = \dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, deducem că

$$y_n - y_{n+1} = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \geq \frac{2\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n} - 1\right)}{\dfrac{x_{n+1}}{x_n} + 1} - \frac{1}{x_{n+1}} =$$

$$= \frac{2(x_{n+1} - x_n)}{x_{n+1} + x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \geq \frac{2}{x_{n+1} + x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}(x_{n+1} + x_n)} > 0,$$

deci

$$y_n > y_{n+1},$$

de unde rezultă că şirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

Teorema 2. *Fie şirul $(z_{k,n})_{n \in \mathbb{N}^*} \in H_k$. Atunci $(z_{k,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent şi*

$$\lim_{n \to \infty} z_{k,n} = \ln(k+1).$$

Demonstraţie. Deoarece $(z_{k,n})_{n \in \mathbb{N}^*} \in H_k$, rezultă existenţa unui şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \Delta$, astfel încât

$$z_{k,n} = \frac{1}{x_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{x_{n+k_n}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ fixat.

Cum $z_{k,n}$ este strict crescător şi

$$z_{k,n} \leq \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+kn} < kn \cdot \frac{1}{n+1} < k,$$

rezultă că $z_{k,n}$ este convergent.

Deoarece $x_n \in [n, n+1)$, rezultă

$$\frac{n}{n+kn+1} < \frac{x_n}{x_{n+kn}} < \frac{n+1}{n+kn}$$

şi, trecând la limită, obţinem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{x_{n+kn}} = \frac{1}{k+1}.$$

Conform Teoremei 1, şirul dat de

$$y_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} - \ln x_n$$

este convergent şi

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} y_{n+kn} = l \in (c-1, c].$$

Păstrând notaţiile anterioare, deoarece $z_{k,n} = y_{n+kn} - y_n - \ln \dfrac{x_n}{x_{n+kn}}$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} z_{k,n} = \lim_{n\to\infty} y_{n+kn} - \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} \ln \frac{x_n}{x_{n+kn}} = l - l - \ln \frac{1}{k+1} = \ln(k+1).$$

Observaţie. Teorema 2 nu este o consecinţă obligatorie a Teoremei 1, calculul limitei şirului $(z_{k,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ putând fi efectuat folosind sumele *Riemann*.

Într-adevăr, dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Delta$, atunci

$$np + i \le x_{np+i} < np + i + 1,$$

pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$ fixat, de unde

$$\frac{1}{np+i+1} < \frac{1}{x_{np+1}} \le \frac{1}{np+i}$$

ceea ce implică

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{np+i+1} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{np+i}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{np+i},$$

de unde

$$\frac{1}{np+2} + \cdots + \frac{1}{np+n+1} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{np+i}} \le \frac{1}{np+1} + \cdots + \frac{1}{np+n},$$

deci

$$\frac{1}{np+1} + \cdots + \frac{1}{np+n} + \frac{-n}{(np+1)(np+n+1)} <$$
$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{np+i}} \le \frac{1}{np+1} + \cdots + \frac{1}{np+n}.$$

Prin urmare

$$\sum_{p=1}^{k} \left(\frac{1}{np+1} + \cdots + \frac{1}{np+n} \right) + \sum_{p=1}^{k} \frac{-n}{(np+1)(np+n+1)} <$$
$$< \sum_{p=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{np+i}} \le \sum_{p=1} k \left(\frac{1}{np+1} + \cdots + \frac{1}{np+n} \right),$$

de unde

$$\sum_{p=1}^{k} \left(\frac{1}{np+1} + \cdots + \frac{1}{np+n} \right) + \sum_{p=1}^{k} \frac{-n}{(np+1)(np+n+1)} <$$
$$< z_{k,n} \le \sum_{p=1}^{k} \left(\frac{1}{np+1} + \cdots + \frac{1}{np+n} \right).$$

Trecând la limită în dubla inegalitate şi folosind faptul că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{k}\frac{-n}{(np+1)(np+n+1)}=\sum_{i=1}^{n}\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{(np+1)(np+n+1)}=0,$$

obţinem

$$\lim_{n\to\infty}z_{k,n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{k}\left(\frac{1}{np+1}+\cdots+\frac{1}{np+n}\right)=$$

$$=\sum_{p=1}^{k}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{np+1}+\cdots+\frac{1}{np+n}\right)=\sum_{p=1}^{k}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p+\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{p+\frac{n}{n}}\right)=$$

$$=\sum_{p=1}^{k}\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{p+x}\mathrm{d}x=\sum_{p=1}^{k}[\ln(p+1)-\ln p]=\ln(k+1).$$

Deoarece calculul limitelor de forma $(a_{n+1}-a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\mathbb{R}_+^*$ aplicat în [3] şirurilor lui *Traian Lalescu* şi *R. T. Ianculescu* nu se poate utiliza şi în cazul şirurilor ponderate, cu ponderi diferite asociate acestora [7], având ca punct de plecare rezultatele obţinute în [6] şi [7], propunem o abordare separată în generalizarea fiecărui şir.

Propoziţia 4. *Fie şirul* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\mathbb{R}_+^*$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a>0$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a.$$

Lemă. *Fie şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\mathbb{R}_+^*$, *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}=p\in\mathbb{R}_+^*$ *şi există* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)$.

Atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}-1\right)n=1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\mathrm{e}.$

Demonstraţie. a) Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x_n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=p\cdot\frac{1}{p}\cdot1=1.$$

b) Folosind lema lui *Stolz-Cesàro*, deducem că

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=p.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\right)n=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)\cdot\frac{n}{x_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n}p\cdot\frac{1}{p}=1.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\right)^n=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)\cdot n}=\mathrm{e}.$

Teorema 3. *Fie şirurile* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\mathbb{R}_+^*$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n-1}-x_n)$ *şi*

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=p\in\mathbb{R}_+^*$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=a\notin\mathbb{R}_+^*,\quad\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=b\in\mathbb{R}_+^*.$

Atunci

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1}a_{n+1}}}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_nb_n}}\right)^{x_n}=(b\mathrm{e})^p$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{n+1}a_{n+1}}-\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_nb_n}\right)=\frac{ap}{\mathrm{e}}\ln(b\mathrm{e}).$

Demonstraţie. Considerăm şirurile $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\mathbb{R}_+^*$, date de

$$y_n=x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n$$

şi

$$z_n=\frac{x_n^n}{y_n}.$$

Atunci

$$\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{x_{n+1}^{n+1}}{y_{n+1}}\cdot\frac{y_n}{x_n^n}=\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

Conform Propoziţiei 4, avem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{z_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x_n^n}{y_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt[n]{y_n}}=\mathrm{e}.$$

Pentru

$$u_n=\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}a_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_nb_n}},$$

avem

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{x_{n+1}}\cdot\sqrt[n+1]{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{b_n}}\cdot\frac{x_n}{\sqrt[n]{y_n}}\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}}{x_{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{a_{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b_n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt[n]{y_n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot a \cdot \frac{1}{a} \cdot \mathrm{e} \cdot 1 = 1,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} u_n^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}a_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n b_n}} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}^n}}{y_n b_n} \cdot \sqrt[n+1]{a_{n+1}^n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{y_{n+1}}{y_n} \cdot \frac{a_{n+1}}{b_n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{x_{n+1}}{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{\sqrt[n+1]{y_{n+1}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} = a \cdot b \cdot \mathrm{e} \cdot \frac{1}{a} = b\mathrm{e},$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{x_n} = \lim_{n\to\infty} (u_n^n)^{\frac{x_n}{n}} = (b \cdot \mathrm{e})^p$$

şi prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} (\ln u_n^{x_n}) = \ln \lim_{n\to\infty} (u_n^{x_n}) = p \ln(b\mathrm{e}).$$

Folosind acest rezultat avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{y_{n+1}a_{n+1}} - \sqrt[n]{y_n b_n} \right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_n b_n} \cdot \left(\frac{\sqrt[n+1]{y_{n+1}a_{n+1}}}{\sqrt[n]{y_n b_n}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{y_n}}{x_n} \cdot \sqrt[n]{b_n} \cdot \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \ln u_n^{x_n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{y_n}}{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{u_n - 1}{\ln u_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \ln u_n^{x_n} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot a \cdot 1 \cdot p \cdot \ln(b\mathrm{e}) = \frac{ap}{\mathrm{e}} \ln(b\mathrm{e}).$$

Teorema 4. *Fie şirurile* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}_+^*$, *astfel încât există* $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)$ *şi*

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = p \in \mathbb{R}_+^*$,

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = a \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = b \in \mathbb{R}_+^*$.

Atunci

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_{n+1} \sqrt[n+1]{x_{n+1}a_{n+1}}}{x_n \sqrt[n]{x_n b_n}} \right)^{x_n} = (b\mathrm{e})^p$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(x_{n+1} \sqrt[n+1]{x_{n+1}a_{n+1}} - x_n \sqrt[n]{x_n b_n} \right) = ap \ln(b\mathrm{e})$.

Demonstraţie. Fie

$$v_n = \left(\frac{x_{n+1} \sqrt[n+1]{x_{n+1} a_{n+1}}}{x_n \sqrt[n]{x_n b_n}} \right)^{x_n}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}}{\sqrt[n]{x_n}} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{\sqrt[n]{b_n}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}}{\sqrt[n]{x_n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}{\sqrt[n]{b_n}} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{a} = 1,$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} (v_n)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^n \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} \right] =$$

$$= \mathrm{e} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot a \cdot b \cdot \frac{1}{a} = be,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} (v_n)^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left(v_n^n\right)^{\frac{x_n}{n}} = (b\mathrm{e})^p.$$

b) Avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{x_{n+1} a_{n+1}} - \sqrt[n]{x_n b_n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left[x_n \sqrt[n]{x_n b_n} \, (v_n - 1) \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{x_n} \cdot \sqrt[n]{b_n} \cdot \frac{v_n - 1}{\ln v_n} \cdot \ln v_n^{x_n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{v_n - 1}{\ln v_n} \cdot \ln \left(\lim_{n\to\infty} v_n^{x_n} \right) =$$

$$= 1 \cdot a \cdot 1 \cdot \ln(b\mathrm{e})^p = ap \ln(b\mathrm{e}).$$

Consecinţă. *Fie şirurile* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}_+^*$, *astfel încât există* $\lim_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)$ *şi*

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = p \in \mathbb{R}_+^*$,

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}_+^*$.

Atunci, pentru orice $k, l \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 1$, *avem*

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+k]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+k} a_{n+k}} - \sqrt[n+l]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n+l} a_{n+l}} \right) = (k-l) \frac{ap}{\mathrm{e}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(x_{n+k} \sqrt[n+k]{x_{n+k} a_{n+k}} - x_{n+l} \sqrt[n+l]{x_{n+l} b_{n+l}} \right) = (k-l)ap.$

Demonstraţie. a) Considerând în Teorema 3, $a_n = b_n$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{y_{n+1} a_{n+1}} - \sqrt[n]{y_n b_n} \right) = \frac{ap}{\mathrm{e}}.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{x_1\cdot\ldots\cdot x_{n+k}a_{n+k}}-\sqrt[n+1]{x_1\cdot\ldots\cdot x_{n+l}a_{n+l}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k-l-1}\left(\sqrt[n+l+j+1]{y_{n+l+j+1}a_{n+l+j+1}}-\sqrt[n+l+j]{y_{n+l+j}a_{n+l+j}}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k-l-1}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+l+j+1]{y_{n+l+j+1}a_{n+l+j+1}}-\sqrt[n+l+j]{y_{n+l+j}a_{n+l+j}}\right)=(k-l)\cdot\frac{ap}{\mathrm{e}}.$$

b) Analog punctului a), luând în Teorema 4, $a_n=b_n$.

Observaţii

• Deoarece apar în simplificări de forma $x\cdot\dfrac{1}{x}$, a şi p trebuie să finite pentru a evita nedeterminări de forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, dar b poate fi şi infinit, în acest caz cele două limite fiind $+\infty$.

• În teoremele 1 şi 2 considerând $a_n=b_n=1$, obţinem generalizările şirurilor lui *Traian Lalescu* respectiv *R. T. Ianculescu*, din care pentru $x_n=n$ rezultă şirurile iniţiale. În acest caz, comparativ cu [3], în ipoteză există o singură condiţie (i) care este mai uşor de verificat.

• Teoremele 1 şi 2 din [6] se pot obţine din Teoremele 3 şi 4, pentru $x_n=n$.

Teorema 5. *Mulţimea şirurilor ce verifică condiţia* (i) *din teoremele* 3 *şi* 4 *este nenumărabilă.*

Demonstraţie. Fie S mulţimea şirurilor ce verifică condiţia (i) şi un şir oarecare $x_n\in\Delta$.

Atunci

$$1\le\frac{x_n}{n}<\frac{n+1}{n},$$

deci

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1,$$

de unde $x_n\in S$ şi, prin urmare

$$\Delta\subseteq S.$$

Δ fiind nenumărabilă, rezultă că S este nenumărabilă.

Bibliografie

[1] ∗ ∗ ∗ www.eulerarchive.com.

[2] ∗ ∗ ∗ www.mathworld.wolfram.com/Euler Mascheroni's constant.html.

[3] D. M. Bătineţu, *Şiruri*, Editura Albatros, 1979, pag (437-444; 498; 518).

[4] A. M. Iaglom, I. M. Iaglom, *Probleme neelementare tratate elementar*, Editura Tehnică, Bucuresti, 1983.

[5] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[6] ∗ ∗ ∗ Gazeta Matematică, nr. 2/1992, pag. 46.

[7] Oana Carja, Un procedeu de calcul al limitelor unor şiruri de forma $(a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}$, www.recreatiimatematice.uv.ro/arhiva/nota/RM22003CARJA.pdf

Liceul Teoretic Mihai Viteazul din Caracal
email: s_adrian2002@yahoo.com

Identităţi şi inegalităţi deduse dintr-o identitate a lui Steffensen

DE DORIN MĂRGHIDANU

Abstract

The present note deals with an identity due to *J. F. Steffensen.* Some inequalities and identities based on the above mentioned identity are presented.

Key words: *Steffensen*'s identity, means, inequality
M.S.C.: 11B37 , 11B99 , 26D15

În [12], matematicianul danez *J. F. Steffensen* a folosit, în scopul demonstrării inegalităţii mediilor, o identitate foarte interesantă (pe care o vom denumi aici cu numele autorului). Cum în articolul original şi în alte două lucrări care o semnalează ([2], p.63, respectiv [3], pp.90-91), această identitate este doar enunţată, în cele ce urmează prezentăm o demonstraţie şi câteva aplicaţii.

Sunt relevate de asemenea şi alte virtuţi sau posibilităţi de utilizare ale acestei identităţi, mai ales în obţinerea sau demonstrarea unor inegalităţi.

Propoziţia 1 (Identitatea lui Steffensen). *Pentru n-uplurile* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, *are loc identitatea*

$$\left[\left(\sum_{i=1, i\neq k}^{n} a_i\right) + b_k\right] \cdot \left[\left(\sum_{i=1, i\neq k}^{n} b_i\right) + a_k\right] - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) =$$

$$= (a_k - b_k) \cdot \left(\sum_{i=1, i\neq k}^{n} (a_i - b_i)\right), \quad \textit{pentru orice} \quad k = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Demonstraţie. Cu notaţiile $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $B = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ identitatea de demonstrat se rescrie sub forma

$$(A - a_k + b_k)(B - b_k + a_k) - AB = (a_k - b_k)(A - B + b_k - a_k),$$

ceea ce echivalează cu

$$(A - (a_k - b_k))(B + (a_k - b_k)) - AB = (a_k - b_k)(A - B - (a_k - b_k)),$$

adică cu următoarea identitate evidentă

$$AB + (a_k - b_k)(A - B) - (a_k - b_k)^2 - AB = (a_k - b_k)(A - B) - (a_k - b_k)^2.$$

Definiţia 2. *Pentru n-uplurile de numere reale* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *şi* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *prin sumă asociată lui a k-grefată prin b, vom înţelege o sumă de forma* $\left(\sum\limits_{i=1, i\neq k}^{n} a_i\right) + b_k$, *unde* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Cu alte cuvinte, în suma asociată lui a, se înlocuieşte termenul a_k cu b_k.

Aplicaţia 3. Pentru $n = 3$ şi $k = 1$, $k = 2$, respectiv $k = 3$ în (1), obţinem identităţile

$$\begin{aligned}(a_2 + a_3 + b_1) \cdot (b_2 + b_3 + a_1) - (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = \\ = (a_1 - b_1) \cdot [(a_2 - b_2) + (a_3 - b_3)],\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(a_1 + a_3 + b_2) \cdot (b_1 + b_3 + a_2) - (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = \\ = (a_2 - b_2) \cdot [(a_1 - b_1) + (a_3 - b_3)],\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + b_3) \cdot (b_1 + b_2 + a_3) - (a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) = \\ = (a_3 - b_3) \cdot [(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)].\end{aligned} \tag{4}$$

Prin însumarea relaţiilor (2) - (4), în care apar sume grefate pentru vectorii a şi b, obţinem o identitate pentru sume ciclice,

$$\begin{aligned}\sum (a_1 + a_2 + b_3) \cdot (b_1 + b_2 + a_3) - 3 \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} b_i\right) = \\ = 2 \cdot \sum (a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2)\end{aligned} \tag{5}$$

În acelaşi mod, însumând în (1) după $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, se obţine:

Propoziţia 4. *Dacă* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci are loc identitatea*

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1, i\neq k}^{n} a_i\right) + b_k\right] \cdot \left[\left(\sum_{i=1, i\neq k}^{n} b_i\right) + a_k\right] - n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) =$$

$$= 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_i - b_i) \cdot (a_j - b_j), \tag{6}$$

unde $(a_{n+1} = a_1$, $b_{n+1} = b_1$,

Identitatea lui *Steffensen*, surprinsă în formula (1), poate fi folosită pentru deducerea unei inegalităţi din specia inegalităţilor de monotonie (alături de cunoscuta inegalitate a lui *Cebâşev* sau inegalitatea majorizării; vezi de exemplu [1], [5], [10] , [11]).

Propoziţia 5 (Inegalităţi pentru sume k-grefate.) *Dacă* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *astfel încât* $a_i \geq b_i$, *pentru orice* $i = \overline{1, n}$, *atunci are loc inegalitatea*

$$\left[\left(\sum_{i=1, i\neq k}^{n} a_i\right) + b_k\right] \cdot \left[\left(\sum_{i=1, i\neq k}^{n} b_i\right) + a_k\right] \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right), \tag{7}$$

pentru orice $k = \overline{1, n}$.

Demonstraţie. Inegalitatea de mai sus rezultă imediat din identitatea (1), deoarece membrul drept al său este evident pozitiv, pentru că $a_i \geq b_i$, pentru orice $i = \overline{1,n}$. Tot de aici rezultă şi condiţia de egalitate, anume când $a_i = b_i \in \mathbb{R}$, pentru orice $i = \overline{1,n}$.

Propoziţie 6 (Inegalitatea mediilor). *Dacă pentru numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, notăm: $A_n[a] := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$ (media aritmetică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$) şi $G_n[a] := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$ (media geometrică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$), atunci*

$$A_n[a] \geq G_n[a], \tag{8}$$

cu egalitate dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstraţie. Pentru demonstraţie, putem presupune – fară a restrânge generalitatea –, că

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$$

(în caz contrar, renumerotăm elementele).

Aplicând în mod repetat Propoziţia 5 (anume grefând pe a_1, pe rând, cu $a_2, \ldots, a_n$, pe a_2 cu a_3, …, a_n etc.) obţinem, succesiv:

$$\begin{aligned}
&n^n G_n^n[a] = (na_1)(na_2)\ldots(na_n) \leq [(n-1)a_1 + a_2][a_1 + (n-1)a_2](na_3)\ldots(na_n) \leq \\
&\leq [(n-2)a_1 + a_2 + a_3][a_1 + (n-1)a_2][a_1 + (n-1)a_3](na_4)\ldots(na_n) \leq \ldots \leq \\
&\leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)[a_1 + (n-1)a_2][a_1 + (n-1)a_3]\ldots[a_1 + (n-1)a_n] \leq \ldots \leq \\
&\vdots \\
&\leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\ldots(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = n^n A_n^n[a].
\end{aligned}$$

Rezultă, deci, inegalitatea din enunţ .

Alte demonstraţii pentru inegalitatea mediilor se pot consulta în [1] - [11] .

De fapt, demonstraţia de mai sus pune în evidenţa şi o rafinare a inegalităţii mediilor, cu $C_n^2 - 1$ termeni intermediari.

Corolarul 7 (O rafinare a inegalităţii mediilor). *Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$, atunci au loc inegalităţile*

$$\begin{aligned}
&G_n[a] = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{[(n-1)a_1 + a_2]}{n} \frac{[a_1 + (n-1)a_2]}{n} \cdot a_3 \ldots a_n} \leq \\
&\leq \sqrt[n]{\frac{[(n-2)a_1 + a_2 + a_3]}{n} \frac{[a_1 + (n-1)a_2]}{n} \frac{[a_1 + (n-1)a_3]}{n} \cdot a_4 \ldots a_n} \leq \\
&\vdots \\
&\leq \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}} = A_n[a].
\end{aligned} \tag{9}$$

Corolarul 8. *Pentru $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a_i \geq b_i$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, are loc inegalitatea*

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1,i\neq k}^{n} a_i\right)+b_k\right]\cdot\left[\left(\sum_{i=1,i\neq k}^{n} b_i\right)+a_k\right]\geq n\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right). \quad (10)$$

Demonstraţie. Inegalitatea rezultă fie prin însumarea după $k=\overline{1,n}$, în relaţia (7), fie rezultă din identitatea (6), prin aplicarea în membrul său drept a condiţiilor $a_i \geq b_i$, pentru orice $i=\overline{1,n}$.

O variantă a rezultatului de mai sus este exprimată prin următorul

Corolarul 9. *Pentru* $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n), b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}^*$, *astfel încât* $a_i\geq b_i$, *pentru orice* $i=\overline{1,n}$, *dacă notăm*

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, \quad \text{şi} \quad B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n,$$

atunci

$$\sum_{k=1}^{n}(A_n+b_k-a_k)\cdot(B_n+a_k-b_k)\geq n\cdot A_n\cdot B_n. \quad (11)$$

Dacă mai notăm diferenţa a două valori omoloage din şirurile a şi b, prin $d_k=a_k-b_k\geq 0$, atunci relaţia (11) se exprimă în forma

$$\sum_{k=1}^{n}(A_n-d_k)\cdot(B_n+d_k)\geq n\cdot A_n\cdot B_n. \quad (11')$$

În sfârşit, pentru această ultimă relaţie, mai avem şi echivalenţele

$$(11')\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}[A_n\cdot B_n+d_k\cdot(A_n-B_n)+d_k^2]\geq n\cdot A_n\cdot B_n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n\cdot A_n\cdot B_n+(A_n-B_n)\cdot\sum_{k=1}^{n}d_k-\sum_{k=1}^{n}d_k^2\geq n\cdot A_n\cdot B_n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(A_n-B_n)\cdot\sum_{k=1}^{n}d_k\geq\sum_{k=1}^{n}d_k^2\Leftrightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}d_k\right)^2\geq\sum_{k=1}^{n}d_k^2. \quad (12)$$

Observaţia 10. Evident, (12) se poate obţine şi prin calcul direct şi reprezintă şi o altă cale de a demonstra inegalităţile (11) sau (11′). Dacă pentru vectorul $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, mai notăm

$$P_n[a]:=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

(media pătratică a numerelor $a_1,a_2,\ldots,a_n$), atunci putem reformula, în limbaj de medii, relaţia (12), în următoarea formă:

Corolar 11. *Dacă* $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n), b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, *astfel încât* $a_i\geq b_i$, *pentru orice* $i=\overline{1,n}$ *au loc inegalităţile*:

(a) $(A_n[a]-A_n[b])^2\geq\frac{1}{n}\cdot A_n[d^2]$; (13)

(b) $A_n[a]-A_n[b]\geq P_n[d]$. (14)

Bibliografie

[1] E.F. Beckenbach & R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New-York, 1961.

[2] P. S. Bullen & D. S. Mitrinović & P. M. Vasić, *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publidshing Company, Dordrecht/Boston, 1988.

[3] P. S. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2003.

[4] D. Mărghidanu, *Inegalitatea lui Lagrange este echivalentă cu inegalitatea mediilor*, Arhimede, nr. 3-4, pp. 17-19, 2005.

[5] D. Mărghidanu, M. Bencze, *New Means and Refinements for AM-GM-HM Inequalities*, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 13, No. 2, pp. 999-1001, October, 2005.

[6] D. Mărghidanu, M. Bencze, *A new Proof for AM-GM Inequalitiy*, Octogon Mathematical Magazine, Vol. 13, No. 2, pp. 1021-1026, October, 2005.

[7] D. Mărghidanu, *O demonstraţie a inegalităţii mediilor* (pornind de la o problema din Crux Mathematicorum), Revista de Matematică din Timişoara, anul XI, pp. 6-7, nr. 1/2006.

[8] D. Mărghidanu, *O metodă a lui Liouville de demonstrare a inegalitătilor*, Gazeta Matematică, seria A , Anul XXV (CIV), pp. 17-23, nr. 1/2007.

[9] D. Mărghidanu, *O demonstraţie simultană pentru inegalitatea directă şi inversă a mediilor*, Creaţii Matematice, seria A, Anul II, pp. 11-14, nr. 1 / 2007 .

[10] D. S. Mitrinović (în cooperation with P. M. Vasić), *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag , Band 165, Berlin, 1970.

[11] D. S. Mitrinović, J.E. Pecaric, A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Acad. Press., 1993.

[12] J. F. Steffensen, *Et bevis for Stætningen om, at det geometriscke Middeltal af positive Størrelser ikke er større end det aritmetske*, Mat. Tidskr., A, pp. 115-116, 1930.

Colegiul National Al. I. Cuza
Corabia
d.marghidanu@gmail.com

PROBLEME PROPUSE

243. Să se determine soluţiile, numere întregi, ale ecuaţiei

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = x^2y^2z^2.$$

Dan Radu

244. Fie $a, b, c > 0$ şi $p > -2$. Să se arate că

$$\frac{2a^2 + (1+2p)bc}{b^2 + pbc + c^2} + \frac{2b^2 + (1+2p)ca}{c^2 + pca + a^2} + \frac{2c^2 + (1+2p)ab}{a^2 + pab + b^2} \geq \frac{3(3+2p)}{2+p}.$$

Vasile Cârtoaje

245. Prove that for any positive real numbers x, y, z, the inequality

$$x^2y^2z^2\left(\frac{1}{x^6+y^3z^3}+\frac{1}{y^6+x^3z^3}+\frac{1}{z^6+x^3y^3}\right)\le\frac{3}{2}$$

holds.

Marian Tetiva

246. Fie a, b, c numere reale strict pozitive şi $n\ge 4$ un număr natural. Să se demonstreze că

$$\left(\frac{na}{b+c}+1\right)\left(\frac{nb}{c+a}+1\right)\left(\frac{nc}{a+b}+1\right)>(n+1)^2.$$ [1)]

Dan Coma

247. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c cu proprietatea că există o permutare a lor x, y, z astfel încât $z\le y\le x\le 8z$ şi $8y\le 27z$. Să se arate că

$$\max\left\{\left|\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right|^3,\left|\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right|^3,\left|\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}\right|^3\right\}\le\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}.$$

Ovidiu Pop

SOLUŢIILE PROBLEMELOR PROPUSE

223. a) *Fie $\mathcal{A}(a)$ mulţimea şirurilor mărginite de numere reale $(x_n)_n$ care satisfac relaţia de recurenţă*

$$x_n=nx_{n-1}-\frac{1}{a},\quad n\ge 1,$$

cu $x_0=1-\dfrac{1}{a}$, unde $a>0$, este un număr fixat. Să se determine a.

b) *Fie $\mathcal{B}(a)$ mulţimea şirurilor mărginite de numere reale $(x_n)_n$ care satisfac relaţia de recurenţă*

$$x_n=a-nx_{n-1},\quad n\ge 1,$$

cu $x_0=a-1$, unde $a>0$, este un număr fixat. Să se determine a.

Alexandru Lupaş şi **Andrei Vernescu**

Soluţia autorilor. a) Fie

$$I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\dots.$$

Din inegalităţile

$$0<I_n<\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1},$$

rezultă că şirul $(I_n)_n$ este mărginit (chiar mai mult, convergent la 0).

Avem

$$I_0=1-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Efectuând o integrare prin părţi, obţinem

$$I_n=-\frac{1}{\mathrm{e}}+nI_{n-1}\quad(n\ge 1).\tag{1}$$

[1)] Problema de faţă constituie o generalizare a problemei 2.33, pag. 27, din volumul L. Panaitopol, V. Băndilă, M. Lascu, *Inegalităţi*, Editura GIL, Zalău, 1996. (N.A.)

Deci şirul $(I_n)_n$ satisface relaţia de recurenţă din enunţ, pentru $a = \mathrm{e}$.

Prin urmare, $(I_n)_n \in \mathcal{A}(\mathrm{e})$, aşadar, există mulţimi $\mathcal{A}(a)$ nevide.

În vederea exprimării integralei I_n ca funcţie doar de n, o cale rapidă este ca în relaţia

$$I_k = -\frac{1}{\mathrm{e}} + kI_{k-1} \tag{1'}$$

să introducem notaţia

$$I_k = k!A_k \tag{2}$$

(unde $(A_k)_k$ este un alt şir, care va fi determinat).

Obţinem

$$A_k = -\frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \frac{1}{k!} + A_{k-1}, \tag{1''}$$

iar apoi, introducând succesiv valorile $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ şi adunând relaţiile obţinute, găsim

$$A_n = \frac{1}{\mathrm{e}}(\mathrm{e} - E_n), \tag{3}$$

unde am notat $E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ (şi am ţinut seama că $A_0 = I_0 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$).

Din (2) şi (3), rezultă

$$I_n = \frac{n!}{\mathrm{e}}(\mathrm{e} - E_n). \tag{4}$$

Fie acum $(x_n)_n$ un şir oarecare din $\mathcal{A}(a)$. Din egalitatea

$$x_{n-1} = \frac{1}{n}\left(x_n + \frac{1}{a}\right),$$

(obţinută din enunţ) şi, ţinând seama de ipoteza de mărginire, rezultă că şirul $(x_n)_n$ este convergent către 0.

Urmând, însă, exact procedeul folosit pentru explicitarea şirului $(I_n)_n$, obţinem

$$x_n = \frac{n!}{a}(a - E_n). \tag{5}$$

Din această relaţie şi din faptul că $x_n \to 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(a - E_n) = 0$, deci $a = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$, adică $a = \mathrm{e}$.

Observaţie. Mai rezultă că singura mulţime $\mathcal{A}(a)$ este $\mathcal{A}(\mathrm{e})$. Mai departe, considerând un şir oarecare $(x_n)_n$ din $\mathcal{A}(\mathrm{e})$, înlocuind în (5) $a = \mathrm{e}$, rezultă, conform (4), că $x_n = I_n$. Deci $\mathcal{A}(e) = \{(I_n)_n\}$.

b) Fie:

$$J_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Din inegalităţile

$$0 < J_n < \mathrm{e}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{n+1},$$

rezultă că şirul $(J_n)_n$ este mărginit (chiar mai mult, convergent la 0).

Avem

$$J_0 = \mathrm{e} - 1.$$

Efectuând o integrare prin părţi, obţinem

$$J_n = \mathrm{e} - nJ_{n-1} \quad (n \geq 1). \tag{6}$$

Deci şirul $(J_n)_n$ satisface relaţia de recurenţă din enunţ, pentru $a = \mathrm{e}$.

Prin urmare, $(J_n)_n \in \mathcal{B}(\mathrm{e})$, aşadar, există mulţimi $\mathcal{B}(a)$ nevide.

În vederea exprimării integralei J_n ca funcţie doar de n, o cale rapidă este ca în relaţia

$$J_k = \mathrm{e} - kJ_{k-1} \tag{6'}$$

să introducem notaţia

$$J_k = (-1)^k k! B_k \tag{7}$$

(unde $(B_k)_k$ este un şir, care va fi determinat).

Obţinem

$$B_k = \frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{e} + B_{k-1},$$

de unde, introducând succesiv valorile $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ şi adunând relaţiile obţinute, găsim

$$B_n = \mathrm{e}\left(\widetilde{E}_n - \frac{1}{\mathrm{e}}\right). \tag{8}$$

unde am notat $\widetilde{E}_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$ (şi am ţinut seama că $B_0 = J_0 = \mathrm{e} - 1$).

Din (7) şi (8), rezultă

$$J_n = (-1)^n n! \left(\widetilde{E}_n - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \cdot \mathrm{e}.$$

Fie acum $(x_n)_n$ un şir oarecare din $\mathcal{B}(a)$.

Din egalitatea

$$x_{n-1} = \frac{1}{n}(a - x_n),$$

şi din ipoteza de mărginire, rezultă că şirul $(x_n)_n$ este convergent către 0.

Exact ca pentru şirul $(J_n)_n$, obţinem

$$x_n = (-1)^n n! \left(\widetilde{E}_n - \frac{1}{a}\right) \cdot a.$$

Din această relaţie şi din faptul că $x_n \to 0$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \left(\widetilde{E}_n - \frac{1}{a}\right) = 0,$$

deci

$$\frac{1}{a} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{E}_n,$$

adică

$$a = \mathrm{e}.$$

Observaţie. Ca şi la punctul a), singura mulţime $\mathcal{B}(a)$ este $\mathcal{B}(\mathrm{e})$ şi, în plus, $\mathcal{B}(\mathrm{e}) = \{(J_n)_n\}$.

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad.

a) Relaţia de recurenţă se mai poate scrie în forma

$$\frac{x_n}{n!} = \frac{x_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n!},$$

unde $n \geq 1$, ceea ce ne conduce la

$$\frac{x_n}{n!} = \frac{x_0}{0!} - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n!} + \cdots + \frac{1}{1!}\right) = 1 - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n!} + \cdots + \frac{1}{1!} + 1\right)$$

(prin iterare şi adunarea tuturor egalităţilor obţinute).

Cum

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \mathrm{e},$$

rezultă că, pentru orice şir $(x_n)_n$ din $\mathcal{A}(a)$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n!} = 1 - \frac{\mathrm{e}}{a}.$$

Acum, probabil că cerinţa problemei este: să se determine a astfel încât mulţimea $\mathcal{A}(a)$ să fie nevidă. Este clar că, dacă limita lui $x_n/n!$ este nenulă, atunci (x_n) nu are cum să fie mărginit (el ar avea limita ∞ sau $-\infty$), deci necesar pentru ca $\mathcal{A}(a)$ să fie nevidă ar fi ca

$$1 - \frac{\mathrm{e}}{a} = 0 \quad \text{i.e.} \quad a = \mathrm{e}.$$

Această condiţie este şi suficientă deoarece, în acest caz, şirul (x_n) este dat de

$$\frac{x_n}{n!} = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right),$$

adică de

$$x_n = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot n!(\mathrm{e} - E_n),$$

unde

$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots \frac{1}{n!}.$$

Limita $\lim\limits_{n\to\infty} n!(\mathrm{e} - E_n) = 0$ fiind cunoscută (se poate obţine, de exemplu, cu teorema *Cesàro-Stolz* în cazul $\dfrac{0}{0}$ şi tot astfel se poate da evaluarea mai precisă $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot n!(\mathrm{e} - E_n) = 1$), găsim $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (sau chiar $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$), deci şirul $(x_n)_n$, fiind convergent, este şi mărginit.

Pentru punctul b) procedăm asemănător (şi facem o presupunere analoagă referitoare la ceea ce ne cere, de fapt, enunţul); relaţia de recurenţă se rescrie în forma

$$\frac{(-1)^n x_n}{n!} = a \cdot \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1} x_{n-1}}{(n-1)!},$$

şi ne conduce la

$$\frac{(-1)^n x_n}{n!} = a \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1$$

şi apoi la concluzia că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n x_n}{n!} = \frac{a}{\mathrm{e}} - 1$$

(folosind iar rezultatul notoriu $\mathrm{e}^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$).

Prin urmare, o condiţie necesară pentru ca mulţimea $\mathcal{B}(a)$ să conţină cel puţin un şir mărginit este ca $\dfrac{a}{\mathrm{e}} - 1 = 0$, echivalent cu $a = \mathrm{e}$.

Atunci avem

$$\frac{(-1)^n x_n}{n!} = \mathrm{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 = \mathrm{e}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty} n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 0$$

se calculează uşor (cum am arătat şi mai sus), deci iar rezultă $(x_n)_n$ convergent la 0, prin urmare mărginit.

Să mai remarcăm că, într-o formulare mai naturală, problema ne spune că şirul $(x_n)_n$ de la punctul a) (şi la fel acela de la punctul b)) este mărginit dacă şi numai dacă $a = e$, precum şi că acest enunţ rămâne adevărat (cu aceeaşi demonstraţie) dacă înlocuim cuvântul „mărginit“ cu „convergent“. Punctul a) al problemei s-a dat la etapa finală a Olimpiadei Naţionale de Matematică în 1980 (problema **3** de la clasa a XI-a); enunţul de acolo este echivalent, chiar dacă nu identic.

Nota redacţiei. Soluţii similare cu cea de a doua soluţie au mai dat şi domnii *Róbert Szász* de la Universitatea Sapientia din Târgu Mureş şi *Marius Olteanu*, inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt Superior“ din Râmnicu-Vâlcea. De asemenea, o soluţie corectă a dat şi domnul *Ioan Ghiţă* de la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj.

224. F*ie E un spaţiu vectorial de dimensiune* 4 *peste* $\mathbb{R}$ *şi* $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *o bază a lui* E*. Matricea unui endomorfism* $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ *în raport cu baza* B *este*

$$B(u) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -5 & -6 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) *Fie* $a_1 = e_1 - e_2$, $a_2 = e_2 + e_4$, $a_3 = e_3$ *şi* $F = Sp\{a_1, a_2, a_3\}$. *Să se arate că* F *este stabil relativ la endomorfismul* $\psi = 2id_E - u$. *Se notează cu* v *restricţia lui* ψ *la* F. *Să se arate că* v *este nilpotent de ordinul* 3.

b) *Fie* $f_1 = 2e_1 - e_2 - e_3 + e_4$, $f_2 = -v(f_1)$, $f_3 = -v(f_2)$. *Să se arate că* $\{f_1, f_2, f_3\}$ *constituie o bază în* F. *Să se determine* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *astfel încât vectorul* $f_4 = e_1 + \alpha e_2 + \beta e_3 + \gamma e_4$ *să aparţină nucleului endomorfismului* $\varphi = 3\mathrm{id}_E - u$.

c) *Să se arate că* $C = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ *constituie o bază în* E *şi să se scrie matricea* $C(u)$ *a lui* u *în raport cu această bază. Să se indice matricile de transfer între bazele* B *şi* C. *Să se calculeze* $C^n(u)$, *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

d) *Se consideră polinomul* $p \in \mathbb{R}[x]$:

$$p(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24.$$

Să se arate că endomorfismul $\theta_\lambda = \lambda id_E - u$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ *este automorfism dacă şi numai dacă* $p(\lambda) \neq 0$. *Să se precizeze rangul lui* θ_λ *în funcţie de* λ.

Dan Radu

Soluţia autorului. a) Un calcul imediat ne arată că

$$\begin{aligned}\psi(a_1) &= -a_1 - a_2\\ \psi(a_2) &= 2a_1 + 2a_2 - a_3\\ \psi(a_3) &= a_1 + a_2 - a_3\end{aligned}$$

şi deci $\psi(F) \subseteq F$.

Mai mult decât atât, deoarece familia $\{a_1, a_2, a_3\}$ este liniar independentă, ea va fi o bază în F şi deci matricea lui V în raport cu această bază va fi

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A proba că V este nilpotent de ordinul 3 revine la a verifica faptul că $A^2 \neq 0$, iar $A^3 = 0$, lucru ce se verifică imediat.

b) Evident, $f_1 = 2a_1 + a_2 - a_3 \in F$ şi deci şi $f_2, f_2 \in F$.

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0. \tag{1}$$

Să aplicăm egalităţii de mai sus v, respectiv v^2. Cum $v(f_3) = -v^2(f_2) = v^3(f_3) = 0$, iar $v^2(f_2) = -v^3(f_1) = 0$, va rezulta că

$$-\lambda_1 f_2 - \lambda_2 f_3 = 0 \quad \text{şi} \quad \lambda_1 f_3 = 0. \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) decurge imediat că $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ şi deci familia $\{f_1, f_2, f_3\}$ este liniar independentă, de unde conchidem că este o bază în F.

Punând condiţia ca f_4 să aparţină lui $\ker\varphi$, rezultă sistemul

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta - \gamma = -3\\ 3\alpha - 2\gamma = -2\\ -2\alpha + \gamma = 2\\ 6\alpha + \beta - 3\gamma = -5 \end{cases},$$

cu soluţia unică $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$.

c) Pentru a arăta că C este o bază în E, este suficient să arătăm că $f_4 \notin F = Sp\{f_1.f_2, f_3\}$. Să presupunem contrariul. Vom observa, mai întâi, că

$$\psi = \varphi \mathrm{id}_E$$

şi deci

$$\psi^3 = \varphi^3 - 3\varphi^2 + 3\varphi - \mathrm{id}_E. \tag{3}$$

Deoarece am presupus că $f_4 \in F$, avem

$$\psi^3(f_4) = v^3(f_4) = 0.$$

Pe de altă parte

$$\varphi^3(f_4) = \varphi^2(f_4) = \varphi(f_4) = 0$$

şi deci, aplicând egalitatea (3) lui f_4, am ajunge la concluzia absurdă că $f_4 = 0$. Rămâne că $f_4 \notin F$ şi deci C este o familie liberă maximală (deoarece $\dim_{\mathbb{R}} E = 4$), adică o bază în E.

Pentru a scrie matricea $C(u)$ în baza C, să observăm că

$$\begin{aligned} u(f_1) &= (2\mathrm{id}_E - v)(f_1) = 2f_1 - v(f_1) = 2f_1 + f_2 \\ u(f_2) &= (2\mathrm{id}_E - v)(f_2) = 2f_1 - v(f_2) = 2f_2 + f_3 \\ u(f_3) &= (2\mathrm{id}_E - v)(f_3) = 2f_3 - v(f_3) = 2f_3 \\ u(f_4) &= (3\mathrm{id}_E - v)(f_4) = 3f_4 - v(f_4) = 3f_4 \end{aligned},$$

şi deci

$$C(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pentru a scrie matricea P de trecere de la baza B la baza C, să calculăm pe f_2 şi f_3 în funcţie de elementele bazei B. Vom avea:

$$f_2 = -v(f_1) = e_1 + e_4$$

$$f_3 = -v(f_2) = e_1 - e_3 + e_4.$$

Urmează atunci că

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

şi deci matricea de trecere de la baza C la baza B este

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pentru calculul lui $C^n(u)$ să observăm că $C(u)$ se poate reprezenta sub forma $C(u) = D+R$, unde

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

După cum se verifică uşor $DR = RD$ şi deci se poate folosi formula lui *Newton*:

$$C^n(u) = (D+R)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^{n-k} R^k.$$

Dar R este nilpotentă de ordinul 3 şi deci

$$C^n(u) = D^n + nD^{n-1}R + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2}R^2 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n & 0 & 0 \\ n(n-1)2^{n-3} & n \cdot 2^{n-1} & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

d) Matricea lui θ_λ în baza B va fi

$$M(\theta_\lambda) = M(\lambda \mathrm{id}_E - u) = \lambda I - M(u).$$

Prin urmare, θ_λ va fi automorfism dacă şi numai dacă $M(\theta_\lambda)$ este nesingulară ceea ce este echivalent cu faptul că $\det|\lambda I - M(u)| \neq 0$. Un calcul imediat ne arată că $\det|\lambda I - M(u)| = p(\lambda)$, ceea ce justifică afirmaţia din enunţ. Pe de altă parte, ecuaţia $p(\lambda) = 0$ are rădăcina triplă $\lambda_1 = 2$ şi rădăcina simplă $\lambda_2 = 3$. Urmează că pentru $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{2, 3\}$, $rg\theta_\lambda = 4$. Pentru $\lambda_1 = 2$ vom avea

$$rg\theta_2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}\theta_2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}(2id_E - u) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}\psi = 3,$$

iar pentru $\lambda_2 = 3$, respectiv

$$rg\theta_3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}\theta_3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}(3id_E - u) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}\varphi = 4 - \dim_{\mathbb{R}} \ker\varphi = 4 - 1 = 3.$$

225. *For all* $n \geq 1$ *holds*:

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}\right] = \left[\frac{3n+5}{6}\right],$$

where $[\,.\,]$ *denotes the integer part.*

Mihály Bencze

Soluţia autorului. Este cunoscut faptul că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{3}} < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{n}} \qquad (*)$$

(vezi „Numărul e şi matematica exponenţialei“, *Andrei Vernescu*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2004, pagina 140.)

Din $(*)$ obţinem

$$k+\frac{1}{3} < \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < k+\frac{1}{2},$$

de unde

$$\frac{n(3n+5)}{6} = \sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{3}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+2)}{2}.$$

Prin urmare

$$\frac{3n+5}{6} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \frac{3n+5}{6}+\frac{1}{6} < \frac{3n+5}{6}+1,$$

deci

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}\right] = \left[\frac{3n+5}{6}\right].$$

Soluţie dată de *Marius Olteanu*, inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt Superior“ din Râmnicu-Vâlcea.

Vom studia două cazuri, după cum n este par sau impar.

Cazul 1: $n = 2p$, $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$.

Avem

$$\left[\frac{3n+5}{6}\right] = \left[\frac{6p+5}{6}\right] = \left[p+\frac{5}{6}\right] = p. \qquad (1)$$

Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

Folosind teorema lui *Lagrange*, deducem existenţa unui $x_k \in (k, k+1)$, astfel încât

$$\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{x_k},$$

adică

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{x_k},$$

de unde

$$\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} = x_k > k,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \sum_{k=1}^{n} x_k > \sum_{k=1}^{n=2p} k = 1+2+\cdots+2p = p(2p+1),$$

de unde

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} > \frac{1}{n}\cdot p(2p+1) = \frac{2p+1}{2} = p+\frac{1}{2}.$$

Aşadar

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} > p+\frac{1}{2}. \tag{2}$$

Se ştie că $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) > \frac{2}{2x+1}$, pentru orice $x>0$ (vezi [1], pag. 277, ex. 6.4.18), deci

$$\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \frac{2k+1}{2},$$

pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

Atunci

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}\right] = \frac{1}{2}+\frac{n+1}{2} = \frac{n}{2}+1 = p+1. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă că

$$p+\frac{1}{2} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < p+1,$$

deci

$$\left[\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}\right] = p,$$

q.e.d. conform relaţiei (1).

Cazul 2. $n=2t+1$, $t\in\mathbb{N}$. Procedând ca în cazul anterior, avem

$$\left[\frac{3n+5}{6}\right] = \left[\frac{6t+8}{6}\right] = \left[t+\frac{4}{3}\right] = t+1. \tag{4}$$

Conform celor expuse anterior rezultă

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} > \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1+2+\cdots+(2t+1)}{n} = t+1 \tag{5}$$

şi

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < \frac{n}{2}+1 = \frac{2t+1}{2}+1 = t+1+\frac{1}{2}. \tag{6}$$

Din (5) şi (6), deducem

$$t+1 < \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} < t+1+\frac{1}{2},$$

de unde

$$\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}\right] = t+1,$$

q.e.d. conform (4).

Bibliografie

[1] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral, vol.* II (*Exerciţii*), Editura Şiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

Soluţie dată de *Róbert Szász*, Universitatea Sapientia din Târgu-Mureş. Pentru $x \in (-1, 1]$ avem dezvoltarea

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots,$$

de unde rezultă că

$$\ln(1+x) \leq x, \tag{1}$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Vom demonstra că

$$\frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x), \tag{2}$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Fie

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x},$$

unde $x \in [0, 1]$.

Atunci

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(2+x) - 2x}{(2+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \geq 0,$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Rezultă că funcţia f este crescătoare şi, pentru $x \geq 0$, rezultă $f(x) \geq f(0) = 0$. Deci are loc (2). Din (1) şi (2), deducem că

$$\frac{1}{k + \frac{1}{2}} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k},$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, iar de aici obţinem

$$\frac{n+2}{2} > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} > \frac{n+1}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 2p$, rezultă că

$$p + 1 > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} > \frac{2p+1}{2} = p + \frac{1}{2}.$$

Atunci

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}\right] = p$$

şi

$$\left[\frac{3n+5}{6}\right] = \left[p + \frac{5}{6}\right] = p,$$

deci are loc egalitatea.

Pentru $n = 2p + 1$ obţinem

$$p + 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)} > p + 1$$

şi deci

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}\right]=p+1$$

şi

$$\left[\frac{3n+5}{6}\right]=\left[p+1+\frac{1}{3}\right]=p.$$

Prin urmare şi în acest caz egalitatea este valabilă, q.e.d.

Nota redacţiei. O soluţie corectă a dat şi domnul *Ioan Ghiţă* de la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj.

226. *Calculate*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right)^2+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(j+1)^2}\right]\right\}.$$

José Luis Díaz-Barrero

Soluţie dată de *Róbert Szász*, Universitatea Sapientia din Târgu-Mureş.

Fie

$$S_n^1\overset{\text{not}}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right)^2+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(j+1)^2}\right].$$

Observăm că

$$S_k^2\overset{\text{not}}{=}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right)^2+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(j+1)^2}=2\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i+1}\right)=$$

$$=2\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\int_0^1\frac{x-x^{j+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x=$$

$$=2\int_0^1\left[\frac{x}{1-x}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right)-\frac{1}{1-x}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^{j+1}}{j+1}\right)\right]\mathrm{d}x=$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\int_0^1\frac{t-t^{k+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{1-x}\int_0^x\frac{t-t^{k+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

Dar cum

$$\int_0^1\frac{t-t^{k+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\dfrac{u}{x}-\left(\dfrac{u}{x}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{u}{x}}\,\mathrm{d}u,$$

rezultă că

$$S_k^2=2\int_0^1\frac{1}{1-x}\left(\int_0^x\frac{\dfrac{u}{x}-\left(\dfrac{u}{x}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{u}{x}}\,\mathrm{d}u-\int_0^x\frac{u-u^{k+1}}{1-u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

Deducem că

$$S_n^1=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}S_k^2=2\int_0^1\frac{1}{1-x}\left(\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}\frac{\dfrac{u}{x}-\left(\dfrac{u}{x}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{u}{x}}\,\mathrm{d}u-\right.$$

$$\left.-\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}\frac{t-t^{k+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t\right).$$

Observăm că
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}\frac{t-t^{k+1}}{1-t}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}\frac{t-t^{k+1}}{1-t}=$$
$$=\frac{1}{n+1}\left(t\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}t^{k+1}\right)\frac{1}{1-t}=$$
$$=\frac{1}{(n+1)(1-t)}\left(tn-(-1+(n+1)t+(1-t)^{n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{(1-t)(n+1)}\left(1-t-(1-t)^{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(1-(1-t)^{n}\right).$$
În mod analog
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}\frac{\frac{u}{x}-\left(\frac{u}{x}\right)^{k+1}}{1-\frac{u}{x}}=\frac{1}{n+1}\left(1-\left(1-\frac{u}{x}\right)^{n}\right)$$
şi deducem că
$$S_n^1=\int\limits_0^1\frac{1}{1-x}\left[\int\limits_0^x\frac{1}{n+1}\left(1-\left(1-\frac{u}{x}\right)^n\right)\mathrm{d}u-\int\limits_0^x\frac{1}{n+1}\left(1-(1-t)^n\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{2}{n+1}\int\limits_0^1\frac{1}{1-x}\left(\int\limits_0^x(1-t)^n\mathrm{d}t-\int\limits_0^x\left(1-\frac{u}{x}\right)^n\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$
Integralele care apar în ultima formă a lui S_n^1 se pot calcula şi obţinem
$$S_n^1=\frac{2}{(n+1)^2}\int\limits_0^1\frac{1}{1-x}\left(1-x-(1-x)^{n+1}\right)\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{2}{(n+1)^2}\int\limits_0^1\left(1-(1-x)^n\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$
Prin urmare
$$\lim_{n\to\infty}n^2S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2.$$

227. *Să se arate că* $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{2}$, *pentru orice* $x\in[0,1]$, *şi orice* $k\in\{1,\dots,n-1\}$, *unde* $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Ovidiu Pop

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. Se verifică imediat, cu ajutorul derivatei, că funcţia dată prin
$$f(x)=x^k(1-x)^{n-k},\quad x\in[0,1],$$
îşi atinge maximul în $\frac{k}{n}$, deci
$$f(x)\leq f\left(\frac{k}{n}\right),$$
pentru orice $x\in[0,1]$.

Atunci
$$\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\binom{n}{k}\frac{k^k(n-k)^{n-k}}{n^n}$$

şi inegalitatea din enunţ ar rezulta dacă am putea demonstra că

$$\binom{n}{k}\frac{k^k(n-k)^{n-k}}{n^n} \le \frac{1}{2},$$

pentru orice număr natural $n \ge 2$ şi orice $1 \le k \le n-1$.

La rândul ei, această inegalitate se scrie în forma

$$\frac{x_n}{x_k x_{n-k}} \le \frac{1}{2},$$

dacă notăm

$$x_n = \frac{n!}{n^n},$$

pentru orice $n \ge 1$.

Se calculează imediat (şi, de altfel, este bine cunoscut) că

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{e_{n-1}},$$

pentru orice $n \ge 2$, unde am notat

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \ge 1.$$

De aici rezultă

$$\frac{x_n}{x_{n-k}} = \frac{1}{e_{n-1} \cdot \ldots \cdot e_{n-k}}$$

şi

$$x_n = \frac{x_n}{x_1} = \frac{1}{e_{n-1} \cdot \ldots \cdot e_1},$$

astfel că inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{e_{k-1} \cdot \ldots \cdot e_1}{e_{n-1} \cdot \ldots \cdot e_{n-k}} \le \frac{1}{2}.$$

Dar aceasta rezultă imediat folosind monotonia şirului (e_n) (despre care ştim foarte bine că este strict crescător); într-adevăr, toate fracţiile

$$\frac{e_{k-l}}{e_{n-1}}, \ldots, \frac{e_1}{e_{n-k+1}}$$

sunt mai mici sau egale cu 1, iar

$$\frac{1}{e_{k-l}} \le \frac{1}{2}$$

($e_n \ge 2$ pentru orice $n \ge 1$).

Demonstraţia este încheiată.

Soluţie dată de *Róbert Szász*, Universitatea Sapientia din Târgu-Mureş. Observăm că

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1. \tag{1}$$

Fie $T_{k+1} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Vom arăta că

$$T_{k+1} \le T_k + T_{k+2}. \tag{2}$$

Inegalitatea (2) este echivalentă cu

$$1 \le \frac{1-x}{x} \cdot \frac{k}{n-k+1} + \frac{x}{1-x} \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

Notăm $a = \dfrac{1-x}{x}$ şi obţinem

$$1 \le a \cdot \frac{k}{n-k+1} + \frac{1}{a} \cdot \frac{n-k}{k+1},$$

inegalitate care este echivalentă cu

$$0 \leq \frac{n-k}{k+1} - a + \frac{k}{n-k+1} \cdot a^2.$$

Fie $\Delta_a = 1 - 4 \cdot \dfrac{(n-k)k}{(n-k+1)(k+1)} = \dfrac{-3nk + n + 3k^2 + 1}{n-k+1}$.

Atunci $\Delta_a \leq 0$ dacă şi numai dacă $n \geq \dfrac{3k^2+1}{3k-1}$, însă această ultimă inegalitate rezultă din şirul de inegalităţi

$$n \geq k + 1 \geq \frac{3k^2+1}{3k-1}.$$

Având în vedere că dacă $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, atunci pentru T_{k+1} există T_k şi T_{k+2}, din (1) şi (2) rezultă

$$T_{k+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Nota redacţiei. Soluţii corectă ale problemei au dat şi domnii *Marius Olteanu*, inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea şi domnul *Ioan Ghiţă*, profesor la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj.

ISTORIA MATEMATICII

Trei sute de ani de la naşterea unui geniu universal al matematicii, Leonhard Euler

de Constantin P. Niculescu şi Andrei Vernescu

În ziua de 15 aprilie a anului curent s-au împlinit trei secole de la naşterea celui care avea să devină unul dintre cei mai mari matematicieni ai tuturor timpurilor, *Leonhard Euler* (1707-1783).

Importanţa şi vastitatea fabuloasei sale opere, privitoare la toate ramurile matematicii secolului al XVIII-lea (precum şi la însemnate capitole din mecanică, fizică şi astronomie) este atât de covârşitoare, încât astăzi în aproape orice demers matematic, se întâlneşte, într-un fel sau altul un rezultat, o noţiune sau măcar o notaţie introdusă de către *Euler*.

La trei secole de la naştere, i se aduce cuvenita comemorare, prin organizarea de Congrese, Conferinţe şi Simpozioane de către Societăţi academice şi Universităţi, prin republicarea de selecţiuni din opera sa sau de lucrări speciale care îi sunt destinate. Totul sub deviza atât de înţeleaptă a altui mare matematician, *Pierre-Simon Laplace* (1749-1827) „Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous!"

În această prezentare vom căuta să evocăm pe scurt câteva repere ale vieţii genialului savant, cât şi câteva dintre rezultatele sale cele mai importante.

Leonhard Euler s-a născut la 15 aprilie 1707 în oraşul Basel (fr. Bâle) în familia unui pastor calvin. Oraşul Basel, situat pe Rin, la întâlnirea frontierelor Elveţiei, Franţei şi Germaniei, se bucura de prosperitate economică şi culturală şi avea o Universitate proprie. Tatăl lui *Leonhard*, *Paul Euler* era căsătorit cu *Marquerite Brucker* şi îşi exercita profesiunea în mica localitate Riechen, de lângă Basel. Dar el avea şi frumoase cunoştinţe de matematică, pe care le va transmite fiului. Într-adevăr, micul *Leonhard* îşi începe învăţătura în casa părintească, sub directa îndrumare a tatălui său, de la care va căpăta primele cunoştinţe de matematică, ştiinţă care se va transforma în pasiune şi scop în viaţă.

Dar, după cum vom arăta şi noi, viaţa familiei *Euler*, ca şi activitatea ştiinţifică a lui *Leonhard Euler* este strâns legată de cea a familiei *Bernoulli*! Această familie (care la sfârşitul secolului al XVI-lea se refugiase de la Anvèrs (Belgia) ca să scape de persecuţiile religioase ale ducelui de Alba, din timpul ocupaţiei spaniole a Ţărilor de Jos), constituie un caz unic în istoria ştiinţelor, deoarece a dăruit comunităţii ştiinţifice mai multe generaţii de remarcabili savanţi (matematicieni şi mecanicieni). Revenind la *Paul Euler*, este interesant de menţionat că acesta, când studiase teologia la Universitatea din Basel, audiase şi cursurile de matematică ale lui *Jacques*

(*Jacob*) *Bernoulli* (1654-1705). Totodată *Paul Euler* şi *Jean* (*Johann*) *Bernoulli* I[1] (1667-1748), fratele mai mic al lui *Jacques Bernoulli* au locuit, în timpul studiilor universitare în locuinţa lui *Jacques Bernoulli*. *Paul* avea să devină pastor, iar *Jean* I matematician şi apropiat al lui *Leibniz*. Prietenia dintre *Paul* şi *Jean* I avea să se transmită şi fiilor lor *Leonhard Euler* şi respectiv cei trei fii ai lui *Jean Bernoulli* I, anume *Nicolas Bernoulli* II (1695-1726), *Daniel Bernoulli* (1700-1782) şi *Jean Bernoulli* II (1710-1790).

Cum spuneam, foarte de tânăr, *Leonhard Euler* capătă primele cunoştinţe de matematică de la tatăl său. Acesta, deşi intenţiona iniţial ca fiul său să urmeze tot cariera ecleziastică, a considerat că aceste cunoştinţe îi pot fi utile, inclusiv prin puterea ordonatoare a gândirii, pe care o au. În 1720, la numai 13 ani, tânărul *Leonhard* îşi începe studiile de filozofie la Universitatea din Basel, unde, cu o memorie extraordinară, îşi formează o solidă cultură însuşindu-şi totodată şi limba oficială a ştiinţei, de atunci, latina. În toată perioada 1720-1723, *Euler* va avea puterea să-şi cultive şi pasiunea pentru matematică, fiind ajutat acum de un profesionist, deoarece profesorul său *Jean Bernoulli* I îi acordă întregul său sprijin. El se întâlnea săptămânal cu tânărul *Euler*, pentru a risipi neclarităţile ce eventual le-ar fi întâmpinat acesta în studiul lucrărilor ce i le recomanda. În casa profesorului *Jean Bernoulli* I, *Euler* s-a împrietenit cu cei trei fii ai acestuia, *Nicolas* II, *Daniel* şi *Jean* II.

În 1723, la numai 16 ani, *Euler* finalizează cursurile de filozofie şi susţine, în limba latină, discursul de absolvire, în care face o comparaţie între ideile filozofice ale lui *Descartes* şi cele ale lui *Newton*, obţinând astfel titlul de magister. Începe apoi, neîntârziat, studiul limbii ebraice şi teologiei, exact aşa cum dorea tatăl său, pe care reuşeşte să şi le însuşească foarte bine, datorită memoriei sale prodigioase, dar simte cum atracţia sa pentru matematică devine tot mai puternică. Apoi, la sfatul şi insistenţele profesorului său de matematică *Jean Bernoulli* I, care-i descoperise talentul extraordinar pentru această ştiinţă, tatăl său, consimte ca *Leonhard* să se orienteze de la studiul teologiei la cel al matematicii. Poate că prietenia lui *Euler*-tatăl cu *Jean Bernoulli* I, din timpul studenţiei lor să fi contribuit la această decizie înţeleaptă şi binefăcătoare! Acum drumul lui *Leonhard Euler* în matematică este complet deschis! Tânărul *Leonhard* începe să obţină succese strălucite în studiul matematicii şi în lucrările sale de cercetare.

În 1726 *Euler* şi-a terminat studiile de matematică la Universitatea din Basel. Istoricii matematicii consideră că lucrările citite de *Euler* în acest timp, la sfatul lui *Jean Bernoulli* I trebuie să fi fost opere ale lui *Galilei*, *Varignon*, *Descartes*, *Newton*, *Van Schooten*, *Jacques Bernoulli*, *Hermann*, *Taylor*, *Napier* şi *Wallis*.

Acum, tânărul de numai 19 ani, *Leonhard Euler*, îşi va căuta un post academic pe măsura pregătirii şi talentului său.

Prietenii săi ceva mai vârstnici, *Nicolas* şi *Daniel Bernoulli* se aflau deja la Sankt Petersburg, unde lucrau la Academia de Ştiinţe, fondată în 1725 de către împărăteasa *Ecaterina* I, soţia lui *Petru cel Mare* şi îi promiseseră că îl vor chema acolo de îndată, dacă un post pe măsura lui *Euler* se va ivi. Între timp, *Euler* încearcă să obţină un post de profesor la Universitatea din Basel, dar în locul lui este numit altcineva. Iată cum, celui care avea să fie cel mai mare matematician al Elveţiei, i se refuză un post universitar! (Poate şi vârsta de doar 19 ani a candidatului *Euler* a influenţat decizia, dar este sigur că nu peste mult timp, Universitatea din Basel va regreta amarnic refuzul din 1726!). În 1727 *Euler* pleacă la Sankt-Petersburg, unde fusese invitat încă din anul precedent, dar pe un post de profesor de fiziologie. Călătoria a durat din 5 aprilie 1727 până în 17 mai 1727. Între timp, în 1726, *Nicolas Bernoulli* II îşi pierduse viaţa, la numai 31 de ani, din cauza unei stupide apendicite! La cererea lui *Jakob Herman* şi al lui *Daniel Bernoulli*, *Euler* este trecut la secţia de matematică-fizică a Academiei. Devine academician. *Daniel Bernoulli* era şeful secţiei de matematică, dar el nu se putea adapta bine acestui oraş nordic şi, în 1733 se întoarce definitiv în Elveţia, unde îşi continuă cariera universitară. *Euler* este numit noul şef al secţiei de matematică-fizică. În ianuarie 1734 *Euler* se căsătoreşte cu *Katharina Gsell*, fiica unui pictor elveţian stabilit la Sankt-Petersburg. Vor avea 13 copii, din care vor supravieţui doar cinci; pe vremea aceea, ca şi ulterior, încă două secole, supravieţuirea în faţa agresiunii bolilor copilăriei nu era uşoară, deoarece, până la *Pasteur* nu existau vaccinurile, iar până la *Fleming* nu existau antibioticele...

La Sankt Petersburg, *Euler* a lucrat cu mult entuziasm şi cu mult spor. Putea discuta cu eminenţi matematicieni ai epocii, *Jakob Hermann*, *Daniel Bernoulli* (până în 1733, când s-a întors în Elveţia), *Christian Goldbach* şi alţii. Obţinând în 1738 şi 1740 Marele Premiu al Academiei din Paris, *Euler* capătă o reputaţie excepţională şi astfel este invitat la Academia din Berlin de către

[1] Datorită faptului că în familia *Bernoulli* multe prenume s-au repetat, istoricii matematicii au adăugat cifre romane la numele acestora.

împăratul *Frederik cel Mare* al Germaniei. Iniţial preferă să rămână la Sankt-Petersburg, dar în 1741, când anumite tulburări politice, precum şi intrigile administraţiei fac viaţa străinilor dificilă, *Euler* acceptă. Trăise la Sankt-Petersburg 14 ani, timp în care obţinuse rezultate importante în toate domeniile matematicii, iar în perioada 1736-1737 scrisese şi o carte, intitulată Mechanica, în care prezenta pentru prima dată în mod sistematic dinamica newtoniană cu ajutorul instrumentului calculului diferenţial şi integral. Dar, din păcate, în 1735, şi datorită muncii încordate de cartografie, Euler începuse să aibă probleme cu vederea, iar în 1738, vederea cu ochiul drept era deja afectată. Va petrece la Berlin 25 de ani, până în 1766, timp în care scrie peste 380 de articole şi multe cărţi. Reputaţia sa ajunge la cote extraordinare. Dar, după moartea în 1759 a lui *Maupertuis*, care era preşedintele Academiei, *Frederick al II-lea* nu s-a orientat către *Euler*, aşa cum ar fi fost normal, ci a propus conducerea Academiei lui *d'Alembert*, care însă declină propunerea, nedorind să părăsească Parisul. Nici acum *Frederick al II-lea* nu-i propune lui *Euler* preşedinţia Academiei şi intervine în mod nepotrivit în treburile acesteia.

Probabil că *Euler* a fost afectat de nedreptatea făcută, dar el continuă să se ocupe de ceea ce era mai important, continuă să creeze în matematică. Între timp *Euler* este rechemat , în condiţii materiale foarte bune la Sankt Petersburg, unde va fi primit cu mari onoruri, în 1766. Va rămâne aici până la sfârşitul vieţii, continuând să lucreze neobosit, deşi vederea i se deteriorase mult, inclusiv la al doilea ochi, iar la 60 de ani devine complet orb. Anticipează astfel, poate mai dureros, drama lui *Beethoven*, care în 1819, la 49 de ani, avea să-şi piardă auzul, compunând în această situaţie, în ultimii opt ani ai vieţii. Dar ca şi *Beethoven*, despre care *Victor Hugo* a spus „Ce sourd entendait l'infini", pentru *Euler*, pierderea vederii nu a însemnat sistarea lucrului. Îl ajuta memoria sa cu adevărat fenomenală. Dicta la doi dintre fii săi *Johann-Albrecht Euler* (devenit fizician) şi *Christoph Euler*, ca şi la doi membri ai Academiei *W. L. Krafft* şi *A. J. Lexell*, precum şi tânărului matematician *N. Fuss*, care fusese invitat de către Academia din Elveţia şi se va căsători cu o nepoată de-a lui *Euler*. Este surprinzător că în perioada 1766-1783 *Euler* a creat mai mult de jumătate din opera sa! Atunci a creat aproape toate cărţile sale.

A fost membru al Academiei de Ştiinţe din Paris şi al Royal Society din Londra.

Se stinge în seara zilei de 18 septembrie 1783, după ce prima parte a zilei fusese cât se poate de obişnuită, dând o lecţie de matematică unuia din nepoţi şi discutând cu *Lexell* şi *Fuss* despre recent descoperita planetă Uranus. Lăsa în urma sa cea mai prolifică operă matematică din toate timpurile, inegalată încă. Este înmormântat la mânăstirea Alexandr Nevski.

A fixat notaţii definitive, a definit noţiuni şi concepte, a stabilit noi teorii şi mari direcţii de dezvoltare, a obţinut rezultate fundamentale în mai toate ramurile matematicii, cât şi nenumărate „perle" de o neasemuită frumuseţe. A fost cel mai mare descoperitor de formule, neajuns din urmă poate decât de Ramanujan (dar numai în direcţia formulelor, nu şi teoriilor !)

Revenind asupra vastităţii operei euleriene, reamintim că autorul ei a scris peste 1200 de articole (şi multe cărţi fundamentale) nefiind depăşit de niciunul din urmaşii săi cei mai prolifici *Cayley* (cu 966 de lucrări), *Cauchy* (cu 799 de lucrări) şi *Poincaré*. Publicarea operei complete, întreprindere încă nefinalizată, circa 70 de volume şi peste 16000 de pagini, a fost de mult începută şi se află în stadiu foarte avansat în Rusia, Germania şi Elveţia. A fost tradusă parţial în limbile franceză şi engleză (din limba latină, în care a fost scrisă la acea epocă).

Opera ştiinţifică a lui *L. Euler* fiind deosebit de vastă şi profundă, este dificil de răspuns care este realizarea sa cea mai mare (sau care sunt primele zece realizări ale sale).

The Mathematical Association of America are pe site-ul ei o rubrică *How Euler did it,* prezentată de Ed. Sandifer (profesor de matematici la Western Connecticut State University, din Danbury, U.S.A.). Adresa ei este

http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html.

Rubrica din februarie 2007, *Euler's Greatest Hits,* conţine o propunere pentru un Top 10, însoţită de comentarii foarte interesante.

Pentru matematica de liceu, numele lui *Euler* este legat în primul rând de cercul celor nouă puncte şi de dreapta lui *Euler*. Foarte populară este şi relaţia sa metrică

$$OI^2 = R(R - 2r),$$

(de care se leagă faptul că $R > 2r$ în toate triunghiurile diferite de cele echilaterale, unde $R = 2r$). Elevii claselor a XI-a pot afla despre constanta lui *Euler*

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$ [1]

[1] Tot Euler a dat şi generalizări ale acesteia (v. G. M. - A 1/2007, pp. 11-16).

iar cei de clasa a XII-a raţionalizează integrale utilizând diferite substituţii ale lui *Euler*. Cum am mai spus, *Euler* a fost un maestru al unei imense diversităţi de formule.

Euler a introdus multe din notaţiile curente: $\sum$ pentru sumă; simbolul e pentru baza logaritmilor naturali; a, b şi c pentru lungimile laturilor unui triunghi şi A, B şi C pentru mărimile unghiurilor opuse; simbolul π pentru numărul pi şi simbolul i pentru $\sqrt{-1}$.

Numele lui *Euler* rămâne însă în galeria geniilor matematicii pentru alte contribuţii:

1. Condiţia (necesară) *Euler-Lagrange* pentru ca o funcţie y să extremizeze o funcţională de forma $J = \int_a^b F(x, y, y')dx$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

Euler a rezolvat mai multe probleme inginereşti, precum săgeata unei console elastice, încovoierea grinzilor elastice supuse unor încărcări, calculul modurilor de încovoiere ale coloanelor etc.

2. Ecuaţia lui *Euler* din mecanica fluidelor incompresibile.

3. Formula produs

$$\prod_{p\ prim} \frac{1}{1 - 1/p^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

4. Calculul valorilor funcţiei zeta pentru valorile naturale pare $\left(\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},\ \mathrm{Re}(s) > 1\right)$.

În particular, formula

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Infinitudinea numerelor prime, legată de faptul $\sum_{p=prim} \frac{1}{p} = \infty$.

6. Problema celor şapte poduri din Königsberg (considerată a fi prima problemă de teoria grafurilor planare).

7. Formula combinatorică pentru poliedre convexe

$$V - M + F = 2,$$

unde V reprezintă numărul vârfurilor, M reprezintă numărul muchiilor, iar F reprezintă numărul feţelor. [1)]

8. Extensia funcţiei factorial la semidreapta $(0, \infty)$ şi apoi la planul complex exceptând numerele întregi negative. Este vorba de celebra sa funcţie gamma,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0,$$

care se extinde apoi la mulţimea din $\mathbb{C}$ menţionată mai sus şi pentru care $\Gamma(n + 1) = n!$, dacă $n \in \mathbb{N}$.

9. Extensia funcţiilor trigonometrice la planul complex şi formula

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Pentru $z = \pi$, ea devine $e^{i\pi} + 1 = 0$.

10. Formula $a^{\varphi(n)} \equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$, unde φ este funcţia indicatoare a lui *Euler*.

11. Partiţii şi funcţii generatoare. Vezi formula

$$\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} = x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + ...,$$

unde coeficientul lui x^k coincide cu numărul modurilor în care k se poate scrie ca suma a două numere naturale distincte şi nenule. Spre exemplu, $2x^5$ ne spune că $5 = 1 + 4 = 2 + 3$, adică 5 se poate descompune în două moduri. Formule de acest tip apar în celebra carte a lui Euler, *Introductio in analysis infinitorum.*

Detalii se pot afla din articolul enciclopedic [5], precum şi din alte surse: [1], [3], [4].

---

1) Această formulă a permis demonstrarea faptului că singurele poliedre regulate sunt cele cinci cunoscute din antichitate.

Bibliografie

[1] Dunham, William, *Euler: The Master of Us All,* Mathematical Association of America, Washington D.C., 1999.

[2] Euler, Leonhard, *Introductio in analysis infinitorum*, 2 vols., Bosquet, Lucerne, 1748, reprinted in the Opera Omnia, Series I volumes 8 and 9. English translation by John Blanton, Springer-Verlag, 1988 and 1990. Facsimile edition by Anastaltique, Brussels, 1967.

[3] Thiele, Rüdiger. *The mathematics and science of Leonhard Euler*, in *Mathematics and the Historian's Craft*, The Kenneth O. May Lectures, G. Van Brummelen and M. Kinyon (eds.), CMS Books in Mathematics, Springer Verlag, 2005.

[4] Nahin, Paul, *Dr. Euler's Fabulous Formula*, New Jersey, Princeton, 2006.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler

[6] Euler Tercentenary, http://www.euler-2007.ch/en/index.htm

[7] Leonhard Euler Congress 2007, http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2007/AG/

Universitatea din Craiova
Facultatea de Matematică-Informatică
Str. Al. I. Cuza, nr. 13
200585 Craiova

Universitatea Valahia din Târgovişte
Catedra de Matematică
Bd. Unirii, nr. 118
130082 Târgovişte

DIN VIAŢA SOCIETĂŢII

Aniversarea a 80 de ani ai Academicianului Profesor Dimitrie D. Stancu la Universitatea Babeş-Bolyai

La 20 aprilie anul curent, în Aula mare a Universităţii Babeş-Bolyai a avut loc adunarea festivă dedicată aniversării a 80 de ani ai domnului Academician Profesor Doctor *Dimitrie D. Stancu*, Membru de Onoare al Academiei Române, Doctor Honoris Causa al Universităţii Lucian Blaga din Sibiu şi al Universităţii de Nord din Baia Mare.

La emoţionantul eveniment a vorbit întâi domnul prorector, prof. dr. *Şerban Agachi*, din partea conducerii Universităţii. Apoi, din partea conducerii Facultăţii de Matematică-Informatică, a luat cuvântul domnul prof. dr. *Petru Blaga*, decanul facultăţii. Cu acordul domniei sale, reproducem aici textul integral al alocuţiunii:

Academicianul Dimitrie D. Stancu la vârsta de 80 de ani

Facultatea noastră are deja o tradiţie cunoscută şi recunoscută în a-şi sărbători dascălii, colegii, la vârste aniversare, a primi cu inimile deschise apropiaţii noştri, prietenii la astfel de evenimente deosebite ale comunităţii noastre.

Totuşi, întâlnirea de azi este una cu totul specială, având în vedere că cel sărbătorit, Academicianul Dimitrie D. Stancu, alintat de cei apropiaţi D.D., cel omagiat la vârsta de 80 de ani, este unul dintre profesorii care şi-a pus amprenta în mersul facultăţii, a învăţământului matematic clujean, de-a lungul a 60 de ani, cu rezultate de excepţie în domeniu, ce au intrat de multă vreme în categoria celor care sunt foarte bine cunoscute şi apreciate de lumea matematică, cu o reputaţie profesională şi academică prodigioasă.

Desigur, Profesorul Dimitrie D. Stancu, alături de noi aici, este cel mai îndrepăţit şi cel mai bine cunoscător în a ne împărtăşi cum s-a manifestat atracţia pentru matematică a tânărului plecat de la ţară, din satul Călacea, la Liceul „Moise Nicoară" din Arad, iar apoi la Facultatea de Matematică, de la Universitatea din Cluj.

De aici încolo, adică din 1951, de când a fost numit asistent la Departamentul de Analiză Matematică al Universităţii din Cluj şi până azi, fiecare dintre noi avem în memorie, în funcţie de vârsta fiecăruia în parte, în funcţie de locul ocupat în cercul al cărui centru este Profesorul Dimitrie D. Stancu, perceperea personalităţii Profesorului, a omului de ştiinţă preocupat de a face matematică de vârf, de a obţine rezultate şi contribuţii de seamă în domeniul matematicii.

Profesorul Dimitire D. Stancu a afirmat şi recunoscut de nenumărate ori, influenţa lui Tiberiu Popoviciu în formarea şi lansarea ştiinţifică a Domniei Sale, sub îndrumarea căruia a obţinut în anul 1956 titlul de doctor în matematică. Iar noi, astăzi, îl considerăm pe Profesorul Dimitrie D. Stancu un strălucit continuator al recunoscutei şcoli de Analiză Numerică ai cărei fondatori sunt Tiberiu Popoviciu şi Dumitru V. Ionescu.

Ca o recunoaştere a valorii ştiinţifice şi profesionale, în perioada 1961-1962, Profesorul Dimitrie D. Stancu a beneficiat de o bursă la Universitatea din Wisconsin, Madison, S.U.A., când a participat cu lucrări ştiinţifice şi la conferinţe regionale organizate de Societatea de Matematică Americană în Milwakee, Chicago şi New York. La întoarcerea din Statele Unite a fost numit prodecan al Facultăţii de Matematică şi şef al Catedrei de Calcul Numeric şi Statistic, iar din 1969 este profesor la Facultatea noastră.

Trebuie să remarcăm numărul mare de tineri din ţară şi din străinătate, care au fost îndrumaţi de Profesorul Dimitrie D. Stancu în elaborarea de teze pentru obţinerea titlului de doctor în matematică, pe care îi găsim la universităţi din ţară şi din străinătate (Cluj, Sibiu, Braşov, Petroşani, Baia Mare etc). Vrem să amintim aici că în câteva zile la facultate este programată susţinerea unei noi teze de doctorat sub îndrumarea Profesorului Dimitrie D. Stancu. Colegii de la informatică au beneficiat pe deplin, de asemenea, la obţinerea titlului de doctor sub îndrumarea distinsului nostru Profesor.

Participarea Profesorului Dimitrie D. Stancu la conferinţe internaţionale din Germania, Italia, Anglia, Ungaria, Franţa, Bulgaria, Cehia, a dus la afirmarea şi răspândirea faimei şcolii de Analiză Numerică de la Cluj. Amintim de asemenea rolul decisiv în organizarea unor conferinţe internaţionale la facultatea noastră în domeniul analizei numerice şi a teoriei aproximării: ICAOR-1996, Simpozionul internaţional de analiză numerică şi teoria aproximării-2002 (dedicat aniversării vârstei de 75 de ani a Profesorului Dimitrie D. Stancu), NAAT-2006. Pentru noi toţi, participanţii la aceste conferinţe, din ţară sau străinătate, prezenţa şi manifestarea ştiinţifică a Profesorului la lucrările acestor conferinţe au reprezentat tot atâtea confirmări în plus a recunoaşterii internaţionale a operei ştiinţifice a celui pe care îl omagiem astăzi.

Ca o încununare a întregii Sale contribuţii la dezvoltarea matematicii clujene, a celei româneşti, în anul 1999 Profesorul Dimitrie D. Stancu a fost ales Membru de Onoare al Academiei Române. Iar contribuţia importantă în formarea unor cercetători de marcă în alte centre universitare din ţară a dus la atribuirea în 1995 a titlului de Dr. Honoris Causa a Universităţii Lucian Blaga din Sibiu şi a Universităţii de Nord din Baia Mare.

Aprecierea valorii ştiinţifice a Profesorului Dimitrie D. Stancu este evidenţiată şi prin apartenenţa Domniei Sale la organizaţii profesionale şi ştiinţifice din ţară şi străinătate: Societatea de Ştiinţe Matematice din România, Societatea Americană de Matematică, GAAM (Germania), referent la bazele de date internaţionale Mathematical Reviews şi la Zentralblatt für Mathematik. Adăugăm de asemenea că este Editorul şef al revistei Academiei Române, Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation, face parte din Boardul editorial al Revistei Calcolo, publicată în prezent de Editura Springer din Berlin. Lista meritelor ştiinţifice ale Academicianului Dimitrie D. Stancu ar putea continua, dar frica de a lăsa neamintite unele dintre acestea, mă face să mă opresc cu această enumerare. Fiecare putem să adăugăm noi şi noi contribuţii şi merite ale Profesorului Dimitrie D. Stancu.

Dacă până aici m-am referit mai mult la personalitatea ştiinţifică şi academică a Profesorului Dimitrie D. Stancu, nu-mi este permis să nu amintesc puţin despre dascălul Dimitrie D. Stancu, cel care cu faţa luminată era totdeauna dispus să transmită de la catedră, de la tablă zicem noi, cu un zâmbet pentru cei din sală, studenţi sau tineri la început de carieră academică, farmecul matematicii. Ne-am dat seama că matematica nu se face, cel puţin în faţa tinerilor, cu fruntea încruntată. Ne-am dat seama mai mult, atunci de ce îndrăgim matematica. Am constatat încă o dată că matematica este frumoasă, fascinantă. Dascălul unanim recunoscut ca personalitate eminentă de către tinerii din facultate, care au putut constata de fiecare dată că direcţii mai mult sau mai puţin bătătorite, cum ar fi Analiza Matematică, Analiza Numerică, Teoria Aproximării, Teoria Probabilităţilor, Teoria Funcţiilor şi Teoria Constructivă a Funcţiilor, altele cu totul noi, cum era în acea vreme Informatica, pot avea toate multe noutăţi. Fiindcă lecţiile Profesorului Dimitrie D. Stancu îmbinau într-un mod miraculous, ceea ce era clasic în domeniu, cu ceea ce era nou, abia lansat, multe dintre acestea apaţinându-i celui ce făcea expunerea. Astfel, erau inserate rezultate proprii din teoria interpolării, derivarea numerică, teoria polinoamelor ortogonale, *noi formule de cuadratură şi cubatură, aproximarea funcţiilor cu ajutorul operatorilor liniari şi pozitivi, reprezentarea restului în formule de aproximare, metode probabilistice de construire a operatorilor linari şi pozitivi, aproximare spline etc.*

Profesorul Dimitrie D. Stancu s-a înconjurat şi este înconjurat de membrii familiei academice clujene, ai familiei matematicii româneşti, dar şi mondiale.

Desigur, cea mai apropiată este chiar familia Profesorului Dimitrie D. Stancu. Domnia Sa nu uită, cu fiecare prilej să amintească cu mândrie şi de minunata familie, cunoscută şi recunoscută de toţi cei prezenţi aici. Soţia, D-na Felicia Stancu, cele două fiice Angela şi Mirela (amândouă profesoare de matematică), nepoţii Alexandru (licenţiat al facultăţii noastre), George, nepoata Ştefana. Cu această ocazie aruncăm o privire caldă şi de admiraţie pentru frumoasa şi eleganta familie a Profesorului Dimitrie D. Stancu.

Stimaţi invitaţi,

Dragi colegi,

Aniversarea vârstei de 80 de ani, ne prilejuieşte nouă celor ce formăm familia lărgită a Academicianului Dimitrie D. Stancu să-i urăm Profesorului nostru, ani mulţi plini de bucurii şi multă sănătate!

Cluj-Napoca, 20 Aprilie 2007

În continuare, a luat cuvântul domnul prof. dr. *Octavian Agratini*, şeful catedrei de Calcul Numeric şi Statistic (înfiinţată şi condusă de către profesorul *D. D. Stancu* timp de mai mult de trei decenii). Domnia sa a trecut în revistă realizările ştiinţifice ale academicianului *Dimitrie D. Stancu*, grupate pe domenii matematice.

Importantul eveniment pe care îl relatăm a fost considerat la justa sa însemnătate şi de către conducerea Societăţii de Ştiinţe Matematice din România şi astfel a fost transmis şi salutul Conducerii S.S.M.R., semnat de către preşedinte, prof. dr. *Dorin Popescu*.

De asemenea, a fost transmis salutul Conducerii Facultăţii de Ştiinţe şi Arte a Universităţii Valahia din Târgovişte (ambele au fost rostite de către semnatarul acestor rânduri).

Reproducem mai jos salutul Conducerii S.S.M.R.:

Stimate Domnule Academician

Aniversarea a 80 de ani de viaţă constituie pentru întreaga comunitate matematică românească prilej de satisfacţie şi sărbătoare. Apreciem în mod deosebit faptul că sărbătorirea zilei Dumneavoastră de naştere este organizată de Universitatea Babeş-Bolyai, aşezământ de cultură în care v-aţi desfăşurat activitatea timp de şase decenii şi vă rugăm să ne permiteţi a fi alături de toţi cei care vă stimează, pentru a vă adresa cele mai alese urări de sănătate şi fericire.

Realizările Dumneavoastră în domeniul Analizei Numerice şi Teoriei Aproximării au contribuit la sporirea prestigiului Şcolii matematice româneşti în general şi a şcolii clujene în domeniu, condusă de Dumneavoastră de peste trei decenii, în special.

Contribuţiile Dumneavoastră şi ale matematicienilor acestei şcoli sunt frecvent citate în lucrări importante ale literaturii de specialitate contemporane. În afară de importanţa lor teoretică, ca făcând parte din marele edificiu al Analizei Matematice, principiile şi metodele Analizei Numerice şi Teoriei Aproximării îşi arată forţa şi eficienţa de neînlocuit la modelarea matematică a unei mari diversităţi de fenomene, de la fizica cuantică şi biologia celulară până la astrofizică şi cosmologie. Fundamentarea lor riguroasă constituie, din această cauză, o sarcină importantă pentru analişti.

În aceste momente de bucurie şi sărbătoare, vă rog să îmi permiteţi, stimate Domnule Academician, să vă adresez din partea Biroului Consiliului Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, tradiţionala urare

La mulţi ani sănătoşi şi fericiţi !

Prof. univ. dr. Dorin Popescu

Apoi, domnul prof. dr. *Dumitru Acu* a transmis salutul Conducerii Facultăţii de Matematică-Informatică a Universităţii Lucian Blaga din Sibiu.

Unul dintre momentele cheie ale manifestării l-a constituit cuvântul rostit chiar de sărbătorit, domnul Academician *Dimitrie D. Stancu*, în care, cu nealterată voie bună şi fin umor, domnia sa a relatat momentele cele mai importante din biografia şi activitatea sa, ca elev, student, cadru didactic al Universităţii absolvite, Babeş-Bolyai, de la preparator (încă din anul III) la profesor, profesor vizitator la multe universităţi străine, academician.

În Aulă, arhiplină, se aflau cadre didactice ale Universităţii Babeş-Bolyai şi ale altor universităţi, cercetători şi profesori din învăţământul preuniversitar, foşti doctoranzi, foşti studenţi, prieteni şi, nu în ultimul rând, membrii familiei.

Prin importanţa sa, evenimentul a privit nu numai şcoala formată de domnul Academician *Dimitrie D. Stancu* şi comunitatea matematică clujeană, ci şi întreaga suflare matematică românească.

Fie-ne îngăduit de a-i ura încă o dată domnului Academician *Dimitrie D. Stancu* multă sănatate şi fericire alături de cei dragi şi de a-i spune tradiţionalul „La mulţi Ani!"

Andrei Vernescu

REVISTA REVISTELOR

Recreaţii matematice

Recreaţii matematice continuă să fie, aşa cum spuneam şi cu alte ocazii, cea mai bună şi consistentă revistă locală dedicată învăţământului preuniversitar. Domnul profesor *Dan Tiba* – unul dintre membrii de marcă ai colegiului de redacţie – ne-a înmânat numărul 1/2007 (anul IX) al revistei ieşene.

Cum ne-a obişnuit deja, revista debutează cu două materiale dedicate istoriei matematicii: unul marcând tricentenarul naşterii lui *Leonhard Euler* (semnat de profesorul *Petru Minuţ*, celălalt constituind o evocare a vieţii şi activităţii profesorului *Dumitru Ion Mangeron* – figură emblematică a Iaşului – de la a cărui naştere s-au împlinit anul trecut o sută de ani (material semnat de prof. *Adrian Corduneanu*).

Iată câteva alte titluri ale unor articole şi note conţinute în prezentul număr: „Similitudini în plan şi puncte Toricellli asociate" (*C. Ţigăeru*), „Ordinul elementelor grupului $GL_n(\mathbb{Z})$" (*A. Reisner*), „Variaţiuni pe tema dreptei lui Euler şi a cercului celor nouă puncte" (*T. Bârsan*), „A new proof for old inequality" (*M. Tetiva*), „Asupra calculării unor limite de şiruri" (*D. M. Bătineţu -Giurgiu*) etc.

De asemenea, vom mai menţiona şi un interesant material metodic datorat lui *L. Tuţescu*, cu titlul „Cum se obţine o inegalitate".

În fine, o menţiune trebuie să facem pentru calitatea şi varietatea problemelor propuse.

Dan Radu

Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin

Domnul profesor *Lucian Dragomir* din Oţelul Roşu, preşedintele filialei Caraş Severin a S.S.M. R., ne-a expediat ultimul număr apărut, nr. 20 (anul VIII – 2007) – al revistei locale, pe care am avut plăcerea să o prezentăm în repetate rânduri cititorilor noştri.

Prezentul număr debutează cu un interesant interviu luat de domnul profesor *Lucian Dragomir* academicianului *Solomon Marcus* prezent în zonă (la Caransebeş) cu ocazia Comncursului Naţional interdisciplinar „± Poezii". Desigur, un astfel de interviu – cum era de aşteptat – este extrem de bogat în idei şi informaţii, deschizând noi orizonturi cititorilor revistei.

Dintre materialele publicate, vom mai menţiona: „Puterea unui punct faţă de cerc" (*L. Dragomir*), „Consideraţii asupra teoremei lui Cebâşev" (*M. M. Joiţa*, *O. Bădescu*), „Asupra unei formule trigonometrice" (*L. Dragomir*) etc. De asemenea, revista conţine şi prezentarea rezultatelor unor concursuri (locale şi naţionale) la care au participat elevii din judeţ.

Dan Radu

Sfera – revistă de matematică

Domnul profesor *Gabriel Tica* din Băileşti, redactorul şef al publicaţiei, ne-a expediat ultimele două numere apărute (nr. 1, 2/2006-2007) ale revistei ce apare în localitate.

Faţă de numerele anterioare ce ne-au parvenit, remarcăm un pas înainte în ceea ce priveşte conţinutul şi calitatea revistei. Ne raliem punctului de vedere al domnului *Gabriel Tica* care – în scrisoarea de trăsură – spune : „... sper ca revista Sfera să reziste cât mai mult în timp şi să aducă, pe cât se poate şi satisfacţii intelectuale.“

Vom menţiona titlurile câtorva materiale apărute în aceste două numere : „Extinderea unei probleme de loc geometric dată la O.I.M. 2006“ (*I. Pătraşcu*, *G. Tica*), „Criterii de derivabilitate a şirurilor de numere reale“ (*D. M. Bătineţu-Giurgiu*, *G. Tica*), „Caracterizări nonstandard ale paralelogramului“ (*I. Ivănescu*), „Generalizare şi rafinare a inegalităţii $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$“ (*M. Bencze*) etc.

Vom încheia această scurtă prezentare menţionând că revista aniversează anul acesta cinci ani de apariţie, prilej cu care dl. prof. univ. dr. *George Vraciu* – preşedinte de onoare al filialei Dolj a S.S.M.R. – a scris un scurt editorial inserat în numărul 2 al publicaţiei.

Dan Radu

Revista de Matematică din Timişoara

Domnul Profesor *Ion Damian Bîrchi* – directorul publicaţiei – ne-a expediat nr. 2/2007 al revistei.

Conform tradiţiei, revista acordă un spaţiu redus materialelor cu caracter teoretic, conţinând însă nenumărate şi variate probleme semnate de nume sonore ale învăţământului românesc, care, desigur girează – prin ele însele – calitatea demersului editorial.

Cele trei scurte note matematice publicate în acest număr sunt : „Majorare în $\mathbb{R}^n$, inegalităţile lui Murrhead şi Hardy-Littelwood-Polya“ (*Gh. Eckstein*), „Teorema lui Ceva pentru poligoane şi aplicaţii ale sale“ (*D. Şt. Marinescu*, *V. Cornea*), „Despre permutări“ (*Gh. Eckstein*).

Dan Radu

RECENZII

MIRON OPREA, Scurtă istorie a matematicii
Editura PREMIER, Ploieşti, 2004

Dacă în ceea ce priveşte istoria matematicii în Romania, literatura matematică românească dispune de cartea de referinţă a lui *Gh. Şt. Andonie* (în trei volume), cartea acad. *Solomon Marcus* „Din gândirea matematică românească“ precum şi de alte lucrări de mai mici dimensiuni, istoria matematicii universale este ceva mai slab reprezentată. Există doar cele trei cărţi ale lui *H. Wieleitner*, *E. Kolman* şi respectiv *A. P. Iuşkevici*, traduse la Editura Ştiinţifică în 1963 şi 1964 după versiunea sovietică, iar apoi cartea lui *N.N. Mihăileanu*, în două volume (vol. I. Editura Enciclopedică Română, Bucureşti 1974, vol. II. Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981) precum şi unele cărţi mai subţiri, litografiate. Desigur, aceste lucrări sunt greu de procurat pentru cititorii de astăzi.

Din aceste motive, considerăm că apariţia unei noi cărţi de istoria matematicii nu poate fi decât binevenită. Autorul, distins profesor al Universităţii din Ploieşti, a ţinut efectiv acest curs la anul III de la Secţia de Matematică-Informatică a Facultăţii de Litere şi Ştiinţe a Universităţii. Dar cartea nu reprezintă doar un curs oarecare, un instrument sec, pe care studenţii îl folosesc pentru a-şi însuşi o materie şi a trece respectivul examen. Ea constituie şi o lucrare care poate trezi interesul oricărui om de cultură, din cele mai variate domenii de activitate.

Într-un spaţiu mai mult decât rezonabil, de doar 300 de pagini, autorul reuşeşte să realizeze o panoramă bine esenţializată, dar foarte consistentă, a matematicii, din cele mai vechi timpuri până astăzi. Cartea cuprinde următoarele 11 capitole:

1. Apariţia matematicii
2. Matematica în antichitate
3. Matematica în civilizaţia islamului
4. Matematica în civilizaţiile chineză şi hindusă
5. Matematica din Europa Evului mediu
6. Matematica în epoca modernă
7. Matematica contemporană
8. Istoria matematicii şi a învăţământului matematic în România
9. Figuri feminine în istoria matematicii
10. Întâmplări hazlii şi curiozităţi din viaţa matematicienilor

11. Subiecte pentru lucrări de cercetare.

Mai menţionăm că lucrarea este foarte bine documentată.

Opera marilor savanţi, creatori în domeniul matematicii este foarte bine descrisă, textul este clar, dinamic, lectura agreabilă.

Pentru toate aceste motive, o recomandăm cu căldură.

Andrei Vernescu

CRISTINEL MORTICI, Sfaturi matematice: teme şi probleme
Editura MINUS, Târgovişte, 2007

O nouă lucrare, de maxim folos pentru elevii competitori la concursuri, ca şi pentru profesorii acestora, se impune în peisajul literaturii matematice de specialitate.

Autorul este conferenţiar la Universitatea Valahia din Târgovişte şi are ca domeniu de cercetare Analiza Matematică, Teoria Ecuaţiilor Diferenţiale, şi Analiza Neliniară. Dar (lucru de loc obligatoriu pentru un matematician!) a păstrat nealterată afecţiunea pentru problemele matematicii elementare, afecţiune materializată în abilitatea de rezolvare a unor astfel de probleme, în existenţa anumitor cărţi scrise în acest domeniu cât şi în prezenţa sa permanentă în comisiile diferitelor concursuri, inclusiv a Olimpiadei naţionale.

În circa 300 de pagini lucrarea conţine un foarte mare număr de probleme, împărţite în zece capitole, intitulate sugestiv, astfel:

1. Par şi impar
2. Congruenţe
3. Funcţia lui Euler
4. Principiul cutiei
5. Sume telescopice
6. Inegalitatea lui Bernoulli
7. Inegalitatea mediilor
8. Parte întreagă şi parte fracţionară
9. Funcţia caracteristică
10. Ramsey.

Majoritatea capitolelor prezintă la început câteva elemente teoretice, utile înţelegerii problemelor. Toate capitolele conţin o mare varietate de probleme, unele rezolvate, altele propuse. La problemele propuse există întâi indicaţii, iar apoi, în alt capitol, soluţii. Astfel, dacă cititorul care doreşte să rezolve o problemă nu reuşeşte, el poate apela întâi la indicaţie. Aceasta poate declanşa „declicul" necesar al ideii fundamentale a problemei şi apoi a rezolvării Dacă se întâmpină încă dificultăţi, atunci se apelează la soluţii complete, unde se va găsi detaliată rezolvarea.

Întreaga carte este scrisă cu mare pricepere şi acurateţe şi chiar şi în acele probleme care, în enunţ, au o uşoară tentă hazlie, fondul matematic rămâne nealterat, cu siguranţă scris şi de substanţă. Ca şi în cunoscuta carte a lui *Ch. W. Trigg* „Ingeniozitate şi surpriză în matematică" cititorul va găsi la majoritatea problemelor cel puţin câte o idee matematică interesantă, inspiratoare de reflexii ulterioare.

Recomandăm cartea cu căldură.

Andrei Vernescu

POŞTA REDACŢIEI

Adrian Reisner – Centrul de calcul E. N. S. T. din Paris, Franţa. Am primit articolul dumneavoastră intitulat „Croşetul L_{ie} a două matrice". Comitetul Redacţional va decide asupra oportunităţii publicării lui.

Sorin Puşpană – Colegiul Naţional Ştefan Velovan din Craiova. Articolul dumneavoastră cu titlul „O generalizare a teoremelor Stolz-Cesàro" se află în atenţia Colegiului Redacţional care va hotărî în ce măsură materialul este publicabil sau nu.

Gheorghe Costovici – Catedra de Matematică a Universităţii Gh. Asachi din Iaşi. La redacţie au parvenit cele două note matematice expediate de dumneavoastră: „Trei identităţi" şi „Studiul a două şiruri". Le vom supune atenţiei Comitetului Redacţional.

Mihály Bencze – str. Hărmanului, nr. 6, Săcele. Am primit nota matematică expediată de dumneavoastră cu titlul „A generalization of Hermite's identity". O vom supune atenţiei Comitetului Redacţional.

Tănase Negoi – Comuna Traian, jud. Teleorman. Nota matematică expediată de dumneavoastră cu titlul „Asupra monotoniei şirurilor lui Traian Lalescu şi Dumitru Bătineţu-Giurgiu“ se află în atenţia Comitetului Redacţional care va hotărî asupra oportunităţii publicării ei.

Róbert Szász – Str. Rovinari, bl. 32/B/14, Târgu Mureş. Problema propusă de dumneavoastră va fi supusă atenţiei Colegiului Redacţional.

Dan Radu

ERATĂ

1. În G.M.-A nr. **2**/2007, la pagina 107, în loc de abstractul publicat se va citi:

In this work we give the most short proof of the convergence of the sequence of general term $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-n}}$ to a limit greater than 1. We use only the known monotony of the sequences of general term $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ and two inequalities.

Key words: convergent sequence, monotonic sequence, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{n}}$, Ω_n.

M.S.C.: 40A05, 40A20.

2. În G.M.-A nr. **2**/2007, la pagina 134, pe rândul 8 de sus în loc de „$\forall x \in G$ “ se va citi: „$\forall x, y \in G$ “, iar pe rândul 10 de sus, în loc de „$M = \emptyset$ “ se va citi: „$M \neq \emptyset$ “. De asemenea, pe rândul 13 de sus, în loc de „$2^{2n+2}k+1$“ se va citi: „$2^{n+2}k+1$“, iar pe rândul 3 de jos, în loc de „$2(4R+r(^2(2R-r) \geq p^2(11R-4r)$“ se va citi:

$$„2(4R+r)^2(2R-r) \geq p^2(11R-4r)“.$$

3. În G.M.-A nr. **2**/2007, pe coperta IV, pe rândul 15 de jos, în loc de „Romne“ se va citi: „Române“.

Redacţia