GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ

ANUL XXV(CIV) **Nr. 4 / 2007**

Alexandru Lupaş
1942-2007
In memoriam

La mai puţin de un an de la decesul doamnei profesor *Luciana Lupaş*, o nouă lovitură avea să se abată atât asupra familiei, cât şi a întregii comunităţii matematice: în ziua de 14 august 2007, după o scurtă dar grea suferinţă, matematicianul profesor universitar doctor *Alexandru Lupaş* s-a stins din viaţă.

Ne-a părăsit un matematician de prim ordin, un om de o inteligenţă scăpărătoare, un cercetător şi dascăl universitar de mare valoare. Iar pentru cei care au avut privilegiul de a-l cunoaşte, ne-a părăsit un maestru, un sfătuitor competent, un bun prieten. Era un om de cea mai desăvârşită urbanitate, care avea darul cu totul special de a-i face pe interlocutori să se simtă bine, să fie captivaţi de ceea ce le spunea; era un om care împărtăşea o viziune optimistă asupra vieţii, muncii şi matematicii...

Pentru matematica românească, dispariţia profesorului universitar doctor *Alexandru Lupaş* a însemnat o imensă pierdere. Printr-o coincidenţă a soartei, această pierdere s-a produs exact în aceeaşi zi cu cea a altui matematician român, de data aceasta din diaspora din Canada, anume profesorul *Radu Theodorescu* (n. 12 aprilie 1933).

Comunitatea matematică, în întregime, a primit vestea decesului profesorului *Alexandru Lupaş* cu profundă consternare şi tristeţe, nu numai pentru că opera sa matematică este foarte valoroasă şi pentru că mai avea multe de spus, dar şi pentru că era foarte apreciat, respectat şi îndrăgit.

Opera matematică a profesorului va rămâne ca un bun definitiv câştigat în matematica românească. Această operă este alcătuită din peste 130 de articole (peste 100 de articole ştiinţifice şi 27 de articole didactico-ştiinţifice), 6 monografii, 10 cursuri universitare şi două cărţi pentru învăţământul preuniversitar; de asemenea, profesorul *Alexandru Lupaş* a propus şi numeroase probleme profunde şi elegante.

Alexandru Lupaş (pe numele complet *Alexandru Ioan Lupaş*) s-a născut în ziua de 5 ianuarie 1942 la Arad, ca al doilea fiu al juristului *Octavian Lupaş* şi al *Liviei Lupaş*, de asemenea juristă. Tatăl său a fost implicat şi în viaţa cetăţii fiind primarul Aradului în perioada 1943-1944. Fratele său mai mare cu un an, *Adrian* (*Dinu*) *Lupaş* este inginer la Timişoara.

Face studiile liceale la faimosul Liceu Moise Nicoară din Arad; printre foştii elevi ai Liceului se află importanţi matematicieni români, dintre care nu mai puţin de patru membri ai Academiei Române, anume *Tiberiu Popoviciu* (1906-1975), *Caius Iacob* (1912-1992), iar din generaţia actuală de academicieni, *Dimitrie D. Stancu* (n. 1927) şi *Ivan Singer* (n. 1927). De asemenea, la Liceul Moise Nicoară, dar ulterior lui Alexandru Lupaş, au învăţat profesorii universitari de la Cluj-Napoca *Radu Precup* şi *Mircea Ivan*.

Alexandru Lupaş susţine examenul de bacalaureat în 1959 şi, în toamna aceluiaş an, este admis, pe bază de examen, la Facultatea de Matematică a Universităţii Babeş-Bolyai de la Cluj. Aici profesa cu măiestrie şi strălucire o faimoasă pleiadă de profesori. Studentul *Alexandru Lupaş* va audia, printre alţii, pe profesorii (în ordine alfabetică) *L. Bal*, *G. Călugăreanu*, *D. V. Ionescu*, *T. Mihăilescu*, *P. T. Mocanu*, *Gh. Pic*, *T. Popoviciu* şi *D.D. Stancu*. Este atras în special de ideile din Analiza numerică şi Teoria aproximării, din prelegerile lui *D. V. Ionescu*, *T. Popoviciu* şi *D.D. Stancu*, maeştii săi, pe care îi evoca adesea, cu aleasă apreciere şi căldură.

În 1964, imediat după absolvire, este repartizat cercetător la Institutul de Calcul din Cluj, al Academiei, înfiinţat prin strădaniile lui *Tiberiu Popoviciu*, încă din 1957 şi al cărui director era încă de la înfiinţare. Încă din primii ani de activitate, tânărul cercetător se afirmă atât prin lucrări originale, profunde şi elegante, cât şi prin participări la Seminarii, Conferinţe şi Congrese internaţionale, participări care vor fi continuate în întreaga sa carieră. Va deveni rapid cercetător principal.

În 1966 se căsătoreşte cu *Luciana Eugenia-Ruxandra Ţiriac*, născută la 26 aprilie 1944, la Sânnicolaul Mare (jud. Arad), fiica doctorului *Ştefan Ţiriac* şi a *Eugeniei Ţiriac*. *Luciana* era o strălucitoare studentă la Matematică, la Cluj şi avea să termine facultatea în 1967, ca şefă de promoţie, fiind imediat reţinută la Catedra de Analiză Matematică (şef de catedră – prof. *Tiberiu Popoviciu*). La această catedră, *Luciana Lupaş* va lucra fără întrerupere până în 1976 şi va obţine în 1978 titlul ştiinţific de doctor în matematică.

În 1971 *Alexandru Lupaş* obţine, prin concurs, o bursă Humboldt. Plecat în Germania de Vest, absolvă Goethe Institut din Rothenburg ob der Tauber, prin care aprofundează limba germană, absolut necesară în cercetările matematice pe care le va face acolo. Apoi lucrează ca bursier-cercetător la Institutul de Matematică al Universităţii din Stuttgart, respectiv Tübingen, sub îndrumarea profesorului *Werner M. Meyer-König* (26 mai 1912-26 decembrie 2002). Acesta este bine cunoscut în teoria aproximării în special datorită operatorului de aproximare a funcţiilor pe care l-a definit, odată cu *K. Zeller* şi care se numeşte astăzi operatorul Meyer-König şi Zeller. În ziua de 28 aprilie 1972 *A. Lupaş* susţine disertaţia doctorală intitulată „Die Folge der Betaoperatoren", în faţa unei comisii prezidate de *W. Meyer-König*. Obţine astfel foarte apreciatul titlu german de „**Doktor der Naturwissenschaften**" în specialitatea matematică (echivalentul titlului numit la universităţi din alte ţări

„doctor rerum naturae"); această acordare a titlului a fost făcută cu distincţia maximă (≪**Gesamturteil: „mit Auszeichnung bestanden"**≫). A fost singurul care a obţinut, în acel an, titlul cu distincţie maximă.

Revenit în ţară, *Alexandru Lupaş* va rezolva rapid altă problemă. Anume, în 1970, fusese admis pe bază de concurs, la doctorat la *T. Popoviciu* şi susţinuse toate examenele şi referatele. Mai avea doar de finalizat şi de susţinut teza, a cărei arhitectură era mai de mult stabilită. Prin decesul neaşteptat al acad. *Tiberiu Popoviciu* din 1975, doctorandul *Alexandru Lupaş* (deja **Doktor** din Germania) este repartizat celuilalt mare specialist în Analiza numerică şi Teoria aproximării de la Cluj, profesorul doctor *Dimitrie D. Stancu*; sub îndrumarea domniei sale, va finaliza rapid pregătirea tezei de doctorat intitulată „Contribuţii la teoria aproximării prin operatori liniari", pe care o va susţine la Univesitatea Babeş-Bolyai la 19 iunie 1976, obţinând şi titlul românesc de doctor în matematici. Avea deja 23 de lucrări ştiinţifice publicate. *Alexandru Lupaş* povestea cu multă plăcere despre frumoasa colaborare ca de la maestru la discipol pe care i-a oferit-o cu cordialitate profesorul *D. D. Stancu*. Pentru profesor, a fost unul dintre cele câteva doctorate preluate de la *T. Popoviciu*; ulterior, acad. *D. D. Stancu* va conduce peste 40 de doctorate.

Dar, în 1975, venise, ca un trăznet din cer senin, decizia ceauşistă absurdă şi discreţionară, de desfiinţare a tuturor institutelor de cercetări ale Academiei. Academicianul *Miron Nicolescu*, în dubla calitate de Preşedinte al Academiei şi de director al Institutului de Matematică al Academiei, după un demers nereuşit de redresare a situaţiei, precum şi academicianul *Tiberiu Popoviciu*, directorul Institutului de Calcul din Cluj al Academiei, încetează din viaţă, pur şi simplu de inimă rea. Cercetătorilor li se desface automat contractul de muncă, interzicându-le de a trece în acel an în învăţământul superior. Matematicianul *Alexandru Lupaş* lucrează, din mai 1975 până în septembrie 1976, ca cercetător principal la Institutul de Tehnică de Calcul din Cluj (care, nefiind subordonat Academiei, nu fusese desfiinţat!); în această perioadă, doamna *Luciana Lupaş* continuă să lucreze la Catedra de Analiză Matematică de la Universitatea Babeş-Bolyai.

În 1976, familia *Lupaş* ia o hotărâre importantă, pe care o şi pune în aplicare: se stabileşte la Sibiu, unde se va dedica muncii la catedră în învăţământul superior. *Alexandru Lupaş* va fi succesiv lector (1976-1980), conferenţiar (1980-1990) şi profesor (inclusiv îndrumător de doctorat) din 1990. La Sibiu va scrie toate celelalte articole, cât şi 16 cărţi. A predat cursuri de Algebră liniară, Geometrie analitică şi diferenţială, Matematici speciale, Analiză numerică, Metode numerice, Calcul operatorial finit, Matematici computaţionale. Doamna *Luciana Lupaş* a predat în special Analiză matematică, fiind lector în perioada 1976-1982, iar apoi conferenţiar. Cursurile sale elegante au rămas de neuitat pentru foştii studenţi.

Animat de dorinţa edificării unui învăţământ superior de cea mai bună calitate în Sibiu, *Alexandru Lupaş* a avut şi unele activităţi manageriale: a fost şeful catedrei de Mecanică aplicată la vechiul Institut Tehnic Superior, apoi rector interimar al Universităţii Lucian Blaga în 1990, decan al Facultăţii de Ştiinţe din Sibiu în 1990-1992, prorector al Universităţii Româno-Germane din Sibiu în 1998-1999, şef al Catedrei de Matematică a Universităţii Lucian Blaga în 199-2000. La începutul anilor 1990 a avut o contribuţie decisivă pentru obţinerea atestatelor şi acreditărilor necesare Universităţilor din Sibiu.

Alexandru Lupaş a fost, cu începere din 1968, recenzent la „Mathematical Reviews" şi la „Zentralblatt für Mathematik", unde a publicat numeroase recenzii. A fost preşedintele Filialei Sibiu a S.S.M.R. în perioada 1977-1991.

Nouă matematicieni au obţinut titlul de doctor sub îndrumarea profesorului *Lupaş*: *Vasile Miheşan* (1997), *Emil C. Popa* (1998), *Dorian Popa* (1999), *Dana Simian* (2002), *Adrian Branga* (2003), *Florin Sofonea* (2004), *Eugen Constantinescu* (2004), *Ioan Popa* (2005) şi *Ioan Ţincu* (2006). În prezent toţi ocupă poziţii în învăţământul universitar, primul este profesor universitar, iar ceilalţi sunt conferenţiari, respectiv lectori universitari.

Profesorul *Alexandru Lupaş* participase, începând din 1980, imediat după ce a fost numit conferenţiar, ca membru examinator la examene de doctorat şi ca membru examinator- coreferent în nenumărate comisii de doctorat.

A organizat numeroase manifestări ştiinţifice de matematică, dintre care menţionăm: Simpozioanele de inegalităţi matematice de la Sibiu (1981, 1984, 1987, 1992), Seminariile româno-germane de teoria aproximării, denumite, pe scurt, RoGer, iniţiate împreună cu doamna *Luciana Lupaş* şi cu profesorul german *Heiner H. Gonska*, de la Universitatea din Duisburg (Cluj-1996, Sibiu-1998, Braşov-2000, Sibiu-2002, Cluj/Băişoara-2004). Ediţia de anul acesta a seminarului RoGer s-a desfăşurat între 1 şi 4 octombrie, la Königswinter (Germania) şi a fost dedicată memoriei profesorilor *Luciana Lupaş* şi *Alexandru Lupaş*. Profesorul *Alexandru Lupaş* a iniţiat Congresul Internaţional de Inegalităţi şi Aplicaţii, Timişoara, 2001, cât şi Conferinţa Internaţională de Inegalităţi şi Aplicaţii, Melbourne, 2004.

A ţinut numeroase conferinţe: la Oberwolfach (1969), Sofia şi Varna (1970), Stuttgart (1971), Stokholm (1974), Lund (1974), Hagen (1990, 1997), Dortmund / Witten (1995, 1998), Duisburg (1996), Siegen (1996).

A fost membru în Comitetele de redacţie ale mai multor reviste de specialitate: „Journal of Mathematical Analysis and Approximation Theory" (JMAAT), „Journal of Concrete and Applied Mathematics", „Gazeta Matematică -Seria A", „General Mathematics", „Octogon", „Arhimede".

Articolele şi conferinţele sale sunt foarte mult citate în reviste de prestigiu. În 27 de lucrări numele său este citat în titlu. A fost răsplătit cu anumite medalii şi diplome, ultima fiind diploma de excelenţă acordată de către S. S. M. R. în 2006 (despre care s-a relatat pe larg în nr. 1/2007, pp. 62-69).

Nu încercăm ca în acest articol dedicat memoriei profesorului să analizăm opera sa. De altfel, acest demers ar necesita mult mai mult spaţiu. Precizăm însă că lucrările ştiinţifice ale profesorului *Alexandru Lupaş* se referă în special la următoarele domenii, în care era maestru: analiza matematică clasică, inegalităţi, convexitate, analiză numerică, teoria aproximării, teoria constructivă a funcţiilor, funcţii speciale, calcul operatorial finit (calcul umbral), q-calculus. Încă o dată, subliniem, în toate aceste domenii, profesorul *Lupaş* era un profund cunoscător.

În anul 2006 familia *Lupaş* a fost lovită de o mare nedreptate a soartei: doamna *Luciana Lupaş* încetează din viaţă la 9 septembrie, ca urmare a unei boli nemiloase. Profund îndurerat, profesorul *Lupaş* traversează cu mare demnitate această perioadă, atât de dificilă, ţinând cursurile cu regularitate şi încă lucrând matematică.

Se stinge din viaţă ca urmare a unui infarct.

Tradiţia familiei lui *Alexandru* şi a *Lucianei Lupaş* este continuată de fiul lor, *Tudor* (n. 1980), inginer automatist şi matematician.

Profesorul *Alexandru Lupaş* a dăruit matematicii româneşti valoroase şi originale rezultate. A fost un om al cercetării matematice, al zidirii temeinice de învăţătură, al edificării Universităţilor din Sibiu (Universitatea Lucian Blaga şi Universitatea Româno-Germană). A sprijinit întotdeauna cauzele drepte şi umane, ajutând cu vorba sa, care întotdeauna avea greutate, dar şi cu fapta.

Va rămâne în amintirea tuturor celor care l-au cunoscut ca un matematician deosebit, un interlocutor minunat, un om care avea darul de a face să se simtă bine cei cu care vorbea.

Toţi cei care au avut privilegiul de a-l cunoaşte mai îndeaproape l-au respectat şi l-au îndrăgit.

Păstrându-i cu grijă amintirea, rămânem în minte cu imaginea sa nobilă şi luminoasă. Această imagine a profesorului *Alexandru Lupaş* va dăinui întotdeauna ca o rază vie de lumină, de adevăr, de iubire de aproape, de viaţă.

Andrei Vernescu

Caracterizări ale punctelor eficiente, slab eficiente şi ideale ale funcţiilor derivabile

DE EUGENIA DUCA ŞI DOREL I. DUCA

Abstract

The authors continue their presentation concerning generalizations for the case of differentiable function taking values in $\mathbb{R}$.

Key words: optim point, Pareto point, Slater point, differentiable function.
M.S.C.: 26B05, 58E17.

1. Introducere

Aşa cum s-a văzut în [3], [5], generalizarea noţiunii de punct de optim al unei funcţii reale se poate face în mai multe moduri şi aceasta deoarece pe spaţiul $\mathbb{R}^p$ nu se poate introduce o relaţie de ordine totală (completă), compatibilă cu operaţiile aritmetice uzual introduse pe $\mathbb{R}^p$.

Dacă $u = (u_1, \ldots, u_p)$ şi $v = (v_1, \ldots, v_p)$ sunt două puncte din spaţiul $\mathbb{R}^p$, atunci vom scrie că:

$u \leqq v$ dacă şi numai dacă pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, p\}$ avem $u_j \leqq v_j$;

$u < v$ dacă şi numai dacă pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, p\}$ avem $u_j < v_j$;

$u \leq v$ dacă şi numai dacă $u \leqq v$ şi $u \neq v$.

Evident $u \leq v$ dacă şi numai dacă pentru fiecare $j \in \{1, \ldots, p\}$ avem $u_j \leqq v_j$ şi există cel puţin un indice $k \in \{1, \ldots, p\}$ cu proprietatea că $u_k < v_k$.

Reamintim noţiunile de punct eficient, punct slab eficient şi punct ideal (vezi, de exemplu, [3] şi [5]).

Definiţia 1. *Fie D o submulţime nevidă, $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială, S o submulţime nevidă a lui D şi $x_0 \in S$. Spunem că x_0 este*

a) *punct eficient* (*sau punct Pareto, sau punct nedominat*) *de minim al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă nu există* $x \in S$ *astfel încât* $f(x) \leq f(x_0)$;

b) *punct slab eficient* (*sau punct Slater, sau punct nedominat strict*) *de minim al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă nu există* $x \in S$ *astfel încât* $f(x) < f(x_0)$;

c) *punct ideal de minim al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă pentru orice* $x \in S$, *are loc inegalitatea* $f(x_0) \leqq f(x)$;

d) *punct eficient* (*sau punct Pareto, sau punct nedominat*) *de maxim al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă nu există* $x \in S$ *astfel încât* $f(x_0) \leq f(x)$;

e) *punct slab eficient* (*sau punct Slater, sau punct nedominat strict*) *de maxim al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă nu există* $x \in S$ *astfel încât* $f(x_0) < f(x)$;

f) *punct ideal de maxim al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă, pentru orice* $x \in S$, *are loc inegalitatea* $f(x) \leqq f(x_0)$;

g) *punct eficient* (*sau punct Pareto, sau punct nedominat*) *al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă este punct eficient de minim sau punct eficient de maxim al funcţiei* f *relativ la* S;

h) *punct slab eficient* (*sau punct Slater sau nedominat strict*) *al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă este punct slab eficient de minim sau punct slab eficient de maxim al funcţiei* f *relativ la* S;

i) *punct ideal al funcţiei* f *relativ la* S, *dacă este punct ideal de minim sau punct ideal de maxim al funcţiei* f *relativ la* S.

Are loc următoarea afirmaţie (demonstraţia este imediată) :

Teorema 2. *Fie* D *o submulţime nevidă,* S *o submulţime nevidă a lui* D *şi* $f : D \to \mathbb{R}^p$ *o funcţie vectorială. Dacă* $x_0 \in S$ *este punct eficient de minim* (*respectiv de maxim*) *al funcţiei* f *relativ la* S, *atunci* x_0 *este punct slab eficient de minim* (*respectiv de maxim*) *al funcţiei* f *relativ la* S.

Observatia 3. Reciproca teoremei 2 nu este adevărată aşa cum ne arată următorul exemplu:

Exemplul 4. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *funcţia definită prin*:

$$f(x) = \left(x^2, 0\right), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

şi fie $S = \mathbb{R}$. *Atunci* $x = 0$ *este unicul punct eficient de minim al funcţiei* f *relativ la* S, *în timp ce orice* $x \in S$ *este punct slab eficient de minim al funcţiei* f *relativ la* S.

Teorema 5. *Fie* D *o submulţime nevidă,* S *o submulţime nevidă a lui* D *şi* $f : D \to \mathbb{R}^p$ *o funcţie vectorială. Dacă funcţia* f *are cel puţin un punct ideal de minim* (*respectiv de maxim*) *relativ la* S, *atunci mulţimea punctelor eficiente de minim* (*respectiv de maxim*) *ale funcţiei* f *relative la* S *coincide cu mulţimea punctelor ideale de minim* (*respectiv de maxim*) *ale funcţiei* f *relative la* S.

Demonstraţie. Demonstraţia se poate găsi în [5]. $\square$

Observaţia 6. Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}^p$ nu posedă puncte ideale de minim (respectiv de maxim) relative la mulţimea $S \subseteq D$, nu rezultă numaidecât că ea nu posedă puncte eficiente de minim (respectiv de maxim) relative la S. Există funcţii $f : D \to \mathbb{R}^p$ care nu posedă puncte ideale de minim relative la mulţimi $S \subseteq D$, dar posedă puncte eficiente de minim relative la S (vezi [5]).

Definiţia următoare precizează noţiunea de eficienţă locală:

Definiţia 7. *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie vectorială, S o submulţime nevidă a lui D şi $x_0 \in S$. Spunem că x_0 este*

a) *punct eficient (sau punct Pareto, sau punct nedominat) de minim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct eficient de minim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

b) *punct slab eficient (sau punct Slater, sau punct nedominat strict) de minim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

c) *punct ideal de minim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct ideal de minim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

d) *punct eficient (sau punct Pareto, sau punct nedominat) de maxim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct eficient de maxim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

e) *punct slab eficient (sau punct Slater, sau punct nedominat strict) de maxim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct slab eficient de maxim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

f) *punct ideal de maxim local al funcţiei f relativ la S, dacă există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât x_0 să fie punct ideal de maxim al funcţiei f relativ la $S \cap V$;*

g) *punct eficient (sau punct Pareto, sau punct nedominat) local al funcţiei f relativ la S, dacă x_0 este punct eficient de minim local sau punct eficient de maxim local al funcţiei f relativ la S;*

h) *punct slab eficient (sau punct Slater sau punct nedominat strict) local al funcţiei f relativ la S, dacă x_0 este punct slab eficient de minim local sau punct slab eficient de maxim local al funcţiei f relativ la S;*

i) *punct ideal local al funcţiei f relativ la S, dacă x_0 este punct ideal de minim local sau punct ideal de maxim local al funcţiei f relativ la S.*

Exemplul 8. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funcţia definită prin*

$$f(x) = \left(2x^3 - 3x^2, 0\right),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, şi fie $S = \mathbb{R}$. Atunci $x_0 = 0$ este punct eficient de maxim local al funcţiei f relativ la S, iar $x_0 = 1$ este punct eficient de minim local al funcţiei f relativ la S. Funcţia f nu are puncte eficiente relativ la S. Toate punctele mulţimii S sunt slab eficiente de minim relativ la S şi slab eficiente de maxim relativ la S.

Mai multe proprietăţi ale punctelor eficiente, slab eficiente şi ideale, fără ipoteze de derivabilitate asupra funcţiei, se pot găsi, de exemplu, în [3] şi [5].

În această lucrare vom da câteva condiţii necesare şi câteva condiţii suficiente pentru ca un punct să fie eficient, slab eficient sau ideal pentru o funcţie vectorială derivabilă.

2. Condiţii necesare pentru punctele eficiente, slab eficiente şi ideale ale funcţiilor derivabile

Rezultatele prezentate în acest paragraf generalizează, într-un anumit sens, celebra teoremă a lui *P. Fermat*:

Teorema 9. (*P. Fermat*) *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă*

(i) x_0 *este punct interior al mulţimii* D;

(ii) *funcţia* f *este derivabilă în punctul* x_0;

(iii) x_0 *este punct de optim local al funcţiei* f *relativ la* D,

atunci

$$f'(x_0) = 0.$$

În cazul punctelor ideale are loc o analoagă a teoremei lui *Fermat*:

Teorema 10. *Fie* D *o submulţime nevidă a mulţimii* $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $f_1, \ldots, f_p : D \to \mathbb{R}$ p *funcţii reale. Dacă*

(i) x_0 *este punct interior al mulţimii* D;

(ii) *funcţiile* $f_1, ..., f_p$ *sunt derivabile în punctul* x_0;

(iii) x_0 *este punct ideal local al funcţiei* f *relativ la* D,

atunci

$$f'(x_0) = \left(f_1'(x_0), \cdots, f_p'(x_0)\right) = 0.$$

Demonstraţie. Să presupunem, fără a restrânge generalitatea, că x_0 este punct ideal de minim al funcţiei f relativ la D. Atunci, din (i) şi (iii), urmează că există un număr real $r > 0$ astfel încât $V = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D$ şi $f_k(x_0) \leqq f_k(x)$, oricare ar fi $x \in V \cap D$ şi oricare ar fi $k \in \{1, ...p\}$.

Rezultă că x_0 este punct de minim local pentru fiecare din funcţiile $f_1, ..., f_p$ relativ la D; atunci, în baza teoremei lui *Fermat*, $f_1'(x_0) = 0, ..., f_p'(x_0) = 0$. Teorema este demonstrată.

Să observăm că o analoagă directă a teoremei lui *Fermat* nu are loc în cazul punctelor eficiente şi slab eficiente. Într-adevăr, fie $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţiile definite prin

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^3,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Se poate constata uşor că $x_0 = -1$ este punct eficient (şi slab eficient) de minim local al funcţiei $f = (f_1, f_2)$ relativ la $\mathbb{R}$. Evident funcţiile f_1, f_2 sunt derivabile în punctul $x_0 = -1$ şi $f_1'(-1) = -2$, $f_2'(-1) = 3$, deci $f(x_0) = (-2, 3) \neq (0, 0)$.

Să reformulăm teorema lui *Fermat*:

Teorema 11. (*P. Fermat*) *Fie* D *o submulţime nevidă a mulţimii* $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie. Dacă*

(i) x_0 *este punct interior al mulţimii* D;

(ii) *funcţia* f *este derivabilă în punctul* x_0;

(iii) $f'(x_0) \neq 0$,

atunci x_0 *nu este punct de optim local al funcţiei* f *relativ la* D.

În cazul punctelor eficiente şi slab eficiente are loc o analoagă a teoremei 11:

Teorema 12. *Fie* D *o submulţime nevidă a mulţimii* $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *şi* $f_1, \ldots, f_p : D \to \mathbb{R}$ p *funcţii reale. Dacă*

(i) x_0 *este punct interior al mulţimii* D;

(ii) *funcţiile* $f_1, ..., f_p$ *sunt derivabile în punctul* x_0;

(iii) $f_k'(x_0) > 0$, *oricare ar fi* $k \in \{1, ..., p\}$,

atunci x_0 *nu este punct slab eficient local al funcţiei* $f = (f_1, ..., f_p)$ *relativ la* D.

Demonstraţie. Punctul x_0 fiind interior mulţimii D, există un număr real $\delta > 0$ astfel încât să avem $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$. Pe de altă parte, din faptul că pentru fiecare $k \in \{1, ..., p\}$, avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} = f'_k(x_0) > 0,$$

deducem că, pentru fiecare $k \in \{1, \ldots, p\}$, există un număr real $r_k \in (0, \delta)$ astfel ca să avem

$$\frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} > 0, \tag{1}$$

pentru orice $x \in (x_0 - r_k, x_0 + r_k) \setminus \{x_0\}$.

Fie $r = \min\{r_k : k \in \{1, ..., p\}\}$. Atunci $r > 0$ şi

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq D \cap (x_0 - r_k, x_0 + r_k), \tag{2}$$

pentru orice $k \in \{1, ..., p\}$.

Acum, din (1) şi (2), deducem că

$$f_k(x) < f_k(x_0),$$

pentru orice $x \in (x_0 - r, x_0)$ şi $k \in \{1, ..., p\}$ şi

$$f_k(x) > f_k(x_0),$$

pentru orice $x \in (x_0, x_0 + r)$ şi $k \in \{1, ..., p\}$, adică

$$f(x) < f(x_0), \tag{3}$$

pentru orice $x \in (x_0 - r, x_0)$ şi

$$f(x) > f(x_0),, \tag{4}$$

pentru orice $x \in (x_0, x_0 + r)$, ceea ce ne arată că x_0 nu este nici punct slab eficient de minim local al funcţiei f relativ la D (relaţia (3)), nici punct slab eficient de maxim local al funcţiei f relativ la D (relaţia (4)). □

Cu o demonstraţie analoagă se poate justifica afirmaţia următoare:

Teorema 13. *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f_1, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ p funcţii reale. Dacă*

(i) *x_0 este punct interior al mulţimii D;*

(ii) *funcţiile $f_1, ..., f_p$ sunt derivabile în punctul x_0;*

(iii) *$f'_k(x_0) < 0$, oricare ar fi $k \in \{1, ..., p\}$,*

atunci x_0 nu este punct slab eficient local al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la D.

Observaţia 14. Dacă $p = 1$, atunci teoremele 12 şi 13 devin teorema 11.

Din teoremele 12 şi 13, în baza teoremei 2, rezultă următoarele două afirmaţii:

Teorema 15. *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f_1, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ p funcţii reale. Dacă*

(i) *x_0 este punct interior al mulţimii D;*

(ii) *funcţiile $f_1, ..., f_p$ sunt derivabile în punctul x_0;*

(iii) *$f'_k(x_0) > 0$, oricare ar fi $k \in \{1, ..., p\}$,*

atunci x_0 nu este punct eficient local al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la D.

Teorema 16. *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f_1, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ p funcţii reale. Dacă*

(i) *x_0 este punct interior al mulţimii D;*

(ii) *funcţiile $f_1, ..., f_p$ sunt derivabile în punctul x_0;*

(iii) *$f'_k(x_0) < 0$, oricare ar fi $k \in \{1, ..., p\}$,*

atunci x_0 nu este punct eficient local al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la D.

Observaţia 17. Dacă $p = 1$, atunci teoremele 15 şi 16 devin teorema 11.

Afirmaţia următoare dă o condiţie necesară ca un punct să fie eficient local.

Teorema 18. *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f_1, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ p funcţii reale. Dacă*

(i) *x_0 este punct interior al mulţimii D;*

(ii) *funcţiile $f_1, ..., f_p$ sunt derivabile în punctul x_0;*

(iii) *x_0 este punct eficient local al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la D,*

atunci există p numere reale $a_1, ..., a_p \geqq 0$, nu toate nule, astfel încât

$$a_1 f'_1(x_0) + ... + a_p f'_p(x_0) = 0.$$

Demonstraţie. Numerele reale $f'_1(x_0), \ldots, f'_p(x_0)$ nu pot fi toate strict pozitive sau toate strict negative. Într-adevăr, dacă numerele $f'_1(x_0), ..., f'_p(x_0)$ ar fi toate strict pozitive (sau toate strict negative), atunci în baza teoremei 15 (respectiv a teoremei 16), x_0 nu ar fi punct eficient local al funcţiei f relativ la D, fapt care, evident, contrazice ipoteza.

Atunci avem două posibilităţi:

a) există $k \in \{1, ...p\}$ astfel încât $f'_k(x_0) = 0$,

sau/şi

b) există $k, j \in \{1, ..., p\}$ astfel încât $f'_k(x_0) < 0$ şi $f'_j(x_0) > 0$.

Dacă are loc alternativa a), atunci numerele reale $a_1, ..., a_p$ date de relaţia

$$a_i = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \in \{1, ..., p\} \setminus \{k\} \\ 1, & \text{dacă } i = k, \end{cases}$$

satisfac concluzia teoremei.

Dacă are loc alternativa b), atunci numerele reale $a_1, ..., a_p$ date de relaţia

$$a_i = \begin{cases} f'_j\left(x^0\right), & \text{dacă } i = k \\ -f'_k\left(x^0\right), & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \in \{1, ..., p\} \setminus \{k, j\} \end{cases}$$

satisfac concluzia teoremei. Teorema este demonstrată.

În baza teoremei 2, din teorema 18, rezultă imediat următoarea afirmaţie.

Teorema 19. *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f_1, \ldots, f_p : D \to \mathbb{R}$ p funcţii reale. Dacă*

(i) *x_0 este punct interior al mulţimii D;*

(ii) *funcţiile $f_1, ..., f_p$ sunt derivabile în punctul x_0;*

(iii) *x_0 este punct slab eficient local al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la D,*

atunci există p numere reale $a_1, ..., a_p \geqq 0$, nu toate nule, astfel încât

$$a_1 f'_1(x_0) + ... + a_p f'_p(x_0) = 0.$$

Pentru punctele ideale are loc următoarea afirmaţie:

Teorema 20. *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $f_1, \ldots, f_p : D \to \mathbb{R}$ p funcţii reale. Dacă*

(i) *x_0 este punct interior al mulţimii D;*

(ii) *funcţiile $f_1, ..., f_p$ sunt derivabile în punctul x_0;*

(iii) *x_0 este punct ideal local al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la D,*

atunci, pentru orice p numere reale $a_1, ..., a_p \geqq 0$, are loc egalitatea

$$a_1 f_1' (x_0) + ... + a_p f_p' (x_0) = 0.$$

Demonstraţie. Se aplică teorema 10.

3. Condiţii suficiente pentru punctele eficiente, slab eficiente şi ideale ale funcţiilor derivabile

În cele ce urmează avem nevoie de următoarea afirmaţie a cărei demonstraţie se poate găsi, de exemplu, în [1].

Teorema 21. *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $F : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în x_0. Dacă funcţia F este convexă pe I, atunci*

$$F' (x_0) (x - x_0) \leq F (x) - F (x_0),$$

oricare ar fi $x \in I$.

Are loc următoarea afirmaţie.

Teorema 22. *Fie I un interval al mulţimii $\mathbb{R}$, x_0 un punct interior al lui I şi $f_1, ..., f_p : I \to \mathbb{R}$ p funcţii derivabile în punctul x_0.*

Dacă există p numere reale $a_1, ..., a_p \geqq 0$, nu toate nule, astfel încât:

(i) *funcţia $F = a_1 f_1 + ... + a_p f_p : I \to \mathbb{R}$ este convexă;*

(ii) *$a_1 f_1' (x_0) + ... + a_p f_p' (x_0) = 0$,*

atunci x_0 este punct slab eficient de minim al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la I.

Demonstraţie. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că x_0 nu este punct slab eficient de minim al funcţiei f relativ la I. Atunci există un punct $x_1 \in I$ cu proprietatea că

$$f_k (x_1) < f_k (x_0), \tag{5}$$

oricare ar fi $k \in \{1, ..., p\}$.

Dacă ţinem seama că numerele pozitive $a_1, ..., a_p$ nu sunt toate nule, din (5), deducem că

$$a_1 f_1 (x_1) + ... + a_p f_p (x_1) < a_1 f_1 (x_0) + ... + a_p f_p (x_0),$$

deci

$$F (x_1) < F (x_0). \tag{6}$$

Pe de altă parte, funcţia F este derivabilă în punctul x_0 şi

$$F' (x_0) = a_1 f_1' (x_0) + ... + a_p f_p' (x_0) = 0. \tag{7}$$

Din faptul că funcţia F este convexă, în baza teoremei 21, avem că

$$F' (x_0) (x_1 - x_0) \leqq F (x_1) - F (x_0). \tag{8}$$

Atunci, din (6), (7) şi (8), deducem că

$$0 = F'(x_0)(x_1 - x_0) \leqq F(x_1) - F(x_0) < 0,$$

ceea ce este o contradicţie.

Folosind această teoremă, deducem imediat următoarea afirmaţie:

Teorema 23. *Fie I un interval al mulţimii $\mathbb{R}$, x_0 un punct interior al lui I şi $f_1, ..., f_p : I \to \mathbb{R}$ p funcţii derivabile în punctul x_0. Dacă*

(i) *funcţiile $f_1, ..., f_p$ sunt convexe;*

(ii) *există p numere reale $a_1, ..., a_p \geqq 0$, nu toate nule, astfel încât*

$$a_1 f_1'(x_0) + ... + a_p f_p'(x_0) = 0,$$

atunci x_0 este punct slab eficient de minim al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la I.

Demonstraţie. Se aplică teorema 22, ţinând seama că funcţia $F = a_1 f_1 + + ... + a_p f_p : I \to \mathbb{R}$ este convexă.

Observaţia 24. Dacă $p = 1$, atunci teoremele 22 şi respectiv 23, devin binecunoscuta afirmaţie:

Teorema 25. *Fie I un interval al mulţimii $\mathbb{R}$, x_0 un punct interior al lui I şi $F : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă pe I. Dacă funcţia F este derivabilă în punctul x_0 şi $F'(x_0) = 0$, atunci x_0 este punct de minim al funcţiei F relativ la I.*

Observaţia 26. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funcţia definită prin

$$f(x) = \left(2x^3 - 3x^2, 0\right),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} = I$. Pentru $x_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, ipotezele teoremei 22 sunt îndeplinite; urmează că $x_0 = 0$ este punct slab eficient de minim al lui f relativ la S. Constatăm (vezi exemplul 8) că x_0 nu este punct eficient de minim al lui f relativ la S (nici măcar punct eficient de minim local). Urmează că dacă ipotezele teoremei 22 sunt îndeplinite, nu rezultă că x_0 este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la I.

Următoarele două teoreme ne spun că dacă în teoremele 22 şi 23 numerele $a_1, ..., a_p$ sunt strict pozitive, atunci x_0 este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la I.

Teorema 27. *Fie I un interval al mulţimii $\mathbb{R}$, x_0 un punct interior al lui I şi $f_1, ..., f_p : I \to \mathbb{R}$ p funcţii derivabile în punctul x_0.*

Dacă există p numere reale strict pozitive $a_1, ..., a_p$ astfel încât:

(i) *funcţia $F = a_1 f_1 + ... + a_p f_p : I \to \mathbb{R}$ este convexă;*

(ii) *$a_1 f_1'(x_0) + ... + a_p f_p'(x_0) = 0$,*

atunci x_0 este punct eficient de minim al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la I.

Demonstraţie. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că x_0 nu este punct eficient de minim al funcţiei f relativ la I. Atunci există un punct $x_1 \in I$ cu proprietatea că

$$f_k(x_1) \leqq f_k(x_0), \tag{9}$$

pentru orice $k \in \{1, ..., p\}$ şi există un indice $j \in \{1, ..., p\}$ astfel încât

$$f_j(x_1) < f_j(x_0). \tag{10}$$

Întrucât numerele $a_1, ..., a_p$ sunt strict pozitive, din (9) şi (10), deducem că

$$a_1 f_1(x_1) + ... + a_p f_p(x_1) < a_1 f_1(x_0) + ... + a_p f_p(x_0),$$

deci

$$F(x_1) < F(x_0). \tag{11}$$

Pe de altă parte, funcţia F este derivabilă în punctul x_0 şi

$$F'(x_0) = a_1 f_1'(x_0) + ... + a_p f_p'(x_0) = 0. \tag{12}$$

Din faptul că funcţia F este convexă, în baza teoremei 21, avem că

$$F'(x_0)(x_1 - x_0) \leqq F(x_1) - F(x_0). \tag{13}$$

Atunci, din (11), (12) şi (13), deducem că

$$0 = F'(x_0)(x_1 - x_0) \leqq F(x_1) - F(x_0) < 0,$$

ceea ce este o contradicţie.

Folosind această teoremă, deducem imediat următoarea afirmaţie:

Teorema 28. *Fie I un interval al mulţimii $\mathbb{R}$, x_0 un punct interior al lui I şi $f_1, ..., f_p : I \to \mathbb{R}$ p funcţii derivabile în punctul x_0. Dacă*

(i) *funcţiile f_1, ..., f_p sunt convexe*;

(ii) *există p numere reale strict pozitive $a_1, ..., a_p$ astfel încât*

$$a_1 f_1'(x_0) + ... + a_p f_p'(x_0) = 0,$$

atunci x_0 este punct eficient de minim al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la I.

Demonstraţie. Se aplică teorema 27, ţinând seama că funcţia $F = a_1 f_1 + + ... + a_p f_p : I \to \mathbb{R}$ este convexă.

Observaţia 29. Dacă $p = 1$, atunci teoremele 27 şi respectiv 28, devin teorema 25.

Pentru punctele ideale are loc următoarea afirmaţie:

Teorema 30. *Fie I un interval al mulţimii $\mathbb{R}$, x_0 un punct interior al lui I şi $f_1, ..., f_p : I \to \mathbb{R}$ p funcţii derivabile în punctul x_0. Dacă*

(i) *funcţiile f_1, ..., f_p sunt convexe*;

(ii) *pentru orice p numere reale $a_1, ..., a_p \geqq 0$, are loc egalitatea*

$$a_1 f_1'(x_0) + ... + a_p f_p'(x_0) = 0. \tag{14}$$

atunci x_0 este punct ideal de minim al funcţiei $f = (f_1, ..., f_p)$ relativ la I.

Demonstraţie. Din (14) urmează că

$$f_1'(x_0) = 0, ..., f_p'(x_0) = 0.$$

De aici, în baza teoremei 25, deducem că x_0 este punct de minim al funcţiilor $f_1, ..., f_p$ ceea ce înseamnă că x_0 este punct ideal de minim al funcţiei f relativ la I. Teorema este demonstrată.

Într-o lucrare ulterioară vom da condiţii necesare şi suficiente pentru punctele eficiente, slab eficiente şi ideale ale funcţiilor derivabile de ordin superior.

Bibliografie

[1] D. Andrica, D.I. Duca, I. Purdea şi I. Pop, *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2004.

[2] D.I. Duca şi E. Duca, *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura GIL, Zalău, 1996 (vol.1), 1997 (vol. 2).

[3] D.I. Duca şi E. Duca, *Generalizări ale noţiunii de punct de optim*, Didactica matematicii, nr. 14, pp. 117-126, 1998.

[4] D.I. Duca şi E. Duca, *Condiţii necesare şi condiţii suficiente pentru punctele eficiente şi slab eficiente ale funcţiilor derivabile*, Didactica matematicii, nr. 15, pp. 31-38, 1999.

[5] E. Duca şi D.I. Duca: *Generalizări ale noţiunii de punct de optim: puncte eficiente, puncte slab eficiente şi puncte ideale*, Gazeta Matematică seria A, nr.1, 2007, pp. 23-34.

Universitatea Tehnică,
Catedra de Matematică,
400027 Cluj-Napoca,
e-mail educa@math.utcluj.ro

Universitatea Babeş-Bolyai,
Facultatea de Matematică şi Informatică,
400084 Cluj-Napoca,
e-mail dorelduca@yahoo.com

O generalizare a teoremelor Stolz - Cesàro

DE SORIN PUŞPANĂ

Abstract

The author presents some generalizations of the famous theorem of Stolz-Cesàro (some of them in the frame of a normed space or a normed algebra).

Key words: Stolz-Cesàro theorem, generalizations, normed space, normed algebra.

M.S.C.: 40A05

1. Rezultatele clasice

Vom prezenta în aceasta primă parte binecunoscutele teoreme *Stolz-Cesàro* şi o reciprocă a lor, omiţând demonstraţiile (pentru care poate fi consultată [1]) .

Teorema 1. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât*

(i) *şirul* $(b_n)_{n\geq 1}$ *este strict crescător şi nemărginit*;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{n_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Teorema 2. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

(ii) *şirul* $(b_n)_{n\geq 1}$ *este strict descrescător*;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \mathbb{R}$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Teorema 3. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l\in\overline{\mathbb{R}}$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l.$$

2. Generalizări

Teorema 1 admite următoarea generalizare:

Teorema 4. *Dacă* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *sunt două şiruri de numere reale astfel încât*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=\infty$;

(ii) *şirul* $\left(\dfrac{1}{|b_n|}\sum\limits_{i=1}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|\right))_{n\geq 1}$ *este mărginit*;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l\in\mathbb{R}$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon>0$ si M este un majorant pentru şirul de la (ii). Atunci există $m\in\mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n\geq m$, avem

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

ceea ce implică

$$|a_{n+1}-a_n-l\left(b_{n+1}-b_n\right)|<\frac{\varepsilon}{2M}\left|b_{n+1}-b_n\right|,$$

de unde

$$|a_n-a_m-l\left(b_n-b_m\right)|<\frac{\varepsilon}{2M}\sum_{i=m}^{n-1}|b_{i+1}-b_i|\leq\frac{\varepsilon}{2}|b_n|,$$

pentru orice $n\geq m$.

Obţinem astfel

$$\left|\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}\frac{|b_n|}{|b_n-b+m|},$$

pentru $n>m$.

Dar

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|=\left|\frac{a_m-lb_m}{b_n}+\left(\frac{a_n-a_m}{b_n-b_m}-l\right)\frac{b_n-b_m}{b_n}\right|<$$

$$< \frac{|a_m - lb_m|}{|b_n|} + \left| \frac{a_n - a_m}{b_n - b_m} - l \right| \cdot \frac{|b_n|}{|b_n - b + m|} < \frac{|a_m - lb_m|}{|b_n|} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq m$.

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Corolarul 1. *Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt două şiruri de numere reale astfel încât*

(i) *şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi nemărginit;*

(ii) *şirul $\left(\frac{|b_{n+1} - b_n|}{|b_{n+1}| - |b_n|} \right)$ este mărginit;*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \mathbb{R}$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Într-adevăr, primele două ipoteze ale corolarului implică primele două ipoteze ale teoremei 4.

Teorema 2 admite următoarea generalizare:

Teorema 5. *Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt două şiruri de numere reale astfel încât*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

(ii) *şirul* $\left(\frac{1}{|b_n|} \sum\limits_{i=1}^{n-1} |b_{n+1} - b_n| \right)_{n\geq 1}$ *este mărginit;*

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \mathbb{R}$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi M este un majorant pentru şirul de la (ii).

Atunci există $m \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \geq m$, avem

$$\left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l \right| < \frac{\varepsilon}{M}$$

ceea ce este echivalent cu

$$|a_{n+1} - a_n - l\left(b_{n+1} - b_n\right)| < \frac{\varepsilon}{M} \left|b_{n+1} - b_n\right|,$$

de unde

$$|a_{n+p} - a_n - l\left(b_{n+p} - b_n\right)| < \frac{\varepsilon}{M} \sum_{i=n}^{n+p-1} |b_{i+1} - b_i| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{M} \sum_{i=1}^{n+p-1} |b_{i+1} - b_i| < \varepsilon \left|b_{n+p}\right|,$$

pentru orice $n \geq m$, $p \geq 1$.

Însă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există un şir strict crescător de numere naturale $(p(k))_{k\geq 1}$ astfel încât $\left|b_{n+p(k)}\right| \leq |b_n|$, pentru orice $k \geq 1$, deci putem presupune că $|b_{n+p}| \leq |b_n|$, pentru orice $n \geq m$, $p \geq 1$.

Obţinem astfel

$$|a_{n+p} - a_n - l\,(b_{n+p} - b_n)| < \varepsilon |b_n|,$$

pentru orice $n \geq m$, $p \geq 1$.

Trecând la limită, în ultima inegalitate, după $p \to \infty$, obţinem

$$|a_n - l b_n| < \varepsilon |b_n|,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq m$, adică

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Corolarul 2. *Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt două şiruri de numere reale astfel încât*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

(ii) *şirul* $(|b_n|)_{n\geq 1}$ *este strict descrescător*;

(iii) *şirul* $\left(\dfrac{|b_{n+1} - b_n|}{|b_{n+1}| - |b_n|}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit*;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \mathbb{R}$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Într-adevăr, primele două ipoteze ale corolarului implică primele două ipoteze ale teoremei 4.

Observaţii

(i) Dacă în cele două corolare înlocuim $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ cu $((-1)^n a_n)_{n\geq 1}$, respectiv $((-1)^n b_n)_{n\geq 1}$, obţinem că, pe lânga celelalte ipoteze, din mărginirea şirului $\left(\dfrac{|b_{n+1} - b_n|}{|b_{n+1}| - |b_n|}\right)_{n\geq 1}$ şi din $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

(ii) Teorema reciprocă poate fi îmbunătăţită cerând în locul ipotezei (i) ca şirul $\left(\dfrac{|b_{n+1} - b_n|}{|b_{n+1}| - |b_n|}\right)_{n\geq 1}$ să fie mărginit.

Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$, avem

$$\left|\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l\right| < \frac{|b_{n+1} - b_n|}{|b_{n+1}| - |b_n|},$$

pentru orice $n \geq m$.

(iii) Din demonstraţiile date şi din enunţurile teoremelor şi corolarelor, este evident că ele rămân valabile şi în ipoteza că $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ sunt şiruri de numere complexe. De fapt rezultatele pot fi extinse, aşa cum vom vedea în continuare, la un cadru mai larg.

Fie $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$.

Teorema 6. *Dacă $(X, ||\cdot||)$ este un spaţiu normat peste corpul K, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri din X, astfel încât:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} ||b_n|| = \infty$;

(ii) *şirul* $\left(\dfrac{1}{||b_n||}\sum\limits_{i=1}^{n-1}||b_{i+1}-b_i||\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit*;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)\|}{\|b_{n+1}-b_n\|} = 0$, *unde* $l \in K$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|a_n - l\cdot b_n\|}{\|b_n\|} = 0.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi M este un majorant pentru şirul de la (ii), Atunci există $m \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n \geq m$, avem

$$\frac{\|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)\|}{\|b_{n+1}-b_n\|} < \frac{\varepsilon}{2M}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)\|\,\frac{\varepsilon}{2M}\,\|b_{n+1}-b_n\|$$

de unde

$$\|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}\sum_{i=m}^{n-1}\|b_{i+1}-b_n\|.$$

Obţinem astfel

$$\|a_n - lb_n\| \leq \|a_m - lb_m\| + \|a_n - a_m - l\,(b_n - b_m)\| < \|a_m - lb_m\| + \frac{\varepsilon}{2}\|b_n\|,$$

de unde

$$\frac{\|a_n - lb_n\|}{\|b_n\|} < \frac{\|a_m - lb_m\|}{\|b_n\|} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

pentru orice $m \geq n$, de unde concluzia.

Corolarul 3. *Dacă $(X, ||\cdot||)$ este un spaţiu normat peste corpul K, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri din X astfel încât*

(i) *şirul* $(\|b_n\|)_{n\geq 1}$ *este strict crescător şi nemărginit*;

(ii) *şirul* $\left(\dfrac{\|b_{n+1}-b_n\|}{\|b_{n+1}\| - |b_n|}\right)$ *este mărginit*;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \mathbb{R}$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l.$$

Într-adevăr, primele două ipoteze ale corolarului implică primele două ipoteze ale teoremei 6.

Teorema 7. *Dacă* $(X, ||\cdot||)$ *este un spaţiu normat peste corpul* K*, iar* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri din* X*, astfel încât*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

(ii) *şirul* $\left(\dfrac{1}{\|b_n\|}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\|b_{i+1}-b_i\|\right)$ *este mărginit*;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)\|}{\|b_{n+1}-b_n\|}=0$, *unde* $l\in K$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{||a_n - lb_n|}{||b|_n||}=0.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon>0$ şi M este un majorant pentru şirul de la (ii).

Atunci există $m\in\mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n\geq m$, avem

$$\|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)\|<\frac{\varepsilon}{M}\|b_{n+1}-b_n\|,$$

de unde

$$\|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)\|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{M}\sum_{i=n}^{n+p-1}\|b_{i+1}-b_i\|<\frac{\varepsilon}{M}\sum_{i=1}^{n+p-1}\|b_{i+1}-b_i\|\leq\varepsilon\|b_{n+p}\|,$$

pentru orice $n\geq m$, pentru orice $p\geq 1$.

Însă, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, există un şir strict crescător de numere naturale $(p(k))_{n\geq 1}$ astfel încât $\left\|b_{n+p(k)}\right\|\leq\|b_n\|$, pentru orice $k\geq 1$, deci putem presupune că $\|b_{n+p}\|\leq\|b_n\|$, pentru orice $n\geq m$ şi pentru orice $p\geq 1$.

Obţinem astfel

$$\|a_{n+p}-a_n-l\,(b_{n+p}-b_n)\|<\varepsilon||b_n||,$$

pentru orice $n\geq m$, $p\geq 1$.

Trecând la limita, în ultima inegalitate, după $p\to\infty$, obţinem

$$\|a_n-lb_n\|<\varepsilon\|b_n\|,$$

pentru orice $n\geq m$, de unde

$$\frac{\|a_n-lb_n\|}{\|b_n\|}<\varepsilon,$$

pentru orice $n\geq m$. Astfel rezultă concluzia.

Corolarul 4. *Dacă* $(X, ||\cdot||)$ *este un spaţiu normat peste corpul* K*, iar* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri din* X *astfel încât*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

(ii) *şirul* $(\|b_n\|)_{n\geq 1}$ *este strict descrescător*;

(iii) *şirul* $\left(\dfrac{\|b_{n+1}-b_n\|}{\|b_{n+1}\|-|b_n|}\right)$ *este mărginit*;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)\|}{\|b_{n+1}-b_n\|}=0$, *unde* $l\in K$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_n-lb_n\|}{\|b_n\|}=0.$$

Într-adevăr, primele două ipoteze ale corolarului implică primele două ipoteze ale teoremei 7.

Teorema 8. *Dacă* $(A,||\cdot||)$ *este o algebră normată cu unitate, iar* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri din A astfel încât*

(i) b_n şi $b_{n+1}-b_n$ *sunt inversabile în* A, pentru orice $n\geq 1$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|b_n^{-1}\right\|=0$;

(iii) *şirul* $\left(\left\|b_n^{-1}\right\|\sum\limits_{i=1}^{n-1}\|b_{i+1}-b_i\|\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit*;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n)^{-1}=l\in A$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n^{-1}=l.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon>0$ şi $M>0$ un majorant pentru şirul de la (iii).

Atunci există $m\in\mathbb{N}$, astfel încât

$$\|a_{n+1}-a_n-l\,(b_{n+1}-b_n)\|=\left\|\left[(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n)^{-1}-l\right](b_{n+1}-b_n)\right\|\leq$$

$$\leq\left\|(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n)^{-1}-l\right\|\cdot\|b_{n+1}-b_n\|\leq\frac{\varepsilon}{2M}\|b_{n+1}-b_n\|,$$

pentru orice $n\geq m$, de unde

$$\|a_n-a_m-l\,(b_n-b_m)\|\leq\frac{\varepsilon}{2M}\sum_{i=m}^{n-1}\|b_{i+1}-b_i\|,$$

pentru orice $n\geq m$.

Obţinem astfel

$$\left\|a_nb_n^{-1}-l\right\|=\left\|(a_n-lb_n)\,b_n^{-1}\right\|\leq\|a_n-lb_n\|\cdot\left\|b_n^{-1}\right\|\leq$$

$$\leq\|a_n-lb_n\|\cdot\left\|b_n^{-1}\right\|+\|a_n-a_m-l\,(b_n-b_m)\|\cdot\left\|b_n^{-1}\right\|\leq$$

$$\leq\|a_m-lb_m\|\cdot\left\|b_n^{-1}\right\|+\frac{\varepsilon}{2M}\left\|b_n^{-1}\right\|\sum_{i=m}^{n-1}\|b_{i+1}-b_n\|\leq$$

$$\leq\|a_m-lb_m\|\cdot\left\|b_n^{-1}\right\|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

pentru orice $n\geq m$, de unde concluzia.

Corolarul 5. *Dacă* $(A,||\cdot||)$ *este o algebră normată cu unitate, iar* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri din A astfel încât*

(i) b_n şi $b_{n+1}-b_n$ *sunt inversabile în* A, *pentru orice* $n\geq 1$;

(ii) *şirul* $\left(\frac{1}{\left\|b_n^{-1}\right\|}\right)_{n\geq 1}$ *este strict crescător şi nemărginit*;

(iii) *şirul* $\left(\frac{\|b_{n+1}-b_n\|\cdot\left\|b_n^{-1}\right\|\cdot\left\|b_{n+1}^{-1}\right\|}{\left\|b_n^{-1}\right\|-\left\|b_{n+1}^{-1}\right\|}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit*;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n)^{-1}=l\in A$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n^{-1}=l.$$

Într-adevăr, primele două ipoteze ale corolarului implică primele două ipoteze ale teoremei 8.

Teorema 9. *Dacă* $(A,||\cdot||)$ *este o algebraă normată cu unitate, iar* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri din* A *astfel încât*

(i) b_n şi $b_{n+1}-b_n$ *sunt inversabile în* A, *pentru orice* $n\geq 1$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$;

(iii) *şirul* $\left(\left\|b_n^{-1}\right\|\sum\limits_{i=1}^{n-1}\|b_{i+1}-b_i\|\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit*;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n)^{-1}=l\in A$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n^{-1}=l.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon>0$ şi $M>0$ un majorant pentru şirul de la (iii).

Atunci există $m\in\mathbb{N}$ astfel încât

$$\|a_{n+1}-a_n-l(b_{n+1}-b_n)\|=\left\|\left[(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n)^{-1}-l\right](b_{n+1}-b_n)\right\|\leq$$

$$\leq\left\|(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n)^{-1}-l\right\|\cdot\|b_{n+1}-b_n\|\leq\frac{\varepsilon}{M}\|b_{n+1}-b_n\|,$$

pentru orice $n\geq m$.

Atunci

$$\|a_{n+p}-a_n-l(b_{n+p}-b_n)\|\leq\frac{\varepsilon}{M}\sum_{i=n}^{n-1}\|b_{i+1}-b_i\|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{M}\sum_{i=1}^{n-1}\|b_{i+1}-b_i\|\leq\varepsilon\frac{1}{\left\|b_{n+p}^{-1}\right\|},$$

pentru orice $n\geq m$, $p\geq 1$.

Dacă u este unitatea algebrei A, atunci

$$\|u\|=\left\|b_n\cdot b_n^{-1}\right\|\leq\|b_n\|\cdot\left\|b_n^{-1}\right\|$$

şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left\|b_{n+p}^{-1}\right\|}=0$. Atunci putem presupune că există $p_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $\frac{1}{\left\|b_{n+p}^{-1}\right\|}\leq\frac{1}{\left\|b_n^{-1}\right\|}$, pentru orice n şi orice $p\geq p_0$. Obţinem astfel

$$\left\|a_n b_n^{-1}-l\right\|=\left\|(a_n-lb_n)\cdot b_n^{-1}\right\|\leq\|a_n-lb_p\|\cdot\left\|b_n^{-1}\right\|\leq$$

$$\leq \|a_p - lb_p\| \cdot \left\|b_n^{-1}\right\| + \|a_n - a_p - l\,(b_n - b_p)\| \cdot \left\|b_n^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \|a_p - lb_p\| \cdot \left\|b_n^{-1}\right\| + \varepsilon \frac{1}{\left\|b_n^{-1}\right\|} \left\|b_n^{-1}\right\| \leq \|a_p - lb_p\| \cdot \left\|b_n^{-1}\right\| + \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq m$ şi orice $p \geq p_0$.

Trecând la limită, după $p \to \infty$, în inegalitatea

$$\left\|a_n b_n^{-1} - l\right\| \leq \|a_p - lb_p\| \cdot \left\|b_p^{-1}\right\| + \varepsilon,$$

obţinem

$$\left\|a_n b_n^{-1} - l\right\| \leq \varepsilon,$$

pentru orice $n \geq m$, de unde obţinem concluzia.

Corolarul 6. *Dacă $(A, ||\cdot||)$ este o algebra normată cu unitate, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri din A astfel încât*

(i) b_n şi $b_{n+1} - b_n$ *sunt inversabile în A, pentru orice* $n \geq 1$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$;

(iii) *şirul* $\left(\left\|b_n^{-1}\right\|\right)_{n\geq 1}$ *este strict crescător*;

(iv) *şirul* $\left(\dfrac{\|b_{n+1} - b_n\| \cdot \left\|b_n^{-1}\right\| \cdot \left\|b_{n+1}^{-1}\right\|}{\left\|b_n^{-1}\right\| - \left\|b_{n+1}^{-1}\right\|}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit*;

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)\,(b_{n+1} - b_n)^{-1} = l \in A$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n^{-1} = l.$$

Într-adevăr, primele patru ipoteze ale corolarului implică primele trei ipoteze ale teoremei 9.

Iată în continuare şi două reciproce, în genul teoremei 3, cu îmbunătăţirea din observaţia (ii).

Teorema 10. *Dacă $(X, ||\cdot||)$ este un spaţiu normat peste corpul K, iar $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ două şiruri din X astfel încât*

(i) *şirul* $\left(\dfrac{\|b_n\| + \|b_{n+1}\|}{\|b_{n+1} - b_n\|}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit*;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|a_n - lb_n\|}{\|b_n\|} = 0$, *unde* $l \in K$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1} - a_n - l\,(b_{n+1} - b_n)\|}{\|b_{n+1} - b_n\|} = 0.$$

Demonstraţie. Pentru $\varepsilon > 0$ şi n suficient de mare, avem

$$\frac{\|a_{n+1} - a_n - l\,(b_{n+1} - b_n)\|}{\|b_{n+1} - b_n\|} \leq \frac{\|a_{n+1} - lb_{n+1}\| + \|a_n - lb_n\|}{\|b_{n+1} - b_n\|} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot \frac{\|b_n\| + \|b_{n+1}\|}{\|b_{n+1} - b_n\|} < \varepsilon,$$

unde M este un majorant al şirului de la (i).

Teorema 11. *Dacă* $(A, ||\cdot||)$ *este o algebră normată cu unitate iar* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri din* A*, astfel încât*

(i) b_n şi $b_{n+1} - b_n$ *sunt inversabile în* A*, pentru orice* $n \geq 1$;

(ii) *şirul* $\left((\|b_n\| + \|b_{n+1}\|) \cdot \|(b_{n+1} - b_n)\| \right)_{n\geq 1}$ *este mărginit*;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n^{-1} = l \in A$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)(b_{n+1} - b_n)^{-1} = l.$$

Demonstraţie. Pentru $\varepsilon > 0$, M un majorant pentru şirul de la (ii) şi n suficient de mare, avem

$$\left\|(a_{n+1} - a_n)(b_{n+1} - b_n)^{-1} - l\right\| = \left\|[a_{n+1} - a_n - l(b_{n+1} - b_n)] \cdot (b_{n+1} - b_n)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \|a_{n+1} - a_n - l(b_{n+1} - b_n)\| \cdot \left\|(b_{n+1} - b_n)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq (\|a_{n+1} - lb_{n+1}\| + \|a_n - lb_n\|) \cdot \left\|(b_{n+1} - b_n)^{-1}\right\| \leq$$

$$\left(\left\|a_{n+1}b_{n+1}^{-1} - l\right\| \cdot \|b_{n+1}\| + \left\|a_n b_n^{-1} - l\right\| \cdot \|b_n\|\right) \left\|(b_{n+1} - b_n)^{-1}\right\| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{M}(\|b_n\| + \|b_{n+1}\|) \cdot \left\|(b_{n+1} - b_n)^{-1}\right\| \leq \varepsilon,$$

de unde concluzia.

3. Aplicaţii

Problema 1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(u_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in (1, \infty)$*. Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *are limită dacă şi numai dacă şirul* $(u_n x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ *are limită, caz în care avem*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{u-1} \lim_{n\to\infty} (u_n x_{n+1} - x_n).$$

Indicaţie. Se aplică teoremele 1 şi 3 şirurilor $a_n = u_1 u_U \ldots u_n x_n$ şi $b_n = u_1 u_2 \ldots u_{n-1}$. Folosind corolarul 1 putem extinde acest rezultat şi pentru valori negative ale lui u, pierzând însă cazul limitelor infinite, ca mai jos:

Problema 2. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(u_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, $|u| > 1$*. Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergnt dacă şi numai dacă şirul* $(u_n x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, caz în care avem*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{u-1} \lim_{n\to\infty} (u_n x_{n+1} - x_n).$$

Observaţie. Rezultatul rămâne valabil dacă şirurile ce intervin în enunţ sunt şiruri de numere complexe.

Următoarea problema ne prezintă în ce condiţii rezultatul anterior rămâne valabil în cazul lui $|u| < 1$.

Problema 3. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(u_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri de numere reale astfel încât* $(x_n)_{n\geq 1}$ *să fie mărginit iar* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, $|u| < 1$*. Atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este* *convergent dacă şi numai dacă şirul* $(u_n x_{n+1} - x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, caz în care avem*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{u-1} \lim_{n\to\infty} (u_n x_{n+1} - x_n).$$

Indicaţie. Se aplică corolarul 2 şirurilor $a_n = u_1 u_2 \dots u_n x_n$ şi $b_n = u_1 u_2 \dots u_{n-1}$.

Din nou facem observaţia că rezultatul rămâne valabil şi pentru şiruri de numere complexe.

Este evident că ţinând seama de observaţia (i) rezultatele anterioare rămân valabile dacă înlocuim $u_n x_{n+1} - x_n$ cu $u_n x_{n+1} + x_n$ şi $u-1$ cu $u+1$. Toate acestea pot fi restrânse în

Problema 4. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir mărginit de numere complexe, iar* $(u_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(v_n)_{n\geq 1}$ *două şiruri convergente de numere complexe astfel încât*

$$\left|\lim_{n\to\infty} u_n\right| \neq \left|\lim_{n\to\infty} v_n\right|.$$

Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent dacă şi numai dacă şirul* $(u_n x_{n+1} + v_n x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent, caz în care avem*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} (u_n x_{n+1} + v_n x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n}$$

Problema următoare este demonstrată în [2] şi generalizează problema 2.

Problema 5. *Fie* $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ *şi* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale cu proprietatea că şirul* $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k}$, *este convergent. Dacă polinomul* $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ *are toate rădăcinile de modul subunitar, atunci şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent.*

Indicaţie. Demonstraţia se face prin inducţie după k, primul pas al inducţiei reducându-se la: $\lambda < 1$ şi $(x_{n+1} - \lambda x_n)_{n\geq k}$ convergent $\Rightarrow (x_n)_{n\geq k}$ convergent, adică un caz particular al problemei 2.

Am văzut însă că dacă cerem mărginirea lui $(x_n)_{n\geq k}$ atunci afirmaţia anterioară rămâne adevărată pentru $|\lambda| \neq 1$ şi, prin urmare, teorema rămâne valabilă dacă rădăcinile polinomului sunt în modul diferite de unitate. Obţinem astfel următoarea generalizare:

Problema 6. *Fie* $(a_n^{(0)})_{n\geq 1}$, $(a_n^{(1)})_{n\geq 1}$, $\dots$, $(a_n^{(k)})_{n\geq 1}$, $k+1$ *şiruri de numere complexe, convergente respectiv către* $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$, *astfel încât rădăcinile polinomului* $a^{(0)} x^k + a^{(1)} x^{k-1} + \dots + a^{(k)}$ *să fie în modul diferite de unitate.*

Atunci, un şir mărginit $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent dacă şi numai dacă şirul* $\left(a_n^{(0)} x_n + a_n^{(1)} x_{n-1} + \dots + a_n^{(k)} x_{n-k}\right)_{n\geq k+1}$ *este convergent, caz în care avem*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_n^{(0)} x_n + a_n^{(1)} x_{n-1} + \dots + a_n^{(k)} x_{n-k}\right)}{a^{(0)} x^k + a^{(1)} x^{k-1} + \dots + a^{(k)}}.$$

Demonstraţie. Dacă

$$y_n = a_n^{(0)} x_n + a_n^{(1)} x_{n-1} + \dots + a_n^{(k)} x_{n-k} \quad \text{şi} \quad z_n = a^{(0)} x_n + a^{(1)} x_{n-1} + \dots + a^{(k)} x_{n-k}$$

atunci, cum $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - z_n) = 0$. Cum însă $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent rezultă că $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi conform problemei precedente (care este valabilă şi pentru şiruri de numere complexe) şi observaţiei făcute, rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent, iar relaţia finală este evidentă.

Problema 7. (Jensen) *Fie şirurile* $(a_n)_{n\geq 1}$ *şi* $(b_n)_{n\geq 1}$ *astfel încât: seria* $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ *este convergentă, şirul* $\left(\dfrac{|y_1| + \ldots + |y_n|}{|y_1 + \cdots + y_n|}\right)_{n\geq 1}$ *este mărginit şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 \cdots + y_n} = l.$$

Bibliografie

[1] D.M. Bătineţu, *Şiruri*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1979.

[2] O. Mayer, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Ed. Academiei, 1981.

C. N. Ştefan Volovan
Craiova

Aproximarea polinomială uniformă a funcţiilor continue [1]

DE ANDREI VERNESCU

Dedicat domnului acad. prof. D.D.Stancu,
cu prilejul împlinirii vârstei de 80 de ani

Abstract

In this introductory expository survey we present the principal problems of the uniform polynomial approximation of the continuous functions.

Key words: Interpolation, polynomial, convergence, theorem of Weierstrass.
M.S.C.: 41A10, 41A25, 41A36, 41A50, 41A80

Partea întâi

1. Interpolarea polinomială Lagrange

Problema interpolării, iar apoi a aproximării unor funcţii „complicate“, s-a pus încă din secolul al XVII-lea, când *Gregory*, *Newton* şi *Stirling* au stabilit formule de interpolare care astăzi le poartă numele; alte formule au fost stabilite de *Gauss*, respectiv *Bassel* (a se vedea [6], [7], [9], [10]).

Una dintre cele mai cunoscute şi mai naturale probleme de interpolare este următoarea: fiind dată o funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi un sistem de $m+1$ puncte $a \leq a_0 < a_1 < \ldots < a_m \leq b$, să se construiască un polinom algebric [1)], de grad minim care să coincidă cu funcţia f în toate cele $m+1$ puncte (aceste puncte fiind numite „noduri“, deoarece graficele funcţiei f şi polinomului „se înnoadă“ în punctele

[1)] Această precizare care ar putea părea de prisos, la prima vedere, face deosebirea faţă de polinoamele trigonometrice $T_m(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, cu care se aproximează funcţiile periodice de perioadă 2π definite pe intervalul $[-\pi, \pi]$. (N.A.)

de abscise a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$). Soluţia este dată de polinomul de interpolare al lui *Lagrange* (introdus de acesta în anul 1795):

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} l_k(x) f(a_k), \tag{1.1}$$

unde

$$l_k(x) = \frac{u(x)}{(x - a_k)u'(a_k)} = \frac{u_k(x)}{u_k(a_k)}, \tag{1.2}$$

cu

$$u_k(x) = (x - a_0) \cdot \ldots \cdot (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \cdot \ldots (x - a_m), \tag{1.3}$$

(adică, în tot produsul din membrul drept al formulei (1.3) s-a „omis“ factorul $x - a_k$).

Folosind formulele precedente, se deduce imediat că $(L_m f)(a_k) = f(a_k)$, pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ şi că $(L_m(L_m f))(x) = (L_m f)(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$. Cu polinomul $L_m f$ astfel construit, formula de interpolare a lui *Lagrange* este:

$$f(x) = (L_m f)(x) + (R_m f)(x) \tag{1.4}$$

în care $R_m f$ este restul de ordinul n al formulei lui *Lagrange*. Atragem atenţia că scrierea $f(x) \approx (L_m f)(x)$ este lipsită de sens, deoarece nu spune nimic despre eroarea care se produce în calcule, dacă, pentru un punct oarecare $x \in [a, b]$ se înlocuieşte $f(x)$ cu $(L_m f)(x)$. [De altfel, orice formulă de aproximare pe $\mathbb{R}$ sau într-un spaţiu *Banach* printr-un şir de aproximante nu poate fi scrisă corect decât sub forma :

$$\text{obiect aproximat} = \text{aproximant de ordinul } m + \text{rest de ordinul } m$$

sau, simbolic:

$$OA = OA_m + R_m \tag{1.5}$$

unde se cunoaşte o anumită majorare pentru $||R_m||$. (Scrierea $OA \approx OA_n$ este lipsită de sens, din motivul expus anterior.)]

Precizăm că nu întotdeauna avem $\lim\limits_{m\to\infty} ||R_m|| = 0$; de exemplu, într-un proces de aproximare, am putea avea majorarea:

$$||R_m|| < \frac{1}{1000} \frac{m-1}{m} ||OA||;$$

aceasta ne arată că eroarea este mai mică decât o miime din norma („mărimea“) obiectului aproximat (ceea ce în anumite aplicaţii tehnice poate fi satisfăcător – în altele nu –), dar nu avem $\lim\limits_{n\to\infty} ||R_m|| = 0$.

Revenind la formula de aproximare prin interpolare a lui *Lagrange*, menţionăm că există aumite exprimări pentru $R_m f$, cât şi anumite majorări pentru $||R_m f||$ ($||R_m f|| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |(R_m f)(x)|$) în diferite ipoteze de netezime pentru f.

Mai semnalăm, în treacăt, o proprietate interesantă: dacă se efectuează interpolarea *Lagrange* pe intervalul $[-1, 1]$, atunci $||R_m f||$ va fi minim când drept noduri a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$ vor fi alese cele m rădăcini – întotdeauna distincte – ale polinomului de gradul m al lui *Cebâşev*, $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$. (Polinomul lui *Cebâşev* mai are o proprietate remarcabilă, anume:

$$||\widetilde{T}_m|| \geq ||P||$$

pentru orice $P \in \Pi_m^* =$ mulţimea polinoamelor monice cu coeficienţi reali, de grad mai mic sau egal cu m, unde $\widetilde{T}_m = \dfrac{1}{2^{m-1}} T_m \in \Pi_m^*$ este polinomul monic al lui *Cebâşev* de gradul m. Prin $||f||$ s-a notat norma – supremum în spaţiul $\mathcal{C}[-1, 1]$, adică $||f|| = \sup\limits_{x \in [-1,1]} |f(x)|$.)

2. Interpolarea polinomială Hermite

O problemă de interpolare mult mai generală este următoarea: Să considerăm că, pentru o funcţie derivabilă cel puţin de un ordin dat $n + 1$, pe aceleaşi noduri ca la interpolarea *Lagrange*, a_k (unde $k = 0, 1, 2, \ldots, m$) se cunosc următoarele date:

- pe nodul a_0: $f(a_0), f'(a_0), \ldots, f^{(r_0)}(a_0)$;
- pe nodul a_1: $f(a_1), f'(a_1), \ldots, f^{(r_1)}(a_1)$;

....

- pe nodul a_m: $f(a_m), f'(a_m), \ldots, f^{(r_m)}(a_m)$;

Se pune problema construirii unui polinom algebric P_n, de gradul n, astfel încât acesta să coincidă cu f pe noduri, dar şi toate derivatele sale pe noduri să coincidă cu derivatele lui f pe noduri, până la ordinele indicate, adică:

$P_n(a_0) = f(a_0),\ P_n'(a_0) = f'(a_0);\ \ldots;\ P_n^{(r_0)}(a_0) = f^{(r_0)}(a_0)$;
$P_n(a_1) = f(a_1),\ P_n'(a_1) = f'(a_1);\ \ldots;\ P_n^{(r_1)}(a_1) = f^{(r_1)}(a_1)$
....
$P_n(a_m) = f(a_m),\ P_n'(a_m) = f'(a_m);\ \ldots;\ P_n^{(r_m)}(a_m) = f^{(r_m)}(a_m)$

Problema a fost rezolvată în anul 1878 de către *Hermite*, care a definit polinomul care se scrie sub forma

$$(H_n f)(x) = \sum_{k=0}^{m} u_k(x) \sum_{j=0}^{r_k} \frac{(x - a_k)^j}{j!} \left(\frac{f(t)}{u_k(t)} \right)^j (a_k), \tag{2.1}$$

unde

$$u(x) = (x - a_0)^{r_0+1}(x - a_1)^{r_1+1} \cdot \ldots \cdot (x - a_m)^{r_m+1}. \tag{2.2}$$

Polinomul $H_n f$ se numeşte polinomul de interpolare al lui *Lagrange-Hermite*. Dar, datorită faptului că, dacă $r_k > 0$, atunci, pe punctul a_k vor coincide şi derivatele de ordin cel puţin unu, deci vom avea o „racordare“ a graficelor polinomului şi funcţiei, polinomul $H_n f$ se mai numeşte – împrumutând un termen din geometria diferenţială - polinomul de interpolare osculatoare a lui *Lagrange-Hermite*.

Formula (2.1) a fost stabilită de *P. Johansen* [3] în 1932. O metodă directă de determinare a expresiei explicite a polinomului $H_n f$ a fost elaborată de către acad. *D.D.Stancu* în 1957, în lucrarea [5].

Polinomul lui *Lagrange-Hermite* constituie o generalizare profund nebanală a polinomului lui *Lagrange*, care se regăseşte în cazul în care toate nodurile sunt simple ($r_k = 0$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$); totodată, dacă se consideră cazul unui singur nod, se regăseşte formula lui *Taylor*.

În cazul particular a două noduri, acad. *D.D. Stancu* a dedus, în 1958, o formulă de cuadratură de tip *Hermite*, regăsită ulterior de *L. Tchakaloff* [12] şi *N. Obrechkoff* [4] pe alte căi. Folosind această formulă de interpolare, acad. *D. D. Stancu* a stabilit în [5] o formulă generală de derivare numerică.

3. Teorema de aproximare a lui Weierstrass

În anul 1885 *Weierstrass* a enunţat şi a demonstrat următoarea foarte importantă:

Teoremă. *Orice funcţie reală continuă, definită pe un interval compact* $[a, b]$ *este limita uniformă a unui şir de polinoame.*

În afară de demonstraţia iniţială, dată de *Weierstrass*, au mai dat demonstraţii *Ch. de la Vallée-Poussin* şi *H. Lebesgue*.

În 1912, în [1], *S. N. Bernstein* a dat o demonstraţie constructivă a teoremei lui *Weierstrass* definind polinoamele $B_n f$:

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.1}$$

care astăzi îi poartă numele, arătând că, pe intervalul $[0, 1]$, şirul de polinoame $(B_n f)_n$ tinde uniform către funcţia f.

De asemenea, ulterior *L. Fejer*, prelucrând polinomul lui *Lagrange-Hermite* cu toate nodurile duble a definit polinoamele F_{2m+1} :

$$(F_{2m+1} f)(x) = \sum_{k=0}^{m} h_k(x) f(a_k) \tag{3.2}$$

cu

$$h_k(x) = (1 - a_k x) \left(\frac{T_{m+1}(2)}{(n+1)(x-a_k)} \right)^2,$$

unde a_k sunt rădăcinile polinomului lui *Cebâşev* T_{m+1}, iar $f \in [-1, 1]$. Aceste polinoame converg uniform către f, deci acest fapt constituie încă o demonstraţie constructivă a teoremei lui *Weierstrass*.

La interpolarea *Lagrange* s-ar fi putut crede că dacă numărul $m+1$ al nodurilor creşte indefinit, astfel ca distanţa dintre două noduri consecutive oarecare să tindă către 0, atunci polinomul $L_m f$ va tinde la f. Acest lucru nu are loc întotdeauna, după cum au stabilit *C. Méray* şi *C. Runge*. Cercetările lor au fost continuate şi aprofundate de către *G. Faber* şi *S. N. Bernstein* în perioada 1914-1916, iar ulterior de către *G. Grümwald* în 1935 şi *J. Marcinkiewicz* în 1937 (a se vedea [9] şi [10]).

Încheiem această primă parte a articolului menţionând că în 1948 în [11], după o analiză aprofundată a ipotezelor din teorema lui *Weierstrass*, *M. H. Stone* a generalizat teorema lui *Weierstrass* astfel: Dacă $\mathcal{C}(K)$ este spaţiul funcţiilor reale continue pe un spaţiu metric compact K, iar $\mathcal{A}$ este o algebră de funcţii din $\mathcal{C}(K)$ care conţine funcţiile constante şi separă punctele din K[1)], atunci orice funcţie $f \in \mathcal{C}(K)$ este limita unui şir uniform convergent de elemente din $\mathcal{A}$.

1) Prin această exprimare se înţelege că, pentru oricare puncte $u, v \in K$, există o funcţie $h \in \mathcal{A}$, astfel încât $h(u) \neq h(v)$.

Bibliografie

[1] S.N.Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass, fondée sur le calcul de probabiltés*, Comm. de la Société Mathématique de Kharkow, **13** 1912-1913, No. 1, pp. 1-2.
[2] C. Hermite, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, J. Reine Angew. Math. **84** 1878, pp. 70-79.
[3] P. Johansen, *Über osculierende Interpolation*, Skand. Aktuarietskr. **14** 1931, pp. 231-237.
[4] N. Obrechkoff, *Neue Quadraturformeln*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math-Nat. Kl. **4** 1940, pp. 1-20.
[5] D. D. Stancu, *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite şi a unor aplicaţii ale acesteia*, Acad. R.P.Rom. Studii şi Cercetări Matematice, Fil. Cluj a Academiei **8** 1957, pp. 339-355.
[6] D. D. Stancu, *Asupra unei formule generale de integrare numerică*, Acad. R.P.Rom. Studii şi Cercetări Matematice, Cluj **9** 1958, pp. 209-216.
[7] D. D. Stancu, A. H. Stroud, *Quadrature formulas with simple Gaussian nodes and multiple fixwd nodes*, Math. Comp., **17** 1963, pp. 384-394.
[8] D. D. Stancu, *On Hermite's osculatory interpolation formula and some generalizations of it*, Mathematica, Cluj, **8** (31), 1966, pp. 373-391.
[9] D. D. Stancu, *Curs şi culegere de probleme de Analiză numerică*, Ed. Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1977.
[10] D. D. Stancu şi colectiv, *Analiză numerică şi teoria aproximării*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2001.
[11] M. H. Stone, *The generalized Weierstrass approximation theorem*, Math. Magazine, **21** 1948, pp. 167-184, pp. 237-254.
[12] A. L. Tchakaloff, *Eine Integral Darstellung der Newtonsche Differenzquotienten*, Jahrb. Univ. Sofia Math. Fak., **34** pp. 1938, pp. 353-405.

Universitatea Valahia,
Târgovişte

<u>EXAMENE ŞI CONCURSURI</u>

Concursul naţional pentru ocuparea posturilor didactice vacante în învăţământul preuniversitar 16 iulie 2007

Probă scrisă la Matematică

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
• Timp de lucru efectiv 4 ore.

Subiectul I (20p)

Se consideră M mulţimea numerelor naturale nenule, care nu au cifra 9 în scrierea lor în baza 10.

a) Să se verifice că $1 \in M$, $10 \in M$, $18 \in M$ şi $19 \in M$. (4p)

b) Să se determine cel mai mic şi cel mai mare număr natural din mulţimea M care se scriu în baza 10 utilizând 5 cifre. (4p)

c) Să se arate că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\geq\frac{n}{2}+1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. (4p)

d) Să se determine numărul de elemente din mulţimea M care au în scrierea lor zecimală 2007 cifre. (2p)

e) Să se arate că $1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots+\left(\frac{9}{10}\right)^n<10$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. (4p)

f) Să se arate că pentru orice $m>0$, există $n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\geq m$. (2p)

g) Să se arate că , pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ şi pentru orice $r_1<r_2<\ldots<r_n\in M$, avem $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}<80$. (4p)

Subiectul II (20p)

Într-un plan se consideră triunghiul ABC de arie S şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $p\in(CA)$, astfel încât $\frac{AM}{AB}=x$, $\frac{BN}{BC}=y$ şi $\frac{CP}{CA}=z$, unde $x,y,z\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$. Dacă QRT este un triunghi, notăm cu S_{QRT} aria sa.

Fie $r,s\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$ şi funcţia $f:\left[0,\frac{1}{3}\right]\to\mathbb{R}$, $f(t)=t(1-r-s)+r+s-rs$.

a) Să se arate că $\frac{AP}{AC}=1-z$. (4p)

b) Să se arate că $S_{AMP}=x(1-z)S$. (4p)

c) Să se arate că $S_{MNP}=S[1-x(1-z)-y(1-x)-z(1-y)]$. (4p)

d) Să se arate că funcţia f este monoton crescătoare. (2p)

e) Să se arate că $f(t)\leq\frac{2}{3}$, pentru orice $t\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$. (2p)

f) Să se arate că $S_{MNP}\geq\frac{S}{3}$. (2p)

g) Să se arate că, pentru orice $s\in\left(\frac{S}{3},S\right)$, există $X\in(AB)$, $Y\in(BC)$ şi $Z\in(CA)$, astfel încât $S_{XYZ}=s$. (2p)

Subiectul III (20p)

Se consideră funcţiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\left[(x^2-1)^x\right]^{(n)}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Prin $u^{(n)}(x)$ am notat derivata de ordinul n a funcţiei $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în punctul x.

a) Să se calculeze $f_1(x)$ şi $f_2(x)$, $x\in\mathbb{R}$. (4p)

b) Dacă $f_n(x)=a_nx^n+\ldots+a_0M$, cu $a_i\in\mathbb{R}$, să se determine coeficientul a_n, $n\in\mathbb{N}^*$. (4p)

c) Să se arate că funcţia $v:(-1,1)\to(-\infty,0)$, $x(x)=\frac{x-1}{x+1}$ este bijectivă. (4p)

d) Utilizând teorema lui Rolle, să se arate că ecuaţia $f_n(x)=0$ are n rădăcini reale distincte situate în intervalul $(-1,1)$. (2p)

e) Să se arate că, dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie de n ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu derivata de ordinul n continuă, atunci

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n \cdot g^{(n)}(x)\mathrm{d}x. \qquad (4p)$$

f) Să se arate că $\int_{-1}^{1} f_n(x) \cdot h(x)\mathrm{d}x = 0$, pentru orice funcţie polinomială $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grad mai mic sau egal cu $n-1$. (2p)

g) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (C_n^0)^2 x^n + (C_n^1)^2 x^{n-1} + \ldots + (C_n^n)^2$, are n rădăcini distincte situate în intervalul $(-\infty, 0)$. (4p)

Subiectul IV (20p)

Demonstraţi posibilităţile de integrare eficientă a mijloacelor de învăţământ în activitatea didactică, la disciplina/disciplinele de concurs, având în vedere:

– caracterizarea generală şi enunţarea funcţiilor specifice ale acestora,

– clasificarea mijloacelor de învăţământ,

– analiza critică a tehnologiei informaţiei şi a comunicaţiilor – TIC

– prezentarea modalităţilor de adaptare şi de integrare a mijloacelor de învăţământ în disciplina/disciplinele de concurs, cu exemplificări.

Probă scrisă la Informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acorda 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.

Subiectul I. (30 puncte)

1. Descrieţi şi exemplificaţi 3 operaţii specifice prelucrării bazelor de date. (10p)

2. Caracterizaţi stiva şi coada folosind următorul plan de idei:

- definiţii, operaţii specifice, proprietăţi
- enunţul câte unei aplicaţii cu stiva şi respectiv cu coada. (20p)

Subietul II. (30 puncte)

1. a) Descrieţi pe 3-4 rânduri metoda şi scrieţi programul pseudocod care verifică dacă un număr natural n de cel mult 9 cifre (n citit de la tastatură) este prim. Programul va afişa ca rezultat unul dintre mesajele „Este prim“ şi „Nu este prim“. (5p)

b) Definiţi în Pascal/C/C++ un subprogram `prim` care primeşte prin intermediul parametrului k un număr natural ($0 \le k < 10^9$), subprogram care returnează valoarea 1 dacă numărul este prim şi returnează valoarea 0 în caz contrar. (5p)

c) Definiţi în Pascal/C/C++ un subprogram `inv` care primeşte prin intermediul parametrului k un număr natural ($0 \le k < 10^9$), subprogram care returnează prin intermediul aceluiaşi parametru k valoarea numărului cu cifrele aflate în ordine inversă. (5p)

d) În fişierul text `DATE.TXT` se află: pe prima linie un număr natural n ($1 < n < 1000$), iar pe următoarea linie n numere naturale cu cel mult 9 cifre fiecare. Scrieţi programul care afişează pe ecran acele numere de pe linia a doua a fişierului care au proprietatea că, dacă se inversează cifrele numărului, se obţine un număr prim. Programul va apela în mod util fiecare dintre subprogramele `inv` şi `prim` definite la punctele b şi c. (5p)

Exemplu

Pentru fişierul `DATE.TXT` cu următorul conţinut

4

38 546 62 113

se vor afişa pe ecran numerele: 38 şi 113 (deoarece 83 şi 311 sunt numere prime).

2. Pentru m şi n numere citite de la tastatură ($0 < m \le n < 20$), scrieţi programul care determină numărul de expresii distincte corecte ce se pot forma cu exact n perechi de paranteze rotunde, expresii în care să existe cel mult m perechi de paranteze `imbricate`. Programul va afişa pe ecran numărul cerut. Descrieţi în limbaj natural metoda folosită (2-4 rânduri). (10p)

Exemplu. Pentru $n = 3$ şi $m = 2$, se afişează numărul 4.

Într-adevăr există 4 expresii ce se pot forma cu 3 perechi de paranteze în care să existe cel mult 2 perechi de paranteze `imbricate`: (()()); (())(); ()(()); ()()().

Se observă că expresia ((())) nu este soluţie deoarece nivelul de imbricare este 3.

Subiectul III (30 puncte)

Demonstraţi posiblităţile de integrare eficientă a mijloacelor de învăţământ în activitatea didactică, la disciplina/disciplinele de concurs, având în vedere:

– caracterizarea generală şi enunţarea funcţiilor specifice ale acestora,

– clasificarea mijloacelor de învăţământ,

– analiza critică a rolului tehnologiei informaţiei şi a comunicaţiilor – TIC, prezentarea modalităţilor de adaptare şi de integrare a mijloacelor de învăţământ la disciplina/disciplinele de concurs, cu exemplificări.

– utilizarea unei metode eficiente (2p) (pentru generare brută se acordă 0p, pentru metoda backtracking cu condiţii de optimizare se acordă 1p, pentru formula recurentă de calcul se acordă 2p)

– obţinerea rezultatului corect (1p cazul general, 1p cazurile limită $m = 1$ şi $m = n$) (2p)

– declarări, sintaxă, corectitudine globală (2p)

Subiectul IV (30 puncte)

– Caracterizarea generală şi enunţarea funcţiilor specifice ale acestora (7p)

– Clasificarea mijloacelor de învăţământ (4p)

– Analiza critică a rolului tehnologiei informaţiei şi a comunicaţiilor – TIC: (5p)

– Prezentarea modalităţilor de adaptare şi de integrare a mijloacelor de învăţământ la disciplina / disciplinele de concurs, cu exemplificări (transmitere de noi informaţii, sistematizări, dezvoltare de capacităţi şi de competenţe, evaluare, utilizarea de softuri educaţionale). (14 p)

PUNCTE DE VEDERE

Cum e mai bine?[1)]

DE MARCEL ŢENA

Ne vom opri în cele ce urmează, la modalitatea de a introduce (defini) trei noţiuni şi anume acelea de *număr complex*, *polinom* (cu coeficienţi complecşi) şi *matrice* (cu elemente numere complexe).

De obicei există două modalităţi de a introduce fiecare din aceste trei concepte, manualele româneşti optând pentru una sau alta din ele.

Desigur, fiecare dintre aceste modalităţi este „corectă", numai că prima (în expunerea noastră) este mai simplă, în timp ce a doua este mai complicată, mai puţin naturală. În fond, obiectele care corespund celor două modalităţi alcătuiesc structuri algebrice izomorfe, ca atare „identice" din punct de vedere algebric.

Totuşi, pentru înţelegerea cât mai bună a lucrurilor, pentru naturaleţea introducerii noţiunilor, pledăm aici pentru prima modalitate.

1. Noţiunea de număr complex

Prima modalitate. Numim *număr complex* o „expresie formală" de tipul

$$z = a + b\mathrm{i}, \tag{1}$$

unde a, b sunt numere reale, iar $\mathrm{i}^2 = -1$.

Urmează apoi definirea operaţiilor de adunare şi înmulţire a numerelor complexe, prin egalităţile:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i},$$

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i},$$

cu menţiunea că pentru înmulţire definiţia respectă distributivitatea faţă de adunare. Avantajul este că de la bun început lucrăm cu forma (1), denumită şi „forma algebrică" a numerelor complexe.

Desigur, apar întrebări de tipul: cine este i ?; ce înseamnă $b\mathrm{i}$, dacă $b \in \mathbb{R}$, iar $i \neq \mathbb{R}$?; ce înseamnă $a + b\mathrm{i}$, dacă $a \in \mathbb{R}$, iar $b\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ (când $b \neq 0$)?. Acestor întrebări nu li se poate răspunde decât acceptând că $b\mathrm{i}$ este o înmulţire formală, iar $a + b\mathrm{i}$ este o „adunare formală", adică exact ceea ce spuneam de la început şi anume că $z = a + bi$ este o „expresie formală". În definitiv, procedeul este acesta: acceptăm (introducem) un număr complex „fundamental" şi anume i, iar cu ajutorul acestuia şi al numerelor reale „construim" celelalte numere complexe.

A doua modalitate. Numim *număr complex* un cuplu

$$z = (a, b), \tag{2}$$

unde a, b sunt numere reale. Definim apoi adunarea şi înmulţirea prin:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

[1)] Comunicare susţinută la 28 aprilie 2007 în cadrul filialei Râmnicu Sărat a S.S.M.R. (N.R.)

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Notăm $\mathrm{i} = (0,1)$ şi făcând „identificarea“ $(a,0) = a$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, rezultă $\mathrm{i}^2 = -1$, iar $z = (a,b) = a + b\mathrm{i}$, adică ajungem la forma algebrică (1). Avantajul pare a fi că nu apar de la bun început întrebări agasante de tipul „ce înseamnă cutare obiect matematic sau cutare operaţie ?“. Totuşi, dacă privim cu atenţie, nu suntem scutiţi de astfel de întrebări, numai că ele apar ceva mai încolo, de exemplu: ce înseamnă „identificarea“ $(a,0) = a$? Răspunsul riguros nu poate fi dat decât foarte târziu, când aflăm că există un izomorfism între corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ şi corpul $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$, operaţiile din $\mathbb{C}$ fiind cele din prima modalitate, iar operaţiile din $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ fiind cele din a doua modalitate. Şi atunci, de ce să mai introducem această „copie izomorfă“ $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$, când putem lucra de la început cu corpul „original“ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$?

2. Noţiunea de polinom (cu coeficienţi complecşi)

Prima modalitate. Numim *polinom* cu coeficienţi complecşi o „expresie formală de tipul:

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n = \sum_i a_ix^i \quad \text{(sumă finită)}, \tag{3}$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, iar X este o „nedeterminată“, adică un obiect matematic neprecizat. Urmează apoi definirea operaţiilor de adunare şi înmulţire prin egalităţile:

$$f = \sum_i a_iX^i, \qquad g = \sum_i b_iX^I \quad \text{(sume finite)} \Rightarrow$$

$$f + g = f = \sum_i (a_i + b_i)X^I,$$

respectiv

$$fg = \sum_{I,j} a_ib_jX^{i+j} = \sum_k c_kX^ik,$$

unde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j.$$

Constatăm că înmulţirea se face în acord cu distributivitatea faţă de adunare. Avantajul este că lucrăm de la bun început cu forma (3), denumită şi „forma algebrică“ a polinoamelor. Desigur apar şi aici întrebări de genul: cine este X?, ce înseamnă a_iX^i ?; ce înseamnă $\sum_i a_iX^i$? Acestor întrebări le răspundem doar dacă acceptăm că aceste operaţii (adunări, înmulţiri, puteri ale lui X) sunt „formale“, adică în fond acceptăm că expresia (3) este una „formală“.

În definitiv, procedeul este acesta : acceptăm (introducem) un polinom „fundamental“ notat X (nedeterminat) iar cu ajutorul lui X şi al coeficienţilor (numere complexe) construim celelalte polinoame.

A doua modalitate. Numim polinom cu coeficienţi complecşi un şir „de suport finit“, adică având doar un număr finit de termeni nenuli, i. e.

$$f(a_0, a_i, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots) = (a_k),$$

cu $a_k \in \mathbb{C}$ şi $a_k = 0$ pentru $k > n$.

Urmează definirea sumei şi produsului a două polinoame, prin egalităţile:

$$f = (a_k),\ g = (b_k) \Rightarrow$$
$$f + g = (a_k + b_k) \text{ şi } f_g = (c_k),$$

unde $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$.

Notând apoi $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ şi făcând „identificarea" $(a, 0, 0, 0, \ldots) = a$ pentru orice $a \in \mathbb{C}$, obţinem scrierea

$$f(a_0, a_i, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n,$$

adică forma algebrică (3). Deşi, la prima vedere, părem scutiţi de întrebări de tipul „ce înseamnă aşa ceva?", aceste întrebări sunt în realitate „translatate" ceva mai încolo. Astfel sunt legitime întrebările: de ce notăm $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$ sau ce înseamnă „identificarea" $(a, 0, 0, 0, \ldots) = a$? Răspunsul riguros vine mai târziu, via un izomorfism de inele. Dar pierderea de vreme care se face până ajungem la forma algebrică este considerabilă, deşi, practic, doar cu forma algebrică a polinoamelor lucrăm. Şi atunci de ce să nu o introducem de la început ? De ce să lucrăm cu „copia izomorfă" $(\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$, când putem lucra de la bun început cu inelul de polinoame „original" $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$? (Am notat cu $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ inelul şirurilor de suport finit, cu operaţiile din a doua modalitate, iar cu $\mathbb{C}[X]$ inelul polinoamelor date prin forma algebrică, în care operaţiile sunt cele din prima modalitate).

3. Noţiunea de matrice (cu elemente numere complexe)

Prima modalitate. Numim matrice cu m linii şi n coloane (de tip (m, n)) peste $\mathbb{C}$ un „tablou" de tipul :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \quad \text{unde } a_{ij} \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Urmează definirea operaţiilor cu matrice etc.

A doua modalitate. Numim matrice cu m linii şi n coloane (de tip (m, n)) o funcţie $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$, $A((i, j)) = a_{ij}$, unde $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Urmează „aranjarea" valorilor funcţiei f într-un tablou de tipul (4) (aş întreba de ce?), după care se lucrează cu asemenea „tablouri". La prima vedere, avantajul pare a fi acela că elevul este deja acomodat cu noţiunea de funcţie, pe când noţiunea de „tablou" pare una venită din afară, cumva „vulgară". De asemenea, egalitatea a două funcţii ar duce rapid la egalitatea a două matrice. Explicaţiile de acest gen sunt, mai mult sau mai puţin, mofturi. În definitiv, egalitatea a două matrice (unicitatea descrierii unei matrice) se poate defini de la început, lucrând cu tablouri, astfel:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij},$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ şi orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, unde $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$.

La ce bun să introducem matricea ca o funcţie, când, de fapt, lucrăm cu această noţiune doar în accepţiunea de tablou?

Concluzia firească ce se impune este că trebuie să lucrăm cu obiectele „originale", naturale şi nu cu „copii" izomorfe ale acestora.

P.S. Acest articol are drept punct de plecare următorul moment tragi-comic din viaţa autorului. Împreună cu colegii de redacţie şi de cancelarie, profesorii M. Andronache şi D. Şerbănescu, am scris un manual de matematică pentru clasa a XI-a (Editura Art, 2006), în care matricea era definită ca un tablou. Referentul (secret) ne-a făcut observaţia că această definiţie este „incorectă", corectă fiind doar aceea în care matricea era introdusă ca o funcţie. Pentru ca manualul să nu fie respins, a trebuit să facem acest compromis, definind până la urmă matricea ca o funcţie, contrar propriilor noastre opinii.

Colegiul Sf. Sava,
Bucureşti

Scrisoare deschisă către Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului

Stimate Domnule Ministru,

Subsemnaţii, membri ai Academiei Române, constatăm cu îngrijorare deteriorarea situaţiei învăţământului matematic în liceele româneşti, ca urmare a unui proces continuu de supraîncărcare a programelor cu capitole de matematici abstracte, care sunt cu mult deasupra posibilităţii de înţelegere şi de asimilare ale elevului mediu. Unele dintre aceste capitole nu sunt necesare nici la universităţile tehnice. Ele sunt studiate doar la cursurile speciale, la facultăţile de matematici.

În cele ce urmează vom analiza următoarele probleme legate de învăţământul matematicii din licee:

1. Examenul de bacalaureat;
2. Programele analitice;
3. Manualele de matematici;
4. Validarea manualelor;
5. Formalismul matematic, notaţiile şi denumirile.

1. Examenul de bacalaureat

Începem cu examenul de bacalaureat, pentru că nivelul ridicat al acestui examen condiţionează şi nivelul manualelor.

Regretatul academician *Grigore Moisil* spunea, pe bună dreptate, că la un examen, elevul trebuie să ştie să reproducă ceea ce i s-a predat la curs. În starea de stres de la examen, nu se poate pretinde elevului să fie creator.

În ultimii ani, examenul de bacalaureat a avut un nivel inadmisibil de ridicat, depăşind cu mult conţinutul programelor analitice.

Mai grav, pentru anul şcolar 2006/2007 s-a luat decizia rău inspirată să se publice o listă de 100 de variante de subiecte de matematică, din care s-a extras o variantă în ziua examenului de bacalaureat. Publicarea acestei liste pe site-ul MECT a bulversat întregul program şcolar al claselor terminale, deoarece profesorii şi elevii s-au concentrat exclusiv asupra soluţionării celor 400 de probleme (care alcătuiesc cele 100 de variante de subiecte). Cum rezolvarea unei singure variante necesită circa 3 ore, rezultă că profesorii şi elevii ar trebui să aibă la dispoziţie cel puţin 300 de ore, ceea ce depăşeşte cu mult volumul de timp alocat matematicii în clasa a XII-a.

Unele probleme sunt atât de grele, încât nici membrii comisiei care le-au propus, n-ar fi în stare să le rezolve, dacă n-ar fi văzut dinainte soluţia (a se vedea varianta 81, subiectul IV).

Acest sistem de bacalaureat accentuează fenomenul meditaţiilor, precum şi învăţatul mecanic.

În ultimii ani, gradul de dificultate a crescut constant, în mare parte prin depăşirea conţinutului programelor analitice, ele însele exagerat de încărcate. Procentul de reuşiţi la bacalaureat s-a menţinut însă constant, prin două fenomene: în primul rând prin acordarea de puncte multe la chestiunile simple, de rutină, şi acordarea de puncte puţine pentru chestiunile grele; în al doilea rând, prin fraudarea examenului de către cadrele didactice şi de către elevi.

Cercetând site-ul MECT pentru a vedea cine sunt responsabilii pentru concepţia bacalaureatului 2007, am aflat despre Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare a Învăţământului preuniversitar, care şi-a ales ca moto: „Prin noi îţi demonstrezi competenţele". Comentariile sunt de prisos.

Nu trebuie să se confunde examenul de bacalaureat cu olimpiadele de matematici. Mai ales, nu trebuie să se uite că majoritatea elevilor nu vor deveni matematicieni; iar dintre aceia care vor studia totuşi matematica, foarte putini vor deveni cercetători.

În viitor, comisia pentru probleme de bacalaureat trebuie să se limiteze strict la conţinutul programelor analitice şi să aleagă probleme realiste, la nivelul elevului mediu.

Aceasta comisie trebuie să conţină neapărat profesori de liceu, care ştiu mai bine ce este potrivit şi ce nu este potrivit pentru elevul mediu.

Ar trebui ca această comisie să studieze nivelul realist al problemelor de bacalaureat din alte ţări şi, în primul rând din Franţa (a se vedea, de exemplu, culegerea de probleme de bacalaureat „BAC Terminale S, entrainement" de *Philippe Angot* şi *Francois Dubois*, editura Hachette, Paris).

2. Programele analitice de matematici

Programele actuale, aşa cum au fost publicate, conţin o parte aşa zis explicativă, care este o polilogie din care nu se înţelege nimic. Această parte justificativă foloseşte termeni tehnici fără conţinut şi este complet nenecesară. De exemplu, din cele 7 pagini ale programei pentru clasa a XII-a, doar mai puţin de o pagină conţine programa propriu-zisă; restul de 6 pagini este polilogie. Ar fi suficient să se dea numai conţinutul programelor analitice, fără nici o explicaţie suplimentară.

Programele de matematică sunt extrem de încărcate şi nerealiste.

Trebuie să spunem deschis că unele cadre universitare din comisia de programe, printr-o „deformare profesională", au căutat şi au reuşit să includă în programe, capitole din specialitatea lor, chiar la nivelul facultăţii de matematică, iar profesorii de liceu din comisie nu au avut tăria să se opună. Asemenea capitole nu sunt necesare nici la universităţile tehnice, şi cu atât mai mult nu sunt necesare în liceu. Iată doar câteva exemple:

La clasa a IX-a, un capitol de Logică Matematică. La clasa a XI-a, capitolul de algebră dedicat sistemelor de ecuaţii liniare conţine o prezentare a studiului matricelor într-un mod atât de complet, încât nici la facultatea de matematică nu mai rămâne mare lucru de spus în plus. Studiul sistemelor de ecuaţii liniare trebuie limitat la strictul necesar, când numărul de ecuaţii este egal cu numărul necunoscutelor, şi atunci matricele nu mai sunt necesare, ci doar determinanţii. În sfârşit, la clasa a XII-a, capitolul de algebră abstractă este prezentat la nivelul de abstractizare şi completitudine de la facultăţile de matematici. Nici acest capitol nu este necesar la universităţile tehnice.

Unele noţiuni ca şirurile, funcţiile, mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, apar în programele a trei clase, IX, X, şi XI, şi la fiecare dintre aceste trei clase, autorii se considera îndreptăţiţi, chiar obligaţi, să facă o prezentare completă. Programa trebuie să delimiteze precis ce şi cât trebuie prezentat la fiecare clasă.

Se impune imperios ca programele de matematici să fie complet revizuite, iar comisia pentru programe să conţină, pe lângă cadre universitare, şi profesori de liceu care ştiu mai bine ce trebuie şi ce nu trebuie să conţină programele, şi care să aibă tăria să-şi exprime şi să-şi susţină părerile.

Este de asemenea imperios necesar ca această comisie de programe să studieze şi programele de matematică de liceu din alte ţări şi în primul rând din Franţa, de la care întotdeauna am avut de învăţat. Dacă în trecut comisia de programe ar fi consultat programele din Franţa, nu s-ar fi ajuns la exagerările de acum de la noi.

Nu trebuie pierdut din vedere că programele de matematică trebuie să fie realiste şi să aibă în vedere nivelul majorităţii elevilor, nu al elitelor, care vor avea ocazia să aprofundeze studiul matematicii la facultate.

3. Manualele

Autorii manualelor de matematici de liceu supraliciteazǎ programele analitice care, ele însele, sunt deja exagerat de încărcate. Manualele prezintă material în plus faţă de programe, la un nivel excesiv de riguros şi complet, folosind un formalism matematic excesiv şi nenecesar. Un exemplu în aceasta privinţă este următorul: la clasa a XII-a, la capitolul de integrare, sunt prezentate sumele Darboux şi criteriul Darboux, care nu sunt prevăzute de programă, şi care constituie o complicaţie inutilă.

Vina pentru aceasta situaţie o poartă în parte comisia de validare a manualelor, care validează acele manuale care sunt mai „complete" adică mai complicate. Conştienţi de criteriile de validare ale comisiei şi în situaţia de competiţie dintre autorii de manuale, fiecare autor vrea să arate cât de mult ştie el.

Un alt motiv pentru supraîncărcarea manualelor, mărturisit de unii autori, este examenul de bacalaureat. Din dorinţa de a pregăti cât mai bine elevii lor pentru bacalaureat, profesorii de liceu nu adoptă un manual care este prea „simplu" şi care nu este la nivelul problemelor de bacalaureat.

Unele manuale au un nivel atât de ridicat, încât pot fi folosite ca manuale pentru universităţile tehnice, iar unele capitole pot fi folosite chiar pentru facultăţile de matematici.

Manualele trebuie să se limiteze cu stricteţe la materialul prevăzut de programe, să folosească un limbaj simplu, concis, corect şi complet, să nu exagereze în folosirea formalismului matematic mai mult decât este necesar, ci, mai degrabă, să înlocuiască cât mai mult posibil formalismul matematic prin cuvinte.

Autorii trebuie să evite folosirea unor noţiuni absolut nenecesare la nivelul liceelor, ca, de exemplu, punctele de acumulare, marginile unei mulţimi, funcţii definite pe alte domenii decât reuniuni de intervale (pentru un interval neredus la un punct, orice punct este punct de acumulare şi deci nu este nevoie de introdus o noţiune în plus), folosirea şirurilor pentru studiul progresiilor, care sunt finite, polinoame în nedeterminata X în studiul funcţiilor polinomiale (funcţiile polinomiale ar trebui numite, simplu, polinoame), elemente de logica matematică etc.

4. Comisia de validare a manualelor

Membrii comisiei de evaluare trebuie să nu piardă din vedere că manualele trebuie să se adreseze elevului mediu, să fie scrise astfel încât să poată fi înţelese şi asimilate de elevul mediu.

De aceea, comisia trebuie să evalueze manualele în primul rând după simplitatea şi precizia exprimării în prezentarea materialului prevăzut de programe, fără formalism matematic mai mult decât este strict necesar.

Comisia de validare trebuie să se întrunească în fiecare an, dacă este necesar, pentru că în fiecare an pot apărea manuale demne de a fi validate. Acum, aceasta comisie se întruneşte odată la 4-5 ani, când se schimbă programa analitică şi apar noi manuale.

Aceasta comisie trebuie să conţină neapărat şi profesori de liceu care ştiu din experienţa proprie, ce se poate şi ce nu se poate preda pentru elevul mediu.

5. Formalismul matematic, notaţiile şi denumirile

Există, simultan, foarte multe manuale (peste 10 pentru fiecare clasă). Diferite manuale folosesc notaţii, denumiri şi definiţii diferite, care nu sunt totdeauna echivalente.

De exemplu, semnul de incluziune apare scris diferit în diversele manuale şi are semnificaţii diferite. Vecinătăţile unui punct trebuie definite ca fiind intervalele deschise care conţin punctul. De altfel de vecinătăţi nu este nevoie la acest nivel. Într-adevăr, în definiţia limitelor sunt folosite numai vecinătăţile de genul interval deschis. Punctul de inflexiune are definiţii diferite în diverse manuale.

Aceasta face ca la examene, elevii să dea răspunsuri diferite, în funcţie de manualul după care s-au pregătit.

La geometrie lucrurile stau şi mai prost decât la algebră sau analiză. Elevii sunt complet derutaţi. Segmentul AB se notează $[AB]$, (segment închis), sau (AB), (segment deschis), alteori pur şi simplu AB. Lungimea segmentului s-a notat în urmă cu câţiva ani cu $\overline{AB}$ (cu bara deasupra), cu $||AB||$ sau cu $|AB|$. Acum se notează AB.

Pentru o funcţie $f : A \to B$, mulţimea valorilor $f(A)$ este notată, în mod impropriu, Im f (în loc de $f(A)$) şi este numită, în mod impropriu, imaginea lui f (în loc de imaginea lui A prin f, cum ar trebui să fie, consistent cu celelalte definiţii şi notaţii).

Se foloseşte în mod excesiv, unde trebuie şi unde nu trebuie, scrierea formală a unei funcţii, de exemplu sub forma $f : A \to B$, $f(x) = 2x+3$. Dar de cele mai multe ori, A şi B sunt mulţimi de numere reale, iar f este o funcţie elementară. Pentru aceste funcţii nu mai este nevoie de specificat de fiecare dată domeniul de definiţie, care a fost precizat de la început, când au fost definite funcţiile elementare. Este suficient să se spună: fie funcţia reală $f(x) = 2x+3$, sau, fie polinomul $f(x) = 2x+3$.

Numerele complexe sunt definite axiomatic, foarte complicat, în loc să fie definite, simplu, în mod clasic, $a + b$i.

Aproape unanim în lumea matematică, mulţimea numerelor naturale este mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots\}$ şi este notată cu $\mathbb{N}$. Numărul 0 nu este considerat număr natural. Notaţiile $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ sunt nenecesare.

Şirurile trebuie considerate ca funcţii definite pe mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale (şi nu pe mulţimea N_k).

Vectorul este, de asemenea, definit foarte complicat, în loc să fie definit ca un segment orientat (sau ca o ţepuşă, cum spunea profesorul *Grigore Moisil*).

Reprezentarea numerelor pe dreaptă este făcută în mod complicat şi nenatural. Ca să folosim o expresie tot a profesorului *Grigore Moisil*, „este ca şi când te-ai scărpina cu mâna dreaptă la urechea stângă".

Cele de mai sus impun formarea unei comisii care să unifice notaţiile, denumirile şi definiţiile, şi care să devină obligatorii pentru toţi autorii de manuale.

Comisia aceasta trebuie să lucreze în strânsă legătură cu comisia pentru programe analitice, eventual, să fie una şi aceeaşi comisie.

În concluzie, sugerăm următoarele:

1. Revizuirea şi simplificarea programelor analitice de matematici, astfel încât să se adreseze elevului mediu.

2. Formarea unei comisii pentru unificarea notaţiilor, denumirilor şi definiţiilor.

3. Adoptarea de către comisia de validare a manualelor, a unor criterii de apreciere a manualelor, ca, de exemplu, stil simplu, concis, corect şi complet şi reducerea formalismului matematic la strictul necesar.

4. Comisia de bacalaureat să aleagă probleme la nivelul elevului mediu.

5. Toate comisiile să conţină profesori de liceu, care au experienţă în ceea ce poate asimila elevul mediu.

6. Comisiile trebuie neapărat să studieze programele analitice şi manualele de matematici de liceu din alte ţări, în special din Franţa.

7. Înainte de a fi adoptate, programele analitice să fie supuse spre dezbatere comunităţii matematice.

Sperăm că demersul nostru va fi util pentru îmbunătăţirea învăţământului matematic în liceele româneşti.

Vă rugăm să primiţi, Domnule Ministru, asigurarea întregii noastre stime.

Academician *Marius Iosifescu*, Vicepreşedinte al Academiei Române

Academician *Romulus Cristescu*, Preşedintele Secţiei de Matematică a Academiei Române

Academician *Viorel Barbu*, Preşedintele Secţiei Iaşi a Academiei Române

Academician *Nicolae Cristescu*

Academician *Solomon Marcus*

Academician *Radu Miron*

Prof. dr. *Petre Mocanu*, Membru Corespondent al Academiei

Prof. dr. *Constantin Corduneanu*, Membru Corespondent al Academiei

Prof. dr. *Constantin Năstăsescu*, Membru Corespondent al Academiei.

Prof. dr. *Nicolae Dinculeanu*, University of Florida, USA, Membru de Onoare al Academiei Române

Prof. dr. *Dimitrie D. Stancu*, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, Membru de Onoare al Academiei Române

Dr. *Vasile Brânzănesu*, Director al Institutului de Matematică al Academiei

Prof. dr. *Virgil Căzănescu*, Universitatea Bucureşti.

Dr. *Gabriela Marinoschi*, Secretar Ştiinţific, Secţia de Matematică a Academiei.

Prof. dr. *Constantin Niculescu*, Universitatea Craiova

Prof. dr. *Vasile Oproiu*, Universitatea Al. I. Cuza, Iaşi

Prof. dr. *Nicolae Popa*, Universitatea Bucureşti

Prof. dr. *Radu Precup*, Director Departamentul de Matematici Aplicate, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca

Prof. dr. *Tiberiu Postelnicu*, Institutul de Statistică Matematică şi Matematici Aplicate al Academiei

Prof. dr. *Dragoş Vaida*, Universitatea Bucureşti

Conf. dr. *Mircea Becheanu*, Universitatea Bucureşti, Prim Vice Preşedinte al Societăţii de Ştiinţe Matematice din România.

Conf. dr. *Andrei Vernescu*, Universitatea Valahia, Targovişte.

Prof. *Liliana Niculescu*, Liceul Carol Craiova

Prof. *Nicolae Bişboacă*, C. N. Horia, Cloşca şi Crişan, Alba Iulia

Prof. *Angelica Cioran*, C. N. Daniel Popovici Barcianu, Sibiu

Prof. *Gabriela Dăneţ*, C. N. I. L. Caragiale, Bucureşti

Prof. *Dorin Gogulescu*, Lic. Teor. D. Bolintineanu, Bucureşti

Prof. *Dorin Mărghidanu*, C. N. Al. I. Cuza, Corabia

Prof. *Marius Mâinea*, C. N. V. Streinu, Găeşti

Prof. dr. *Neculai I. Nediţă*

Prof. *Elena Popescu*, Gr. Şc. de Aeronautică, Bucureşti

Prof. *Virgil Şerban*, Liceul Al. I. Cuza, Bucureşti

NOTE MATEMATICE

Croşetul Lie al două matrici

DE ADRIAN REISNER

Abstract

After the study of the endomorphism from $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ to $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ given by $X \mapsto AX - XB$, where A and $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, we define the Lie bracket of two matrices. We prove various properties of this Lie bracket regarding the nilpotence, the comutant of a matrix, the diagonalizability, the cotrigonalizability etc.

Key words: Lie bracket, Diagonalizability, Nilpotent matrix, Cotrigonalizability, Cayley-Hamilton theorem, spectrum, eigenvalues.

M.S.C.: 15-99, 15A18, 15A21, 17B45.

Fiind date două matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ considerăm ecuaţia matricială: $AX - XB = Y$. Pentru ca această ecuaţie să aibă o soluţie $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pentru orice matrice $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este necesar ca aplicaţia liniară $\Phi(X) = AX - XB$ să fie surjectivă, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fiind de dimensiune finită este deci necesar ca aplicaţia Φ să fie injectivă. În acest caz soluţia este unică. Mai precis avem teorema următoare:

Teorema 1. *Aplicaţia Φ este injectivă, deci bijectivă, dacă şi numai dacă matricele A şi B nu au nici o valoare proprie comună*:

$$\mathrm{S_p}(A) \cap \mathrm{S_p}(B) = \emptyset.^{1)}$$

Demonstraţie. Presupunând că A şi B nu au nici o valoare proprie comună, corpul $\mathbb{C}$ fiind algebric închis, cele două polinoame caracteristice $\chi_A(X)$, $\chi_B(X)$ sunt prime între ele. Teorema lui *Bézout* conduce la existenţa a două polinoame U şi $V \in \mathbb{C}[X]$ verificând egalităţile

$$U(X)\chi_A(X) + V(X)\chi_B(X) = 1.$$

Avem atunci

$$U(A)\chi_A(A) + V(A)\chi_B(A) = 1.$$

Având $\chi_A(A) = 0$ din teorema lui *Cayley-Hamilton*, deducem imediat că $V(A)\chi_A(A) = 1$. Deci matricea $\chi_B(A)$ este inversabilă. Fie $\ker\Phi$ nucleul aplicaţiei liniare Φ şi $X \in \ker\Phi$; atunci $AX = XB$. Ne propunem să demonstrăm că $X = 0$, deci că Φ este injectivă. Avem imediat, prin inducţie,

$$A^k X = XB^k,$$

oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ şi, în general, pentru orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$, rezultă

$$P(A)X = XP(B).$$

În particular,

$$\chi_B(A)X = X\chi_B(B).$$

Deci

$$\chi_B(A) = 0,$$

căci $\chi_B(B) = 0$.

$\chi_B(A)$ fiind inversabilă, deducem $X = 0$, i.e. Φ este injectivă, c.c.t.d.

Reciproc, presupunând că A şi B au o valoare proprie comună λ. Ne propunem să construim o matrice nenulă aparţinând nucleului aplicaţiei Φ şi anume o matrice $M \neq 0$ verificând $AM = \lambda M$ şi $MB = \lambda M$. Egalitatea $AM = \lambda M$ are loc dacă vectorii coloane ai matricei M sunt vectorii proprii ai matricei A, pentru valoarea proprie λ. La fel egalitatea $MB = \lambda$ are loc dacă vectorii linii ale matricei M sunt vectori proprii matricei B' pentru valoarea proprie λ.

---

1) Prin $\mathrm{S_p}(A)$ autorul desemnează spectrul matricei A (i. e. mulţimea valorilor proprii). Facem această observaţie pentru a nu crea vreo confuzie cu urma matricii A sau cu subgrupul generat de matricea A care se noteză, de obicei, în acest mod. (N.R.)

Avem $\mathrm{S_p}B = \mathrm{S_p}B'$. Fie atunci $X = (x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)'$ şi $Y = (y_1 y_2 \cdot \ldots \cdot x_n)'$ doi vectori verificând $AX = \lambda X$ şi $B'Y = \lambda Y$. Matricea $M = XY' = (x_i y_j)$ nenulă (vectorii X şi Y fiind nenuli), verifică egalitatea

$$AM = MB = \lambda M$$

căci

$$AM = A(XY') = (AX)Y' = \lambda XY' = \lambda M,$$

şi, la fel,

$$MB = (XY')B = X(B'Y)' = \lambda XY' = \lambda M$$

deci $\Phi(M) = 0$ i.e. Φ nu este injectivă, ceea ce termină demonstraţia teoremei.

Caz particular. Ţinând seama de această teoremă ecuaţia $AX - XB = 0$ admite o singură soluţie şi anume $X = 0$ dacă şi numai dacă matricele A şi B nu au nici o valoare proprie comună. Deci ecuaţia $AX - XB = 0$ admite o soluţie $X \neq 0$ dacă A, B au o valoare proprie comună $[\ker\Phi \neq \{0\}]$. În particular dacă A şi B nu sunt inversabile, atunci 0 este valoarea proprie comună a matricelor A, B ; în acest caz $\ker\Phi \neq \{0\}$, deci există $M \neq 0$ astfel ca $AM - MB = 0$.

Teorema următoare indică spectrul aplicaţiei Φ în funcţie de spectrul matricilor A şi B.

Teorema 2. *Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoarea proprie a aplicaţiei Φ dacă şi numai dacă există $(\alpha, \beta) \in \mathrm{S_p}(A) \times \mathrm{S_p}(B)$ verificând egalitatea $\lambda = \alpha - \beta$.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$“ Fie $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathrm{S_p}\Phi$; există atunci $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $T \neq 0$, astfel încât

$$AT - TB = \lambda T.$$

Avem $AT = T(B + \lambda I)$.

O inducţie imediată conduce atunci la

$$A^p T = T(B + \lambda I)^p,$$

pentru orice $p \in \mathbb{N}$ şi, mai general, pentru oricare polinom $P \in \mathbb{C}(X)$,

$$P(A)T = TB(B + \lambda I).$$

Alegând P polinomul caracteristic al matricei A, i.e.:

$$P(X) = \det(A - XI) = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{m_i},$$

unde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sunt valorile proprii distincte ale matricei A, avem, folosind teorema Cayley-Hamilton,

$$P(A) = 0.$$

Deducem

$$T \prod_{i=1}^{k} [B - (\alpha_i - \lambda)I]^{m_i} = 0.$$

Dacă pentru orice $i \in \{1, \ldots, k\}$, $B - (\alpha)I \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, atunci $T = 0$, ceea ce este imposibil.

Deci există i astfel încât $B-(\alpha_i-\lambda)I=0$, adică

$$\alpha_i-\lambda\in \mathrm{S_p}(B).$$

În final $\lambda=\alpha-\beta$, cu $(\alpha,\beta)\in \mathrm{S_p}(A)\times \mathrm{S_p}(B)$ c.c.t.d.

„$\Leftarrow$“ Invers, presupunând $\lambda=\alpha-\beta$, unde $(\alpha,\beta)\in \mathrm{S_p}(A)\times \mathrm{S_p}(B)$, deducem că există $X,Y\in(\mathbb{C}^n)^2$, $X\neq 0$, $Y\neq 0$, verificând $AX=\alpha X$ şi $B'Y=\beta Y$, matricea B' având acelaşi spectru cu matricea B.

Cu aceste notaţii, matricea $M=XY'$ verifică

$$\Phi(M)=AXY'-XY'B=\alpha XY'-X(B'Y)'=\alpha XY'-\beta XY'=\lambda M.$$

Matricea M nefiind nulă, avem, în final, $\lambda\in S_P(\Phi)$, c.c.t.d.

Observaţie. Această teoremă conduce la o altă demonstraţie a teoremei 1. Într-adevăr, avem că există $M\neq 0$ astfel încât $AM=MB$ dacă şi numai dacă $0\in S_p(\Phi)$şi deci dacă şi numai dacă $\mathrm{S_p}(A)\cap \mathrm{S_p}(B)\neq\emptyset$.

Teorema 3. *Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Presupunând că există M în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r verificând $AM=MB$, avem* $\deg(\chi_A\wedge\chi_B)\geq r$*, unde χ_A, χ_B sunt polinoamele caracteristice ale matricilor A, B.*

Demonstraţie. Ne propunem să demonstrăm implicaţia:

$$AM=MB,\ \mathrm{rg}M=r\Rightarrow\deg(\chi_A\wedge\chi_B)\geq r.$$

Matricea M fiind de rang r, este echivalentă cu

$$J_r=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

i.e. există două matrici inversabile P şi Q astfel încât

$$M=PJ_rQ.$$

Atunci, din $AM=MB$, rezultă

$$APJ_rQ=PJ_rQB$$

sau

$$P^{-1}APJ_r=J_rQBQ^{-1}.$$

Fie

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$$

şi

$$QBQ^{-1}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{pmatrix}.$$

Avem

$$P^{-1}APJ_r=J_rQBQ^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ A_3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

şi deci avem $A_1 = B_1$, $A_3 = 0$, $B_2 = 0$.

Rezultă

$$\chi_A = \chi_{P_{-1}AP} = \det \begin{pmatrix} XI_r - A_1 & 0 \\ -A_3 & XI_{n-r} - A_4 \end{pmatrix} = \det(XI_r - A_1)\det(I_{n-r} - A_4),$$

şi la fel

$$\chi_B = \det(XI_r - B_1)\det(I_{n-r} - B_4) = \det(XI_r - A_1)\det(I_{n-r} - M_4).$$

Polinoamele caracteristice ale matricilor A şi B au un factor $\det(XI_r - A_1)$ de grad cel puţin r, adică $\deg\left(\chi_A \wedge \chi_B\right) \geq r$, c.c.t.d.

Observaţie. Implicaţia reciprocă este inexactă. Considerăm într-adevăr, două matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

matrice nilpotentă de grad $n-1$, şi $B = 0$. Dacă există o matrice M verificând $AM = MB$, atunci $AM = 0$, de unde $\mathrm{im}M \subseteq \ker A$. Atunci $\mathrm{rg}M \leq \dim(\ker A)$; fie $\mathrm{rg}\, M = r \leq 1$. Pentru $r > 1$ polinoamele caracteristice matricelor A, B au un factor de rang r în comun, dar nu există nici o matrice M de rang r astfel încât $AM = MB$.

Croşetul Lie (Paranteza Lie)

Definiţia 4. *Fiind date două matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte croşetul Lie al matricilor A şi B matricea $[A, B] = AB - BA$. Fiind dată matricea A, notăm cu φ_A aplicaţia liniară $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \mapsto [A, B]$.*

Proprietăţile imediate ale croşetului *Lie* sunt rezumate în proproziţia următoare

Propoziţia 5. *Croşetul Lie în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o lege de compoziţie internă verificând egalităţile*:

a) $[A, B] + [B, A] = 0$, *pentru orice* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

b) $[\lambda A + A', B] = \lambda[A, B] + [A', B]$, *pentru orice* $A, A', B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$;

c) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$, *pentru orice* $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*identitatea lui Jacobi*).

Fiind dată matricea A, mulţimea $\{(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid [A, B] = 0\}$ – nucleul aplicaţiei φ_A– se numeşte comutantul matricei A (vezi mai jos dimensiunea acestui nucleu în cazul în care A este diagonalizabilă [4]).

O proprietate caracteristică a croşetului *Lie* este dată de teorema următoare:

Teorema 6. *Următoarele două aserţiuni sunt echivalente*:

i) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *verifică* $\mathrm{tr}M = 0$, *unde* $\mathrm{tr}M$ *este urma matricei* M;

ii) *există* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *astfel încât* $M = [A, B]$.

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii) a) Fie $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, verificând $\mathrm{tr}M = 0$, $M \neq 0$. Demonstrăm că M este asemenea cu o matrice având elementele nule pe diagonala principală . Matricea M nefiind o matrice scalară ($m \neq kI$), există $a \in \mathbb{R}^n$ astfel încât vectorii a şi $M(a)$ să nu fie coliniari. Alegând atunci ca bază a spaţiului $\mathbb{R}^n$ mulţimea $\{a, M(a), e_3, \ldots, e_n\}$, există $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ şi $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1, \ldots, \alpha_n \\ 1 & \\ 0 & N \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & \end{pmatrix}$$

(matrici asemenea).

Avem

$$\mathrm{tr}M = \mathrm{tr}N.$$

Dacă $n = 2$, rezultatul este stabilit. Dacă $n > 2$ demonstrăm prin inducţie.

Presupunând că există $R \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ şi $U \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ cu elemente diagonale nule, verificând $R^{-1}NR = U$, atunci, cu $Q = \mathrm{diag}(1, R)$, matricea $M' = (PQ)^{-1}M(PQ)$ are elementele diagonale nule, c.c.t.d.

Fie S mulţimea matricelor având elementelor de pe diagonala principală nule. S este un spaţiu vectorial cu $\dim S = n^2 - n$.

b) Dacă M' este o matrice aparţinând mulţimii S, să demonstrăm că există $D, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde D este diagonală, astfel încât $M' = DC - CD$. Considerăm aplicaţia liniară $\varphi_\alpha : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X = (x_{ij}) \mapsto (y_{ij}) = \alpha X - X\alpha$, unde, α este matricea $\alpha = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$. Avem $y_{ij} = (i - j)x_{ij}$.

Nucleul lui φ_α este mulţimea matricelor diagonale. Dar $\mathrm{rang}\varphi_\alpha = n^2 - n$, $\mathrm{im}\varphi_\alpha \subseteq S$ şi $\dim S = n^2 - n$ şi deci $\dim \varphi_\alpha = S$. Prin urmare, există $D = \alpha$ şi C astfel încât $M' = \varphi_\alpha(C)$, c.c.t.d.

c) Ţinând seama de a) şi b), deducem că fiind dată $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ce verifică $\mathrm{tr}M = 0$, $M \neq 0$ (dacă $M = 0$ implicaţia este trivială), există $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $D, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde D este o matrice diagonală, astfel încât $M = P_{-1}(DC_C D)P$. Fie atunci $A = P^{-1}DP$ şi $B = P^{-1}CP$. Avem $M = [A, B]$, c.c.t.d.

ii) $\Rightarrow$ i) Rezultatul este evident, din proprietatea urmei produsului a două matrici.

Teoremele următoare stabilesc unele proprietăţi ale croşetului *Lie* al două matrici şi al aplicaţiei liniare φ_α.

Teorema 7. *Dacă A este o matrice diagonalizabilă, atunci aplicaţia φ_A este diagonalizabilă.*

Demonstraţie. Fie $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$ spectrul matricei A cu multiplicităţile $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Dacă $S_1, S_2, \ldots, S_p$ sunt spaţiile proprii ale matricei A, avem (din faptul că A este diagonalizabilă) $\dim S_j = m_j$, pentru $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Să determinăm $\ker\varphi_A$.

Evident $B \in \ker\varphi_A$ dacă şi numai dacă $AB = BA$. B comutând cu matricea A lasă stabil orice spaţiu propriu S_j. Fie $B_j = B_{S_j}$. Aplicaţia $\ker\varphi_A \mapsto \mathcal{L}(S_1) \times \ldots \times \mathcal{L}(S_p)$, $B \mapsto (B_1, B_2, \ldots, B_p)$ este un izomorfism şi

$$\dim \ker\varphi_A = \sum_1^p \dim \mathcal{L}(S_j) = \sum_1^p m_j^2.$$

Această sumă $\sum_1^p m_j^2$ este multiplicitatea valorii proprii 0 a aplicaţiei φ_A. Dacă $h, k \in \{1, \ldots, p\}$ sunt fixate, $h \neq k$, considerăm B astfel ca $B(S_k) \subseteq S_h$, $B(S_1) = 0$, dacă $1 \neq k$. Mulţimea acestor matrici B este izomorfă cu spaţiul vectorial $\mathcal{L}(S_k, S_h)$ şi, pentru orice $x \in S_k$

$$AB(x) - BA(x) = \lambda_h B(x) - B(\lambda_k x) = (\lambda_h - \lambda_k)B(x)$$

şi, pentru orice $x \in S_1$, $1 \neq k$, avem

$$AB(x) - BA(x) = A(0) - B(\lambda_k x) = 0 = (\lambda_h - \lambda_k)B(x).$$

O astfel de matrice B este vector propriu pentru φ_A corespunzător valorii proprii $\lambda_h - \lambda_k$.

Subspaţiul acestor matrici are $\dim \mathcal{L}(S_k, S_h) = m_k m_h$.

Dar

$$\dim \ker\varphi_A + \sum_{h\neq k} \dim \mathcal{L}(S_k, S_h) = \sum_1^p m_j^2 + 2\sum_{h\neq k} m_k m_h = \left(\sum_1^p m_k\right)^2 = n^2.$$

Această sumă fiind egală cu dimensiunea spaţiului $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, am obţinut exact subspaţiile proprii lui φ_A care este, deci, diagonalizabilă, c.c.t.d.

Observaţii. 1) Demonstraţia acestei teoreme a arătat că $\mathrm{C}(A)$, comutantul unei matrice diagonalizabile A, având ca polinom caracteristic

$$\chi_A(X) = \prod_1^p (X - \lambda_j)^m,$$

este un subspaţiu vectorial care are $\dim \mathrm{C}(A) = \sum_1^p m_j^2$.

2) Valorile proprii ale lui φ_A sunt conforme cu teorema 2.

Teorema 8. *Sunt adevărate următoarele afirmaţii*:

a) *Pentru orice* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *şi pentru orice* $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_A^n(B) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k A^{n-k} B A^k;$$

b) *Avem*

$$[A^{n-1}, B] = \sum_{k=0}^n A^k [A, B] A^{n-k};$$

c) *Dacă* $0 \in \mathrm{S_p}A$, *atunci* A *este nilpotentă dacă şi numai dacă* φ_A *este nilpotentă.*

d) *Următoarele două aserţiuni sunt echivalente*:

i) A *nu are decât o singură valoare proprie*;

ii) φ_A *este nilpotentă.*

Demonstraţie

a) Aplicaţia φ_A se descompune sub forma $\varphi_A = S - D$, unde S (respectiv D) este înmulţirea la stânga (respectiv la dreapta) cu A. Deoarece matricile S şi D comută, aplicând formula binomului lui *Newton* obţinem:

$$\varphi_A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^{n-k}(-1)^k D^k,$$

de unde deducem aserţiunea a).

b) Pentru matricile A şi B se poate scrie

$$\sum_{k=0}^{n} A^k[A,B]A^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} A^{k+1}BA^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} A^kBA^{n+k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} A^kBA^{n+k-1} - \sum_{k=0}^{n} A^kBA^{n+k-1} = A^{n+1}B - BA^{n+1}.$$

c) „$\Rightarrow$" Presupunând A nilpotentă, avem $A^n = 0$. Dacă $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, atunci fie $2n-k$, fie k este mai mare sau egal cu n, deci, ţinând seama de rezultatul aserţiunii a), avem

$$\varphi_A^{2n}(B) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k A^{2n-k}BA^k = 0,$$

i.e. φ_A este nilpotentă.

„ $\Leftarrow$" Presupunând că $0 \in \mathrm{S_p}A$ şi că A nu este nilpotentă, vom arăta că φ_A nu este nilpotentă. Deoarece A nu este nilpotentă, există $\lambda \neq 0$, valoare proprie matricei A; atunci $\ker(A - \lambda I) \neq 0$. $\{0\}$ fiind valoare proprie a lui A, A nu este inversabilă: $\mathrm{im}A \neq \mathbb{R}^n$. Fie atunci F un suplementar al subspaţiului $\mathrm{im}A$ şi B verificând $B_{\mathrm{im}A} = 0$, $B_{|F} = \mathbb{R}v$, unde $v \in \ker(A - \lambda I)$; atunci subspaţiul $\mathrm{im}B \subseteq \ker(A - \lambda I)$.

Pentru $x \in \mathbb{R}^n$, avem

$$(AB - BA)(x) = AB(x) = \lambda B(x),$$

i.e.

$$\varphi_A(B) = \lambda B,$$

c.c.t.d. Deducem aserţiunea c).

d) i) $\Rightarrow$ ii) Dacă λ este singura valoare proprie a matricei A, avem imediat că $\varphi_{A-\lambda I} = \varphi_A$ şi $A - \lambda I$ este nilpotentă şi deci φ_A este nilpotentă, ţinând seama de c).

ii) $\Rightarrow$ i). Presupunând φ_A nilpotentă, fie $\lambda \in \mathrm{S_p}A$. Atunci $\varphi_{A-\lambda I} = \varphi_A$ este nilpotentă şi 0 este valoarea proprie a matricei $A - \lambda I$. Ţinând seama de c), $A - \lambda I$ este nilpotentă, adică A nu are decât o valoare proprie, c.c.t.d.

Pentru demonstrarea aserţiunii d) se poate utiliza şi teorema 2, caz în care $A = B$.

Croşetul Lie şi produsul scalar $(X, Y) \mapsto < X, Y >= \mathrm{tr}(X^t Y)$

Lema 9. *Aplicaţia* $(X, Y) \mapsto < X, Y >= \mathrm{tr}(X^t Y)$ *este un produs scalar euclidian pe* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Demonstraţie. Aplicaţia $(X, Y) \mapsto < X, Y >$ este evident biliniară; ea este simetrică, deoarece pentru orice (X, Y), avem

$$< X, Y >= \mathrm{tr}(X^t Y) = \mathrm{tr}^t(X^t Y) = \mathrm{tr}(Y^t X) =< Y, X > .$$

Mai mult, dacă $X = (x_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, atunci

$$< X, X >= \mathrm{tr}\left(X^t X\right) = \sum_{i,j} x_{ij}^2 \ge 0$$

şi

$$< X, X >= 0 \Leftrightarrow X = 0,$$

i.e. $<, >$ este un produs scalar euclidian pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Folosind acest produs scalar, avem următoarele două teoreme:

Teorema 10. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *şi* $\mathrm{C}(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ *comutantul matricei* A. *Atunci următoarele două aserţiuni sunt echivalente*:

i) *există* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *astfel încât*

$$B = [A, X],$$

i.e. $B \in im\varphi_a$;

b) *pentru orice* $X \in \mathrm{C}(A)$,

$$\mathrm{tr}(BX) = 0.$$

Demonstraţie. Cu notaţiile de mai sus, trebuie arătată echivalenţa următoare

$$B \in \mathrm{im}\varphi_A \Leftrightarrow < B, {}^t X >= 0,$$

pentru orice $X \in \ker\varphi_A$, deoarece $\ker\varphi_A = \mathrm{C}(A)$.

Adjuncta endomorfismului φ_A pentru acest produs scalar fiind endomorfismul φ_A^* definit prin $< \varphi_A(X), Y >=< X, \varphi_A^*(Y) >$, ne propunem să demonstrăm că $\varphi_A^* = \varphi_{A^*} = \varphi_{{}^t A}$.

Într-adevăr

$$< \varphi_A(X), Y >= \mathrm{tr}[(AX - XA)^t Y] = \mathrm{tr}(AX^t Y - XA^t Y) = \mathrm{tr}(X^t Y A - XA^t Y) =$$

$$= \mathrm{tr}[X({}^t Y A - A^t Y)] = \mathrm{tr}[X^t({}^t A Y - Y^t A)] = \mathrm{tr}[X^t \varphi_{{}^t A}(Y)] =< X, \varphi_{{}^t A}(Y) >, \text{ c.c.t.d.}$$

Dar avem proprieatea endomorfismului adjunct $\mathrm{im}\varphi_A = \ker\varphi_{A^*}$ (ortogonalitate relativ la produsul scalar definit mai sus). Astfel teorema 10 este demonstrată dat fiind că $\mathrm{C}(A) = \mathrm{C}({}^t A)$ (M comută cu ${}^t A$ dacă şi numai dacă ${}^t M$ comută cu A.

Teorema 11. *Pentru* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *următoarele două aserţiuni sunt echivalente*:

a) A *este nilpotentă*;

b) $A \in \mathrm{im}(\varphi_A)$.

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b) Să demonstrăm că dacă A este nilpotentă, atunci $A \in \ker\varphi_A$. Într-adevăr, fie $X \in \ker\varphi_{A^*} = \ker\varphi_{{}^tA}$; atunci $AX = X\,{}^tA$ şi $\lambda \in \mathrm{S_p}\,(X\,{}^tA)$ asociat vectorului propriu definit prin $X\,{}^tAv = \lambda v$. Dacă m este cel mai mic număr întreg verificând ${}^tA^m v = 0$ [un astfel de întreg m există, matricea ${}^tA$ fiind ea însăşi nilpotentă] avem $X\,{}^tA^m = \lambda A^{m-1}v = 0$, de unde $\lambda = 0$. Deci spectrul matricei $X\,{}^tA$ este redus la $\mathrm{S_p}X\,{}^tA = \{0\}$, (i.e. $X\,{}^tA$ este nilpotentă).

Deducem că $\mathrm{tr}\,(X\,{}^tA) = 0$ şi, în final, $< X, A >= 0$, pentru orice $X \in \ker\varphi_A$ şi $A \in (\ker\varphi_A) = \mathrm{im}\varphi_A$, c.c.t.d.

b) $\Rightarrow$ a) Deoarece $A \in \mathrm{im}(\varphi_A)$, rezultă $A = AX - XA$; deducem atunci că

$$A^2X - XA^2 = A(AX - XA) + (AX - XA)A = 2A^2,$$

şi, prin inducţie,

$$A^kX - XA^k = kA^k,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Avem deci

$$\mathrm{tr}(A^k) = \frac{1}{k}\mathrm{tr}(A^kX - XA^k) = 0,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 11 este, atunci, un corolar imediat al lemei următoare:

Lema 12. *Matricea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *verificând* $\mathrm{tr}(A^m) = 0$, *pentru orice* $m \in \mathbb{N}^*$, *este nilpotentă.*

Demonstraţie. Fie $\mathrm{S_p}A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt rădăcinile complexe ale polinomului caracteristic χ_A al matricei A. Deoarece $\mathrm{tr}(A^m) = 0$, rezultă că sumele lui *Newton*, relative rădăcinilor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sunt nule şi deci $\mathrm{tr}(A^m) = \lambda_1^m + \cdots + \lambda_n^m = 0$. Matricea A fiind asemenea cu o matrice triunghiulară având coeficienţii diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. A^m este asemenea cu o matrice triunghiulară având coeficienţii diagonali $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$. Din formulele lui *Newton* deducem, că funcţiile simetrice elementare ale rădăcinilor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ notate cu $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sunt toate nule. Deci polinomul caracteristic al matricei A este

$$\chi_A(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\sigma_n = X^n.$$

Matricea A verifică $\chi_A(A) = A^n = 0$ – teorema *Cayley-Hamilton* – i.e. A este nilpotentă.

Vezi mai jos o altă demonstraţie. Încheiem aici demonstraţia lemei 12 şi teoremei 11.

Teorema 13. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *verificând* $[A, [A, B]] = 0$. *Atunci avem*:

a) $[A, B]^k = [A, B[A, B]^{k-1}]$, *pentru orice* $k > 0$;

b) $[A, B]$ *este nilpotentă*;

c) $[A^k, B] = k[A, B]A^{k-1}$, *pentru orice* $k > 0$;

d) *Presupunând A nilpotentă, avem AB nilpotentă.*

Demonstraţie. a) Pentru orice matrici $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, verificăm că

$$\mathrm{tr}[A, B] = 0$$

şi

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]. \tag{1}$$

Punând $[A, B] = V$, avem, ţinând seama de ipoteză,

$$[A, V] = 0.$$

Atunci, cu (1), pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă $[A, V^2] = 0$ şi, în general, prin inducţie, obţinem

$$[A, V^k] = 0.$$

Deci

$$[A, BV^{k-1}] = [A, B]V^{k-1} + B[A, V^{k-1}] = [A, B]V^{k-1} = V^k = [AB]^k.$$

b) Deducem că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{tr}V^k = \mathrm{tr}[A, BV^{k-1}] = 0.$$

Să arătăm, atunci, prin inducţie că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(V^k) = 0$ implică V nilpotentă. (O altă demonstraţie a lemei 12.)

Pentru $n = 1$ proprietatea este trivială.

Presupunem proprietatea verificată pentru orice matrice $Z \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.

Dacă $\chi_V(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n$ este polinomul caracteristic al matricei V, atunci, conform teoremei *Cayley-Hamilton*,

$$\chi_V = 0.$$

Ţinând seama că pentru oricare $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}V^k = 0$, avem

$$(-1)^n n a_n = 0.$$

Deducem:

$$a_n = \det V = 0.$$

Există deci $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $Z \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ şi $X \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{C})$ astfel încât

$$P^{-1}VP = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & Z \end{pmatrix};$$

fie, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P^{-1}V^kP = \begin{pmatrix} 0 & Xz^{k-1} \\ 0 & Z^k \end{pmatrix}.$$

Deducem că, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{tr}(V^k) = \mathrm{tr}(Z^k).$$

Ţinând seama de ipoteza de inducţie, matricea Z este nilpotentă, i.e. există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $Z^k = 0$.

Atunci

$$V^{k'+1} = 0.$$

Observaţie. Implicaţia precedentă este o echivalenţă. Într-adevăr, dacă V este nilpotentă, atunci matricea V^k este şi ea nilpotentă pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Deci 0 este singura valoare proprie de V^k. Aşadar, $\mathrm{tr}(V^k) = 0$, c.c.t.d.

c) Dezvoltând suma următoare $\sum\limits_{j=0}^{k-1} A^j[B,A]A^{k-j-1}$, obţinem

$$[A^k, B] = -[B, A^k] = -\sum_{j=0}^{k-1} A^j[B,A]A^{k-j-1} = kVA^{k-1} = k[A,B]A^{k-1}.$$

d) Ne propunem să demonstrăm că spectrul matricei AB este redus la $\mathrm{S_p}AB = \{0\}$. Fie $\lambda \in \mathrm{S_p}AB$ şi X un vector propriu asociat; avem $ABX = \lambda X$. Dacă p este cel mai mic întreg astfel că $A^pX = 0$ – un astfel de p există căci A este nilpotentă; atunci, utilizând c) rezultă

$$\lambda A^{p-1}X = A^pBX = [A^p, B]X + BA^pX = pVA^{p-1}X.$$

Dar V fiind nilpotentă – vezi b) – şi $A^{p-1}X \neq 0$, deducem $\lambda = 0$. Prin urmare, dacă $\lambda \in \mathrm{S_p}AB$, atunci $\lambda = 0$, i.e. AB este nilpotentă.

Croşetul Lie şi cotriangularizabilitate

Fie $\mathcal{F} \in \{A, B, C, \ldots\}$ o familie de matrici aparţinând lui $\mathcal{M}_n(C)$.

Definiţia 14. *Familia matricilor* $\mathcal{F} = \{A, B, C, \ldots\}$ *este cotriangularizabilă dacă toate matricile familei sunt triangularizabile în aceeaşi bază, adică există* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât oricare ar fi* $X \in \mathcal{F}$, PXP^{-1} *este o matrice triunghiulară.*

Cu această definiţie avem următoarele teoreme.

Teorema 15. *Două matrici* A, B *aparţinând lui* $\mathcal{M}_n(C)$ *şi verificând* $\mathrm{rg}[A,B] \leq 1$, *sunt cotriangularizabile.*

Demonstraţie. Să arătăm că spaţiile vectoriale $\ker A$ şi $\mathrm{im}A$ sunt stabile prin B.

Într-adevăr avem $\mathrm{rg}(AB_BA) \leq 1 \Rightarrow \mathrm{im}(AB - BA) \cap \mathrm{im}A \neq \{0\}$.

Fie $\mathrm{im}(AB - BA) \subseteq \mathrm{im}A^*$ şi $\mathrm{im}(AB - BA) \cap \mathrm{im}A = \{0\}$.

• Dacă $\mathrm{im}(AB - BA) \subseteq \mathrm{im}A$, atunci $\mathrm{im}BA \subseteq \mathrm{im}A$, deci $\mathrm{im}A$ este stabil pentru B.

• Dacă $\mathrm{im}(AB - BA) \cap \mathrm{im}A = \{0\}$, atunci pentru orice $x \in \ker A$,

$$ABx = (AB - BA)x \in \mathrm{im}(AB - BA) \cap \mathrm{im}A = \{0\}$$

i.e. $ABx = 0$ şi $\ker A$ este stabil pentru B, c.c.t.d.

Deducem existenţa, pentru $n \geq 2$ a unui subspaţiu netrivial stabil pentru A şi B. Într-adevăr, dacă A este o omotetie, atunci oricare dreaptă proprie pentru B convine. Dacă A nu este o omotetie, fie $\lambda \in \mathrm{S_p}(A)$. Aplicând cele de mai sus matricilor λI şi B deducem că $\ker(A - \lambda I)$ sau $\mathrm{im}(A - \lambda I)$ convin.

O inducţie imediată permite atunci să se deducă concluzia.

Trivial pentru $n = 1$; presupunem pentru $n \geq 2$ rezultatul verificat pentru $A, B \in \mathcal{M}_n(C)$, unde $1 \leq k \leq n$. Să demonstrăm atunci în cazul în care $A, B \in$

$\in \mathcal{M}_n(C)$. Fie S un subspaţiu netrivial al spaţiului $\mathbb{C}^n$, stabil pentru A şi B. Fie $\mathcal{B}$ o bază a spaţiului $\mathbb{C}^n$ obţinută prin completarea unei baze a lui S. Dacă P este matricea de trecere între baza canonică a lui $\mathbb{C}^n$ şi această bază $\mathcal{B}$, atunci avem

$$P^{-1}AP = A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad P^{-1}BP = B' = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix}.$$

Din inegalitatea $\mathrm{rg}(A'B' - B'A') \leq 1$, deducem $\mathrm{rg}(A_1B_2 - B_1A_1) \leq 1$ şi $\mathrm{rg}(A_3B_3 - B_3A_3) \leq 1$. Matricile A_1, B_1 pe de o parte şi A_3, B_3 pe de altă parte sunt cotriangularizabile (ipoteza de inducţie). Deducem că matricile A', B' sunt ele însăşi cotriangularizabile şi în final, matricile A şi B sunt cotriangularizabile, c.c.t.d.

Teorema 16. *Fie trei matrici $A, B, C \in \mathcal{M}_n(C)$ verificând $C = [A, B]$, $C \in ker\varphi_A \cap ker\varphi_B$. Atunci cele trei matrici sunt cotriangularizabile.*

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathrm{S_p}(C)$ şi E_λ subspaţiul propriu asociat. Cum C comută cu A, B, rezultă că E_λ este stabil pentru A şi B. Notăm A', B' restricţiile lui A, B la E_λ. Avem atunci $A'B' - B'A' = \lambda \mathrm{id}_\lambda$, unde id_λ este identitatea spaţiului E_λ. Deci $n\lambda = \mathrm{tr}(A'B' - B'A') = 0$, de unde $\lambda = 0$ şi $A'B' - B'A' = 0$. Atunci orice subspaţiu propriu al lui A' este stabil prin B'. Deducem că A', B', C au un vector propriu comun aparţinând subspaţiului E_0. Cu notaţiile evidente, există deci, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & X \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \beta & Y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}.$$

Matricile $A_1, B_1, C_1 \in \mathcal{M}_n(C)$ verifică $[A_1 B_1] = C_1$, $C_1 \in \ker\varphi_{A_1} \cap \ker\varphi_{B_1}$. O inducţie evidentă după n permite să se deducă concluzia. Într-adevăr, ipoteza de inducţie asigură că aceste matrici A_1, B_1, C_1 sunt cotriangularizabile şi deducem imediat teorema 16.

Complemente

Dacă $\mathcal{U}$ este un subspaţiu al spaţiului $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm cu $[\mathcal{U}]$ spaţiul vectorial generat de matricile $[A, B]$, unde $A, B \in \mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ este o algebră *Lie* dacă $[\mathcal{U}] \subseteq \mathcal{U}$. O algebră *Lie* este *rezolubilă* dacă există algebre *Lie* $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_p$ astfel ca:

$$\{0\} = \mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{U}_{p-1} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}, \;\; \text{şi} \;\; [\mathcal{U}_i] \subseteq U_{i+1},$$

pentru $i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

În biliografia de mai jos, [2] paginile 125-128, teoremele 9.11 şi 9.9 sau în [3], paginile 189-191, teorema 3.5.2 şi paginile 200-204, teorema 3.7.3, se găsesc demonstraţiile celor două următoare teoreme importante:

Teorema 17. (Teorema lui Lie.) *Elementele unei algebre Lie rezolubile sunt cotriangularizabile.*

Teorema 18 (Teorema lui Engel). *Fie o algebră Lie L formată de elemente nilpotente. Atunci*:

a) *există un vector $v \neq 0$ verificând $u(v) = 0$, pentru orice $u \in L$.*

b) *Elementele algebrei Lie L sunt cotriangularizabile.*

Bibliografie

[1] A. Reisner, *Asupra comutantului unui endomorfism* (*unei matrici pătratice*), G.M.-A (va apărea).

[2] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Springer Verlag, 1881.

[3] V. S. Varadarajan, *Lie Groups. Lie Algebras and their representations*, Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag, 1974.

Centrul de calcul E. N. S. T. din Paris,
Franţa
Adrien.Reisner@enst.fr

NOTE METODICE

Generalizarea unor probleme de calcul integral

DE NICOLAE STANCIU

Abstract

The author presents some general results concerning methods of computation of Riemann integrals which can be used to solve several problems from Gazeta Matematică.

Key words: odd functions, even functions, Riemann periodic functions, integral.
M.S.C.: 26A33, 26A42

Ideea scrierii prezentului articol mi-a fost sugerată de găsirea unor metode generale pentru soluţionarea unor probleme de calcul integral întâlnite destul de des în Gazeta Matematică seria A şi B şi în alte reviste de profil (R. M.T., R. I. M. Braşov, S. Î. M. Bacău, Recreaţii Matematice Iaşi etc.).

I. Asupra calculului integral pentru funcţii pare şi impare.

Propoziţia I.1. *Fie* $c \in (0, \infty)$ *şi* $f : (-c, c) \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă. Atunci*:

1) $\displaystyle\int_a^b f(-x)\mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(x)\mathrm{d}x,$

pentru orice $a, b \in (-c, c)$; *în particular*:

$$\int_0^a f(-x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(-x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $a \in (-c, c)$;

2) f *este pară dacă şi numai dacă*

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(-x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $a \in (0, c)$ (*respectiv* $a \in (-c, c)$);

3) *f este impară dacă şi numai dacă*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

oricare ar fi $a \in (0, x)$ (respectiv $a \in (-c, c)$);

4) *dacă, f este pară, atunci*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $a \in (-c, c)$;

5) (i) *dacă f este pară, atunci*

$$\int_{-a}^{a} xf(x)\mathrm{d}x = 0,$$

pentru orice $a \in (-c, c)$;

(ii) *dacă f este impară, atunci*

$$\int_{-a}^{a} xf(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} xf(x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $a \in (-c, c)$;

(iii) *dacă f este arbitrară, atunci*

$$\int_{-a}^{a} f(x^2)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x^2)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $a \in (-c, c)$ şi

$$\int_{-a}^{a} xf(x^2)\mathrm{d}x = 0,$$

pentru orice $a \in (-c, c)$.

Demonstraţie. 1) Fie $a, b \in (-c, c)$, $a < b$ fixaţi; făcând substituţia $x = -t$, obţinem ceea ce trebuia demonstrat.

2) Dacă f este pară, $f(x) = -f(-x)$, pentru orice $a \in (-c, c)$ şi deci

$$\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $a \in (0, c)$.

Reciproc, să presupunem că

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(-x)\mathrm{d}x,$$

pentru orice $a \in (0, c)$.

Atunci

$$\int_0^a (f(x) - f(-x))\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x - \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x - \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

pentru orice $a \in (0, c)$.

Rezultă că $f(x) - f(-x) = 0$, pentru orice $x \in (0, a)$. Dacă $x \in (-c, 0)$, atunci $-x \in (0, c)$ şi prin urmare $f(-x) - f(-(-x)) = 0$, deci $f(x) = f(-x)$, oricare ar fi $x \in (-c, c)$, adică f este pară.

3) Dacă f este impară, $f(x) + f(-x) = 0$, oricare ar fi $a \in (-c, c)$ şi deci, pentru orice $a \in (0, c)$, avem

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (f(-x) + f(x))\,\mathrm{d}x = 0.$$

Reciproc, fie $a, b \in (-c, c)$, $a < b$, fixaţi; conform ipotezei, avem

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-b}^b f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Avem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_b^{-b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-b}^{-a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Atunci, din (1), obţinem

$$\int_{-b}^{-a} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(-x)\mathrm{d}x,$$

şi rezultă că

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(-x)\mathrm{d}x,$$

deci

$$\int_a^b (f(-x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 0,$$

de unde
$$f(-x)+f(x)=0,$$
pentru orice $x\in(-c,c)$.

Prin urmare f este impară.

4) Dacă f este pară, avem $f(x)=f(-x)$, oricare ar fi $x\in(-c,c)$ şi deci
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

5) (i) Dacă f este pară, atunci funcţia $x\mapsto xf(x)$ este impară şi deci
$$\int_{-a}^{a} xf(x)\mathrm{d}x \overset{(3)}{=} 0,$$
pentru orice $a\in(-c,c)$;

(ii) analog ca la (i);

(iii) rezultă imediat din (i) şi (ii), ţinând seama de faptul că funcţia $x\mapsto f(x^2)$ (respectiv $x\mapsto xf(x^2)$) este pară (respectiv impară).

Propoziţia I.2. *O funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă este impară dacă şi numai dacă pentru orice $x\in\mathbb{R}$, avem*
$$\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\textit{constant}.$$

Demonstraţie. Deoarece f este continuă, ea admite primitive. Fie F o primitivă a sa.

Rezultă că
$$\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{x} f(-t)\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t-\int_{-x}^{0} f(t)\mathrm{d}t=0.$$

II. Asupra calculului integral pentru funcţiile pare şi impare generalizate

Definiţie. *Funcţia $f:[a-r,a+r]\to\mathbb{R}$ se numeşte a-pară dacă $f(a+x)=$ $=f(a-x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ cu $x\le r$, respectiv a-impară, dacă $f(a+x)=$ $=-f(a-x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, cu $|x|\le r$.*

Propoziţia II.1. *Fie $f:[x_0-r,x_0+r]\to\mathbb{R}$ continuă, cu proprietatea $af(x_0+x)+bf(x_0-x)=c$, oricare ar fi x, cu $|x|\le r$, unde $a,b\in\mathbb{R}^*$, $c\in\mathbb{R}$.*

Atunci
$$\text{(i)}\ \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x=\frac{2cr}{a+b},\ a+b\neq 0;$$
$$\text{(ii)}\ \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x=\frac{cr}{a}+\frac{a-b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Considerăm $\alpha, \beta : [-r, r] \to [x_0 - r, x_0 + r]$, $\alpha(t) = x_0 - t$, $\beta(t) = x_0 - t$ şi cum $f : [a - r, a + r] \to \mathbb{R}$ este continuă, putem aplica schimbarea de variabilă:

(i) $$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha(-r)}^{\alpha(+r)} f(\alpha(t))\alpha'(t)\mathrm{d}t = \int_{-r}^{r} f(x_0+t)\mathrm{d}t = \int_{-r}^{r} \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a} f(x_0 - t)\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2cr}{a} - \frac{b}{a}\int_{-r}^{r} f(x_0 - t)\mathrm{d}t = \frac{2cr}{a} - \frac{b}{a}\int_{-r}^{r} f(\beta(t))\beta'(t)\mathrm{d}t = -\frac{2cr}{a} + \frac{a}{b}\int_{\beta(-r)}^{\beta(+r)} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x.$$

Rezultă că
$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x + \frac{b}{a}\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2cr}{a}$$

şi deci
$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2cr}{a+b}.$$

(ii) Avem
$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0-r}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x.$$

Cum

$$\int_{x_0-r}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha(-r)}^{\alpha(0)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-r}^{0} f(x_0+t)\mathrm{d}x = \int_{-r}^{0} \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a} f(x_0 - t)\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{cr}{a} - \frac{b}{a}\int_{-r}^{0} f(x_0 - t)\mathrm{d}t = \frac{cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{-r}^{0} f(\beta(t))\beta'(t)\mathrm{d}t = \frac{cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{\beta(-r)}^{\beta(r)} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x,$$

rezultă că

$$\int_{x_0-r}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x = \frac{cr}{a} + \frac{b}{a}\int_{x_0+r}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x = \frac{cr}{a} + \frac{a-b}{a}\int_{x_0}^{x_0+r} f(x)\mathrm{d}x.$$

Propoziţia II.2. *Dacă* $f : [a-r, a+r] \to \mathbb{R}$ *este continuă, atunci*:

$$\text{(i)} \qquad \int_{a-r}^{a+r} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2 \cdot \displaystyle\int_{a}^{a+r} f(x)\mathrm{d}x, & \textit{dacă} \quad f \quad \textit{este } a\textit{-pară} \\ 0, & \textit{dacă} \quad f \quad \textit{este } a\textit{-impară.} \end{cases}$$

(ii) *Produsul (câtul) a două funcţii de a-parităţi diferite este o funcţie a-impară şi produsul (câtul) a două funcţii de aceeaşi a-paritate este o funcţie a-pară.*

Demonstraţie. (i) Dacă f este a-pară, atunci $f(a+x) - f(a-x) = 0$; deci, punând, în II.1, $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $x_0 = a$, rezultă că

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1-(-1)}{1} \cdot \int_{a}^{a+r} f(x)\mathrm{d}x = 2 \int_{a}^{a+r} f(x)\mathrm{d}x.$$

Dacă f este a-impară, atunci $f(a+x) + f(a-x) = 0$ şi punând în II.1.(ii) $a = b = 1$, $c = 0$, rezultă că

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(ii) Fie f, g a-pare, adică $f(a+x) = f(a-x)$, $g(a+x) = g(a-x)$. Rezultă că

$$(f \cdot g)(a+x) = f(a+x) \cdot g(a+x) = f(a-x) \cdot g(a-x)$$

şi analog

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a-x) = \left(\frac{f}{g}\right)(a+x) = f(a-x).$$

Aşadar $f \cdot g$ şi $\dfrac{f}{g}$ sunt a-pare, analog arătându-se şi restul.

Propoziţia II.3. *Pentru orice funcţie* $f : [a-r, a+r] \to \mathbb{R}$, *există o funcţie* f_1 *a-pară şi o funcţie* f_2 *a-impară, astfel încât* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *pentru orice* $x \in [a-r, a+r]$.

Demonstraţie. Pentru

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(2a-x)}{2} \quad \text{şi} \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(2a-x)}{2},$$

rezultă că

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Cum $f_1(a+x) = f_1(a-x)$, urmează că f_1 este a-pară, iar, cum $f_2(a+x) + f_2(a-x) = 0$, deducem că f_2 este a-impară.

Propoziţia II.4. *Dacă* $f, g : [a-r, a+r] \to \mathbb{R}$ *sunt integrabile şi* f *este a-pară, atunci*

$$\int_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{a+r} f(x) \cdot (g(x) - g(2a-x))\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Din II.3 rezultă că $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, unde g_1 este a-pară şi g_2 este a-impară, deci

$$\int\limits_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a-r}^{a+r} f(x)\left(g_1(x) + g_2(x)\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{a-r}^{a+r} f(x)g_1(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{a-r}^{a+r} f(x)g_2(x)\mathrm{d}x \overset{(II.2)}{=}$$

$$\overset{(II.2)}{=} \int\limits_{a}^{a+r} f(x)g_1(x)\mathrm{d}x \overset{(II.3)}{=} 2\int\limits_{a}^{a+r} f(x)\left(g(x) + g(2a-x)\right)\mathrm{d}x.$$

Propoziţia II.5. *Fie $f, g : [a - rf, a + r] \to \mathbb{R}$ integrabile şi f o funcţie a-impară. Atunci:*

$$\int\limits_{a-r}^{a+r} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{a+r} f(x)\cdot\left(g(x) - g(2a-x)\right)\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Se demonstrează analog cu propoziţia II.4, utilizând II.2 şi II.3.

III. Asupra calculului integral în cazul funcţiilor periodice

Propoziţia III.1. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci avem:*

a) *f este periodică de perioadă T dacă şi numai dacă $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = c$ (constant) pentru orice $a \in \mathbb{R}$.*

b) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *orice primitivă a lui f este periodică de perioadă T;*

(ii) *f este periodică, de perioadă T;*

(iii) $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = 0$, *pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstraţie. a) ($\Rightarrow$) Din ipoteză, $f(x+T) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Avem

$$\int\limits_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{a}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{T} f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{t}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Făcând, în ultima integrală, schimbarea de variabilă $t = y + t$, $y \in [0, T]$, obţinem

$$\int\limits_{T}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{a} f(y+T)\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{a} f(y)\mathrm{d}y. \tag{2}$$

pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Din (1) şi (2) rezultă

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(T)\mathrm{d}t,$$

pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

($\Leftarrow$) Presupunem $\int_x^{x+T)} f(t)\mathrm{d}t = c$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi fie F o primitivă a lui f. Atunci, $c = F(x+T) - F(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi deci, prin derivare, obţinem

$$f(x+T) - f(x) = F'(x+T) - F'(x) = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că f este periodică de perioadă T.

b) (i) $\Rightarrow$ (ii) Observăm că, orice primitivă a lui f este periodică, de perioadă T, dacă şi numai dacă, există o primitivă a lui f, periodică, de perioadă T, dacă şi numai dacă, funcţia $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$, este periodică, de perioadă T.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dacă f este periodică, de perioadă T, avem

$$(F(x+t) - F(x))' = f(x+t) - f(x) = 0,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi, deci, există un $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x+t) - F(x) = c$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Atunci

$$c = F(0+t) - F(0) = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

deci

$$F(x+t) = F(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi deci F este periodică de perioadă T.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Rezultă din punctul a).

(i) $\Rightarrow$ (iii) Dacă (i) este adevărată, atunci F este periodică, de perioadă T şi avem

$$\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = F(x+t) - F(x) = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Din

$$\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = F(x+t) - F(x) = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi deci F este periodică de perioadă T.

Concluzie. Acest articol propune propoziţii care permit calculul unor integrale definite ce fac obiectul unor probleme publicate în Gazeta Matematică şi alte reviste de specialitate sau în unele manuale alternative de clasa a XII-a.

În continuare propun spre rezolvare următoarele probleme reprezentative: problema **14847** Gazeta Matematică, nr. 7 (1975), problema **22377** Gazeta Matematică, nr. 5 (1991), problema **22750** Gazeta Matematică, nr. 1 (1993), problema **22990** Gazeta Matematică, nr. 4 (1994), problema **23834** Gazeta Matematică, nr. 12 (1997), problema **24094** Gazeta Matematică, nr. 3 (1999), problema dată în concurs Gazeta Matematică, nr. 1 (2002), problema **25054** Gazeta Matematică, nr. 2 (2004).

Iată şi două aplicaţii propuse de autor.

Aplicaţia 1. Să se calculeze

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cos 2x}{(1+\sin^2 x)(1+\sin^2 2x)}\,\mathrm{d}x.$$

Soluţie. Fie $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{1+\sin^2 2x}, \qquad g(x) = \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}.$$

Se observă că $f(1-x) = f(\pi - x)$, adică este π – pară şi $g(\pi - x) = -g(\pi + x)$, adică este π – impară. Funcţia $h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ este conform Propoziţia II.2 (ii), π – impară şi conform Propoziţiei II. 2 (i), avem

$$\int_0^{2\pi} h(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cos 2x}{(1+\sin^2 x)(1+\sin^2 2x)}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Aplicaţia 2. Să se calculeze

$$\int_{-2007}^{2007} \frac{x^{2008}}{\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{sh}^{2k-1} x} + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Soluţie. Notăm:

$$f(x) = x^{2008}, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{sh}^{2k-1} x, \quad h(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{sh}^{2k-1} x} + 1}.$$

Se observă imediat că f este continuă şi pară, g este continuă şi impară, iar $h(x) + h(-x) = 0$. Rezultă :

$$I = \int_{-2007}^{2007} \frac{x^{2008}}{\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{sh}^{2k-1} x} + 1}\,\mathrm{d}x = \int_{-2007}^{2007} f(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

Se ştie că o funcţie arbitrară (care nu este nici pară nici impară) se poate scrie ca o sumă de două funcţii una pară şi alta impară. Astfel $h(x) = h_1(x)+h_2(x)$, unde $h_1(x) = \dfrac{h(x)+h(-x)}{2}$ = pară şi $h_2(x) = \dfrac{h(x)-h(-x)}{2}$ = impară. În continuare, utilizăm faptul că produsul (câtul) a două funcţii de aceeaşi paritate este o funcţie pară şi respectiv produsul (câtul) a două funcţii de parităţi diferite este o funcţie impară şi obţinem

$$I = \int_{-2007}^{2007} \frac{x^{2008}}{e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{sh}^{2k-1} x} + 1} \mathrm{d}x = \int_{-2007}^{2007} f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{-2007}^{2007} f(x)\left(h_1(x) + h_2(x)\right)\mathrm{d}x \overset{(II.2i)}{=\!=}$$

$$\overset{(II.2i)}{=\!=} \int_{-2007}^{2007} f(x)h_1(x)\mathrm{d}x \overset{(II.2i)}{=\!=} \int_{-2007}^{2007} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2007^{2009}}{2009}.$$

Bibliografie

[1] V. Arsinte, *Probleme Elementare de calcul integral*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1995.

[2] D. M. Bătineţu-Giurgiu ş.a., *Analiză matematică*, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2004.

[3] ∗ ∗ ∗ Gazeta Matematică , 1985 – 2007.

Grupul şcolar Tehnic Sf. Mucenic Sava
Berca, Buzău

PROBLEME PROPUSE

248. Fie $C^k(\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al funcţiilor reale de variabilă reală, diferenţiabile de k ori (unde, $C^\infty(\mathbb{R})$ – spaţiul funcţiilor indefinit derivabile, iar $C^0(\mathbb{R})$ – spaţiul funcţiilor continue) şi $L, D : C^2(\mathbb{R}) \to C^o(\mathbb{R})$ operatorii diferenţiali definiţi prin

$$L(y) = y'' + qy' + ry, \qquad D(y) = y', \qquad q, r \in \mathbb{R}.$$

a) Să se arate că $\ker L \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ şi că restricţia lui D la $\ker L$ este un endomorfism al lui $\ker L$.

b) Fie $\{y_1, y_2\}$ o bază în $\ker L$; pentru orice $y \in \ker L$, există $a, b \in \mathbb{R}$ unici, astfel încât $y = ay_1 + by_2$ şi deci, în felul acesta, se defineşte un izomorfism φ : $\ker L \to \mathbb{R}^2$. Să se arate că endomorfismul D induce un endomorfism $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ care face următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \ker L & \xrightarrow{D} & \ker L \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Să se determine o condiţie necesară şi suficientă pentru ca f să fie un automorfism.

c) Dacă A_f este matricea lui f în raport cu baza canonică, iar p este polinomul caracteristic al ecuaţiei $L(y) = 0$, să se calculeze $p(A_f)$.

d) Alegând în ker$L$ o bază convenabilă, să se scrie forma generală a lui A_f. Cazuri particulare:

(i) $q = 0$, $r = -1$; (ii) $q = r = 1$; (iii) $q = 2$, $r = 1$.

Dan Radu

249. Dacă a şi b sunt numere reale pozitive astfel încât $a + b = a^n + b^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci

$$a^{n+1} + b^{n+1} \leq 2.$$

Vasile Cîrtoaje

250. Fie a, b, c numere raţionale astfel încât $a \neq 0$ şi $4ac-b^2$ este pătratul unui număr raţional diferit de zero. Să se construiască un exemplu de funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

i) f este aditivă, adică

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) f verifică relaţia

$$af(f(x)) + bf(x) + cx = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Gabriel Dospinescu şi **Marian Tetiva**

251. Să se arate că, într-un simplex, au loc inegalităţile următoare:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r_i - r} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r_i + r} \geq \frac{n^2}{2}$;

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{h_i - r} \geq \frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{h_i + r} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{(n-2)h_i + r} \geq \frac{n^2}{n-1}$;

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(n-2)r_i - r} \geq \frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(n-2)r_i + r} \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(n-2)^2 r_i + r} \geq$

$$\geq \frac{n^2}{(n-2)(n-1)}.$$

Cu h_i şi r_i se notează înălţimile şi razele sferelor exînscrise simplexului, iar cu r raza sferei înscrisă simplexului ($i = \overline{1,n}$, $n \geq 3$).

Mihai Miculiţa şi **Marius Olteanu**

252. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_1$ şi $\sigma = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$, să se arate că

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \sqrt{x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}(S - x_{i_1} - x_{i_2} - \ldots - x_{i_k})} \leq \sqrt{C_{n-1}^{k} S\sigma}.$$

Gh. Szöllösy

SOLUŢIILE PROBLEMELOR PROPUSE

După intrarea la tipar a numărului 3/2007 al revistei, am mai primit soluţii corecte la problemele **223**, **225**, **227** de la domnii *Nicuşor Minculete* – profesor la Colegiul Naţional Mihai Viteazu din Sfântu Gheorghe şi *Gheorghe B.G. Niculescu* – profesor la Colegiul de Poştă şi Telecomunicaţii Gheorghe Airinei din Bucureşti.

228. *Pentru* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, *se notează* $A^* = J\,{}^tAI$, *unde*

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

şi fie $\Gamma = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^*A = I\}$, $G = \{u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \mid M(u) \in \Gamma\}$, *unde prin* $M(u)$ *s-a notat matricea endomorfismului* $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *în raport cu baza canonică.*

a) *Fie* G' *mulţimea tuturor endomorfismelor* $u \in G$ *cu proprietatea* că $u(e_1) = e_1$, *iar componenta lui* $u(e_3)$ *relativ la versorul* e_3 *este pozitivă. Să se arate că dacă* $u \in G'$, *atunci* $M(u)$ *are una din formele următoare*:

$$M_1(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\theta & \mathrm{sh}\theta \\ 0 & \mathrm{sh}\theta & \mathrm{ch}\theta \end{pmatrix}, \qquad M_2(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{ch}\theta & -\mathrm{sh}\theta \\ 0 & \mathrm{sh}\theta & \mathrm{ch}\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

b) *Să se arate că pentru* $u \in G'$, $M(u)$ *este diagonalizabilă şi să se indice, în ambele cazuri, forma diagonală şi matricile de transfer.*

c) *Să se stabilească faptul că* $A \in \Gamma$ *implică* $|\det A| = 1$ *şi* $a_{33}^2 \geq 1$. *Se notează* $\Gamma' = \{A \in \Gamma \mid a_{33} \geq 1\}$; *să se arate că* Γ' *este un subgrup al lui* Γ.

(*În legătură cu problema* **192**.)

Dan Radu

Soluţia autorului. a) Fie $u \in G'$ şi $M(u) = (a_{ij})$ matricea lui u în raport cu baza canonică. Deoarece $U(e_1) = e_1$, rezultă că $a_{11} = 1$, $a_{21} = a_{31} = 0$. Pe de altă parte, un calcul imediat ne conduce la faptul că

$$M^*(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & -a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

şi deoarece Γ şi G sunt grupuri izomorfe (vezi punctul a) al problemei **192**), avem $M^*(u)M(u) = I$. Identificând elementele de pe prima linie, găsim:

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 = 1 \\ &a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} = 0 \\ &a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} = 0. \end{aligned}$$

În ultimele două relaţii de mai sus, pumând condiţia $a_{11} = 1$, $a_{21} = a_{31} = 0$, rezultă $a_{12} = a_{13} = 0$ şi deci $M(u)$ este de forma

$$M(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

În conformitate cu cele stabilite la pct. b) al problemei **192**, dacă $y = u(x)$, atunci:

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2. \tag{1}$$

Cum $u(e_2) = a_{22}e_2 + a_{32}e_3$, iar $u(e_3) = a_{23}e_2 + a_{33}e_3$, din identitatea (1) deducem:

$$\begin{aligned} &a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1 \\ &a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1. \end{aligned} \tag{2}$$

Dar, după pct. a) al problemei **192**, $M(u) \in \Gamma$ implică ${}^tM(u) \in \Gamma$. Folosind identitatea (1) pentru matricea ${}^tM(u)$ vom găsi, exact ca mai sus, că:

$$\begin{aligned} &a_{22}^2 - a_{23}^2 = 1 \\ &a_{32}^2 - a_{33}^2 = -1. \end{aligned} \tag{3}$$

Din seturile de egalităţi (2) şi (3), rezultă imediat că $a_{23}^2 = a_{32}^2$ şi $a_{22}^2 = a_{33}^2$. Cum însă $a_{33}^2 = 1 + a_{32}^2 \geq 1$, iar a_{33} a fost presupus pozitiv, urmează că $a_{33} \geq 1$. Analog, $|a_{22}| \geq 1$ şi deci egalitatea $a_{22}^2 = a_{33}^2$ este echivalentă cu $|a_{22}| = a_{33}$. Notând, atunci, $|a_{22}| = a_{33} = \mathrm{ch}\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$, rezultă pentru a_{23} şi a_{32} următoarele variante:

(i) $a_{23} = \mathrm{sh}\theta, \quad a_{33} = \mathrm{sh}\theta;$

(ii) $a_{23} = \mathrm{sh}\theta, \quad a_{33} = -\mathrm{sh}\theta;$

(iii) $a_{23} = -\mathrm{sh}\theta, \quad a_{33} = -\mathrm{sh}\theta;$

(iv) $a_{23} = -\mathrm{sh}\theta, \quad a_{33} = \mathrm{sh}\theta.$

Ţinând cont de faptul că $\mathrm{ch}\theta$ este o funcţie pară, iar $\mathrm{sh}\theta$ impară, urmează că variantele (i) şi (iii), respectiv (ii) şi (iv) coincid şi deci matricea $M(u)$ are una din cele două forme din enunţ ($M_1(u)$ corespunde situaţiilor (i) şi (iii), $M_2(u)$ situaţiilor (ii) şi (iv)).

b) Formele diagonale şi matricile de transfer sunt respectiv:

$$D_1(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\theta} \end{pmatrix}, \qquad P_1(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$D_2(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J, \qquad P_2(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}\dfrac{\theta}{2} & -\mathrm{ch}\dfrac{\theta}{2} \\ 0 & -\mathrm{ch}\dfrac{\theta}{2} & \mathrm{sh}\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Dacă $A \in \Gamma$, atunci

$$\det A^* = \det((J\,{}^tAJ) = \det J \det {}^tA \det J = \det {}^tA = \det A$$

şi cum $A^*A = I$, rezultă imediat că $|\det A| = I$. Folosind identitatea (1) pentru vectorul e_3, vom avea

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1,$$

de unde

$$a_{33}^2 = 1 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \geq 1.$$

Fie acum $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \Gamma'$. După cele stabilite la punctul a) al prezentei probleme, vom avea

$$B^* = B^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & -b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & -b_{32} \\ -b_{13} & -b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

şi deci, dacă $C = AB^{-1} = (c_{ij})$, atunci

$$c_{33} = -a_{31}b_{31} - a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33}.$$

Urmează că $C = AB^{-1} \in \Gamma'$ dacă şi numai dacă $c_{33} \geq 1$, ceea ce este echivalent cu faptul că

$$1 + a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} \leq a_{33}b_{33}. \tag{4}$$

Utilizând din nou egalitatea (1) pentru matricile A^* şi B^* relativ la vectorul e_3, vom avea

$$\begin{aligned} a_{31}^2 + a_{32}^2 - a_{33}^2 &= -1 \\ b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 &= -1. \end{aligned} \tag{5}$$

Atunci, folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz şi egalităţile (5), obţinem

$$1 + a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} \leq 1 + |a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32}| \leq$$
$$\leq 1 + \sqrt{a_{31}^2 + a_{32}^2} \cdot \sqrt{b_{31}^2 + b_{32}^2} = 1 + \sqrt{a_{33}^2 - 1} \cdot \sqrt{b_{33}^2 - 1} \leq a_{33}b_{33},$$

ultima dintre inegalităţi probându-se prin calcul direct. În acest fel inegalitatea (4) este stabilită şi deci $AB^{-1} \in \Gamma'$. Conform criteriului subgrupului, rezultă că Γ' este subgrup în Γ şi deci este el însuşi grup.

229. *Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se arate că mulţimea*

$$\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$$

se poate partiţiona în trei submulţimi, fiecare având aceeaşi sumă a elementelor, dacă şi numai dacă n este de una din formele: $9k$, $9k-1$ sau $9k-5$, unde $k \geq 2$ este un număr natural.

Marian Tetiva

Soluţia autorului. Presupunem întâi că o partiţie ca în enunţ pentru mulţimea primelor n pătrate perfecte (nenule) există, evident, de aici rezultă că suma:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

se divide cu 3, deci că 9 divide produsul $n(n+1)(2n+1)$. Cum nu pot fi doi dintre factorii n, $n+1$ şi $2n+1$ al produsului care se divid cu 3, înseamnă că exact unul dintre ei se divide cu 9, adică $9 \mid n$ şi $n=9k$, sau $9 \mid (n+1)$ şi $n=9k-1$ sau $9 \mid (2n+1)$, caz în care n trebuie să fie de forma $9k-5$. Numărul k trebuie să fie cel puţin egal cu 2, deoarece nici una dintre mulţimile :

$$\{1,4,9,16,25,36,49,64,81\},\ ;\{1,4,9,16,25,36,49,64\},\ ;\{1,4,9,16\}$$

(obţinute pentru n de una din formele de mai sus, pentru $k=1$) nu se poate partiţiona în trei clase cu sumele elementelor egale. Acest fapt este evident pentru a treia mulţime: suma elementelor din fiecare clasă ar trebui să fie 10. Dacă prima dintre mulţimi s-ar putea împărţi în trei părţi conform cerinţei, suma elementelor fiecărei părţi ar trebui să fie 95; atunci submulţimea care-l conţine pe 64 trebuie să mai conţină nişte elemente a căror sumă să fie 31: este uşor de văzut că această sumă nu se poate realiza cu nici un grup de elemente . În sfârşit, acelaşi lucru se întâmplă în cea de a doua mulţime cu numărul 49: el nu poate realiza suma 68 (cât ar trebui să fie suma elementelor din fiecare clasă a partiţiei, dacă aceasta ar exista) cu nici un grup de elemente ale mulţimii.

Acum avem de demonstrat că, pentru orice n de forma $9k$ sau $9k-1$ sau $9k-5$, cu $k\geq 2$ număr natural, există o împărţire a mulţimii primelor n pătrate în trei submulţimi, disjucte două câte două, fiecare în aceeaşi sumă a elementelor.

Vom demonstra acest lucru prin inducţie; observaţia esenţială este că mulţimea:

$$\{(n+1)^2,(n+2)^2,\ldots,(n+18)^2\}$$

(formată cu pătratele a 18 numere naturale consecutive) se poate partiţiona în trei submulţimi cu aceeaşi sumă a elementelor. Acestea sunt :

$$\{(n+1)^2,(n+6)^2,(n+9)^2,(n+10)^2,(n+14)^2,(n+17)^2\},$$
$$\{(n+2)^2,(n+5)^2,(n+7)^2,(n+12)^2,(n+15)^2,(n+16)^2\}\ ;\text{şi}$$
$$\{(n+3)^2,(n+4)^2,(n+8)^2,(n+11)^2,(n+13)^2,(n+18)^2\}.$$

Evident, aceasta înseamnă că are loc implicaţia $P(n)\Rightarrow P(n+18)$, dacă $P(n)$ desemnează afirmaţia conform căreia mulţimea $\{1^2,2^2,\ldots,n^2\}$ se poate partiţiona în trei clase, fiecare cu aceeaşi sumă a elementelor (fiecare clasă a partiţiei găsite pentru n se reuneşte cu una dintre cele trei mulţimi de mai sus spre a obţine clasele partiţiei pentru $n+18$). Atunci, ca să încheiem rezolvarea problemei (Să arătăm că sunt valabie $P(9k-5)$, $P(9k-1)$ şi $P(9k)$, pentru orice $k\geq 2$), este suficient să găsim partiţii care satisfac enunţul pentru $k=2$ şi $k=3$, adică să arătăm că afirmaţia este adevărată pentru $n\in\{13,17,18,22,26,27\}$. Acestea sunt următoarele:

$$\{1^2,2^2,\ldots,13^2\}=\{1^2,3^2,5^2,6^2,9^2,11^2\}\cup\{2^2,10^2,13^2\}\cup\{4^2,7^2,8^2,12^2\}$$
$$\{1^2,2^2,\ldots,17^2\}=\{1^2,2^2,13^2,14^2,15^2\}\cup\{3^2,4^2,5^2,16^2,17^2\}\cup\{6^2,7^2,8^2,9^2,10^2,11^2,12^2\}$$
$$\{1^2,2^2,\ldots,18^2\}=\{1^2,6^2,9^2,10^2,14^2,17^2\}\cup\{2^2,5^2,7^2,12^2,15^2,16^2\}\cup\{3^2,4^2,8^2,11^2,13^2,18^2\}$$
$$\{1^2,2^2,\ldots,22^2\}\{1^2,3^2,6^2,13^2,17^2,19^2,20^2\}\cup\{2^2,5^2,7^2,8^2,9^2,10^2,11^2,12^2,14^2,15^2,16^2\}\cup$$
$$\cup\{4^2,18^2,21^2,22^2\}$$
$$\{1^2,2^2,\ldots,26^2\}=\{1^2,2^2,4^2,14^2,20^2,21^2,22^2,23^2\}\cup$$
$$\cup\{2^2,5^2,6^2,7^2,8^2,11^2,12^2,13^2,15^2,16^2,17^2,18^2,19^2\}\cup\{3^2,9^2,10^2,24^2,25^2,26^2\}$$
$$\{1^2,2^2,\ldots,27^2\}=\{1^2,2^2,3^2,4^2,5^2,25^2,26^2,27^2\}\cup$$
$$\cup\{6^2,7^2,9^2,11^2,12^2,13^2,16^2,17^2,18^2,20^2,21^2\}\cup\{8^2,10^2,14^2,19^2,22^2,23^2,24^2\}$$

şi astfel demonstraţia este încheiată.

Nota redacţiei. O soluţie parţială a problemei a mai dat şi dl. inginer *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea.

230. *Fie* $x_1,x_2,\ldots,x_n$ *şi* r *numere pozitive, astfel încât*

$$r=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\geq(n-1)^{1-\frac{2}{n}}.$$

Să se arate că

$$\mathrm{e}^{-x_1}+\mathrm{e}^{-x_2}+\ldots+\mathrm{e}^{-x_n}\geq n\mathrm{e}^{-r}.$$

Vasile Cîrtoaje

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca Codreanu din Bârlad. Să începem cu un rezultat ajutător, un caz particular al problemei, care se va dovedi util pentru cazul general.

Lemă. Fie c, u, v numere pozitive astfel încât:

$$c = \sqrt[n]{u^{n-1}v} \geq (n-1)^{1-\frac{2}{n}}$$

şi $u \geq c$. Atunci:

$$(n-1)e^{-u} + e^{-v} \geq ne^{-c}.$$

Demonstraţie. Inegalitatea de demonstrat se mai scrie

$$(n-1)e^{-u} + e^{-\frac{c^n}{u^{n-1}}} \geq ne^{-c}$$

sau, încă, $f(u) \geq f(c)$ pentru funcţia f definită prin

$$f(u) = (n-1)e^{-u} + e^{-\frac{c^n}{u^{n-1}}}, u > 0.$$

Cum $u \geq c$, inegalitatea ar rezulta dacă am putea arăta că f este crescătoare. Derivata lui f este

$$f'(u) = (n-1)\frac{c^n}{u^n}e^{-u}\left(e^{u-\frac{c^n}{u^{n-1}}} - \frac{u^n}{c^n}\right),$$

deci ar trebui să arătăm că

$$u - \frac{c^n}{u^{n-1}} \geq \ln\frac{u^n}{c^n},$$

sau, echivalent, că

$$g(u) = u - \frac{c^n}{u^{n-1}} - n\ln u + n\ln c \geq 0.$$

Să considerăm acum şi derivata funcţiei g, anume

$$g'(u) = \frac{1}{u^n}(u^n - nu^{n-1} + (n-1)c^n)$$

şi să observăm că, datorită inegalităţii din ipoteză $c^n \geq (n-1)^{n-2}$, avem

$$g'(u) \geq \frac{1}{u^n}(u^n - nu^{n-1} + (n-1)^{n-1}) \geq 0,$$

pentru orice $u > 0$; prin urmare g este o funcţie crescătoare, $g(u) \geq g(c) = 0$ pentru $u \geq c$, deci şi f este crescătoare pentru $u \geq c$, ceea ce ne trebuia pentru a deduce $f(u) \geq f(c)$ pentru $u \geq c$ (adică inegalitatea din enunţul lemei).

Desigur, ne mai rămâne să justificăm inegalitatea

$$u^n - nu^{n-1} + (n-1)^{n-1} \geq 0,$$

pentru orice $u > 0$; dar vedem imediat că, scrisă în forma

$$\left(\frac{n-1}{u}\right)^n - n\frac{n-1}{u} + n - 1 \geq 0,$$

aceasta nu este alta decât inegalitatea lui *Bernoulli*.

Acum putem trece la rezolvarea problemei, pentru care vom proceda prin inducţie. Pentru $n = 2$ avem de arătat că inegalitatea

$$e^{-x_1} + e^{-x_2} \geq e^{-\sqrt{x_1x_2}}$$

are loc pentru orice $x_1, x_2 > 0$ astfel încât $\sqrt{x_1x_2} \geq 1$. Ipoteza $x_1x_2 \geq 1$ ne asigură de faptul că unul (măcar) dintre x_1 şi x_2 este mai mare sau egal cu 1 şi atunci inegalitatea rezultă din lemă, pentru $c = \sqrt{x_1x_2} \geq 1$, $u = x_1 \geq 1$ (să zicem) şi $v = x_2$.

Presupunem că afirmaţia din enunţ a fost demonstrată pentru $n-1 \geq 2$ numere $x_1, x_2, \ldots,$ $\ldots, x_{n-1} > 0$ care îndeplinesc condiţia $\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}} \geq (n-2)^{1-\frac{2}{n-1}}$ şi considerăm n numere pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât $r = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geq (n-1)^{1-\frac{2}{n}}$. Să notăm cu

$$p_j = \sqrt[n-1]{\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_j}},$$

unde $1 \leq j \leq n$ şi să presupunem, fără a restrânge generalitatea, că p_1 este cel mai mare dintre numerele p_j.

Avem
$$p_1^n \geq p_1 p_2 \cdots p_n = r^n$$
deci $p_1 \geq r$.

Atunci avem şi
$$p_1 = \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \geq (n-1)^{1-\frac{2}{n}} > (n-2)^{1-\frac{2}{n-1}}$$
(ultima inegalitate, fiind echivalentă cu
$$(n-1)^{(n-1)(n-2)} > (n-2)^{n(n-3)},$$
se justifică imediat), deci pentru numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ se poate aplica ipoteza de inducţie.

Aceasta înseamnă că avem inegalitatea
$$e^{-x_1} + e^{-x_2} + \cdots + e^{-x_{n-1}} \geq (n-1)e^{-p_1}$$
care, bineînţeles, implică
$$e^{-x_1} + e^{-x_2} + \cdots + e^{-x_{n-1}} + e^{-x_n} \geq (n-1)e^{-p_1} + e^{-x_n}.$$

Cum însă $p_1^{n-1} x_n = r^n$, $r \geq (n-1)^{1-\dfrac{2}{n}}$ şi $p_1 \geq r$ nu ne mai rămâne decât să aplicăm lema pentru a deduce
$$(n-1)e^{-p_1} + e^{-x_n} \geq ne^{-r},$$
ceea ce, evident, încheie demonstraţia.

Soluţie dată de *Marius Olteanu*, inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea. Putem scrie inegalitatea sub forma
$$+f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) \geq n \cdot f\,\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$
unde $f(t) = e^{-t}$, $t > 0$, iar $a_i = x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Funcţia $f_1(u) = f(e^u) = e^{-e^u}$ are, pe $(0, \infty)$, derivata secundă $f_1''(u) = (e^u - 1)\, e^{u - e^u}$.

Avem, $r > 0$, iar
$$\ln r \geq \ln\left[(n-1)^{\frac{n-2}{n}}\right] = \frac{n-2}{n} \cdot \ln(n-1) \geq 0,$$
$n \geq 2$, de unde
$$f_1''(u) \geq 0$$
pentru orice $u \geq \ln r \geq 0$, deci $f_1(u)$ este concavă pentru $u \geq \ln r$.

Conform „Right Convex Function Corolary“ ([1], [2]) este suficient să arătăm că
$$(n-1)e^{-x} + e^{-y} \geq n \cdot e^{-r},$$
pentru $x \geq y > 0$ şi $x^{n-1} \cdot y = r^n$.

Fie $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$,
$$g(x) = (n-1)e^{-x} + e^{-y},$$
cu $y = \dfrac{r^n}{x^{n-1}}$.

Avem
$$\frac{x^n - e^y}{n-1} \cdot g'(x) = r^n - x^n \cdot e^{y-x}.$$

Semnul funcţiei $g'(x)$ este dat de semnul funcţiei $g_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = r^n - x^n \cdot e^{y-x}$. Deoarece $e^{y-x} \cdot g_1'(x) = x^n - nx^{n-1} + (n-1)r^n$, rezultă că, la rândul lui, semnul funcţiei $g_1(x)$ este dat de semnul funcţiei $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de
$$h(x) = x^n - nx^{n-1} + (n-1)r^n.$$

Avem $h'(x) = nx^{n-2}(x - n + 1)$.

Din tabelul:

x	0				$n-1$				$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$h(n-1)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

,

deducem că
$$h(x) \geq h(n-1)$$
pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Dar $h(n-1) = \left[r^n - (n-1)^{n-2}\right] \geq 0$, deoarece $r^n \geq (n-1)^{n-2}$ (conform ipotezei), de unde $h(x) \geq 0$, deci $g'(x) \geq 0$.

Prin urmare $g_1(x)$ este crscătoare pe $(0, \infty)$, deci
$$g_1(x) \geq g_1(r) = r^n \left(1 - e^{y-x}\right) \geq 0,$$
deoarece $e^{y-x} \leq 1$, pentru orice $x \geq y$.

Aşadar, $g_1(x) \geq 0$ pentru orice $x \geq r$, de unde $g'(x) \geq 0$, pentru orice $x \geq r$.

Drept urmare $g(x)$ este crescătoare pe $[r, \infty)$, deci $g(x) \geq g(r) = n \cdot e^{-r}$, adică
$$(n-1)e^{-x} + e^{-y} \geq ne^{-r},$$
pentru orice $x \geq r \geq y > 0$.

Bibliografie

[1] V. Cârtoaje, *Algebraic inequalities – old and new methods*, Editura GIL, Zalău, pag. 146, 2006.

[2] V. Cârtoaje, *A generalization of Jensen's Inequality*, G.M.-A 2/2005

231. *If Γ denote the Euler's Gamma function, then for all $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$ $(n \geq 2)$ and for all positive integer $k \geq 1$ the following inequality holds*
$$\left(\frac{\Gamma(k+x_2)}{\Gamma(k+x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} \left(\frac{\Gamma(k+x_3)}{\Gamma(k+x_2)}\right)^{\frac{1}{x_3-x_2}} \cdots \left(\frac{\Gamma(k+x_n)}{\Gamma(k+x_{n-1})}\right)^{\frac{1}{x_n-x_{n-1}}} < (k+1)^{n-1}.$$[1)]

Mihály Bencze

Author's Solution. Define for $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = \dfrac{(k+1)^x}{\Gamma(k+x)}$. Taking logarithm and differentiating yields
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(k+1) - \Psi(k+x),$$
where $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

It is well known that the psi function Ψ is strictly increasing on $(0, +\infty)$ and
$$\Psi(x) = \ln x - \frac{1}{2x} - 2\int_0^\infty \frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)(e^{2\pi t}-1)},$$
hence
$$\Psi(k+x) \leq \Psi(k+1) < \ln(k+1),$$
which implies $f'(x) > 0$, for $0 \leq x \leq 1$.

Therefore f is increasing on $[0,1]$.

If $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1$, then $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \ldots \leq f(x_n)$.

Hence
$$\frac{(k+1)^{x_1}}{\Gamma(k+x_1)} \leq \frac{(k+1)^{x_2}}{\Gamma(k+x_2)}, \quad \text{or} \quad \left(\frac{\Gamma(k+x_2)}{\Gamma(k+x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}} \leq k+1$$
$$\frac{(k+1)^{x_2}}{\Gamma(k+x_2)} \leq \frac{(k+1)^{x_3}}{\Gamma(k+x_3)}, \quad \text{or} \quad \left(\frac{\Gamma(k+x_3)}{\Gamma(k+x_2)}\right)^{\frac{1}{x_3-x_2}} \leq k+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{(k+1)^{x_{n-1}}}{\Gamma(k+x_{n-1})} \leq \frac{(k+1)^{x_n}}{\Gamma(k+x_n)}, \quad \text{or} \quad \left(\frac{\Gamma(k+x_n)}{\Gamma(k+x_{n-1})}\right)^{\frac{1}{x_n-x_{n-1}}} \leq k+1$$

[1)] Precizarea că inegalitatea este, de fapt, strictă, a fost făcută de dl. inginer *Marius Olteanu*. (N.R.)

After multiplication we get

$$\left(\frac{\Gamma(k+x_2)}{\Gamma(k+x_1)}\right)^{\frac{1}{x_2-x_1}}\left(\frac{\Gamma(k+x_3)}{\Gamma(k+x_2)}\right)^{\frac{1}{x_3-x_2}}\cdots\left(\frac{\Gamma(k+x_n)}{\Gamma(k+x_{n-1})}\right)^{\frac{1}{x_n-x_{n-1}}}\leq(k+1)^{n-1}.$$

Nota redacţiei. Soluţii corecte ale problemei au mai dat domnii *Nicuşor Minculete* de la Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir din Braşov şi *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea. Dl. *Nicuşor Minculete* specifică şi faptul că un minorant al expresiei din enunţ este „$(k-1)^{n-1}$“.

232. *Dacă* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $A^m=(-1)^mI_n$ *cu* $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$, *atunci*:

$$n\leq\operatorname{rang}(I_n+A)+\operatorname{rang}(I_n+\varepsilon A)+\ldots+\operatorname{rang}(I_n+\varepsilon^{m-1}A)\leq(m-1)n,$$

unde $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{m}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{m}$.

Nicolae Pavelescu

Soluţia autorului. Se arată cu uşurinţă că are loc egalitatea

$$\prod_{k=0}^{m-1}(X+\varepsilon^k\cdot Y)=X^m-(-Y)^m,$$

pentru orice $X,Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu $XY=YX$.

Folosind acest rezultat se obţine:

$$\prod_{k=0}^{m-1}(I_n+\varepsilon^k\cdot A)=I_n-(-1)^m\cdot A^m=0_n.$$

De aici şi din inegalitatea lui *Sylvester*, anume

$$\operatorname{rang}(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n)\geq\operatorname{rang}(A_1+\operatorname{rang}A_2+\ldots+\operatorname{rang}A_n-(m-1)\cdot n,$$

se obţine inegalitatea din dreapta propusă în enunţ, anume

$$0=\operatorname{rang}0_n=\operatorname{rang}\left(\prod_{k=0}^{m-1}(I_n+\varepsilon^k\cdot A)\right)\geq\sum_{k=0}^{m-1}\operatorname{rang}(I_n+\varepsilon^k\cdot A)-(m-1)n.$$

Pentru egalitatea din stânga, avem

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(I_n+\varepsilon^k\cdot A\right)=m\cdot I_n+\left(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{m-1}\right)\cdot A=m\cdot I_n.$$

Trecând la ranguri, obţinem:

$$\operatorname{rang}\left(\sum_{k=0}^{m-1}(I_n+\varepsilon^k\cdot A)\right)=\operatorname{rang}(m\cdot I_n)=n.$$

De aici folosind faptul că rangul sumei nu depăşeşte suma rangurilor, se obţine inegalitatea propusš.

Observaţie. În cazul particular $m=2$ şi în ipoteza $A^2=I_n$, se obţine egalitatea

$$\operatorname{rang}(I_n+A))+\operatorname{rang}(I_n-A)=n,$$

adică problema **497**, pag. 70 din cunoscuta carte „Recueil d'exercicesd'algèbre superieure“ a autorilor *D. Fadeev* şi *I. Sominski* (éditions MIR-Moscou, 1977).

Nota redacţiei. O soluţie corectă a problemei a mai dat dl. profesor *Nicuşor Minculete* de la Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir din Braşov, precum şi dl. profesor *Mihai Tetiva* de la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca Codreanu din Bârlad.

Dl. inginer *Marius Olteanu* ne semnalează faptul că problema se poate găsi rezolvată, la paginile 3-4 din „Revista matematică din Vâlcea“, anul I, nr. 1-2/2005. Vom menţiona însă că problema se afla în portofoliul nostru editorial cu mult timp înainte de a fi publicată în revista vâlceană, motivul nepublicării fiind lipsa de spaţiu. Deci nu există nicio culpă a redacţiei şi atât mai puţin a autorului.

Leonhard Euler (1707-1783)[1)]

DE ION CHIŢESCU

I. Introducere

La 15 aprilie 2007 s-au împlinit 300 de ani de la naşterea marelui matematician elveţian *Leonhard Euler*.

Ziua naşterii lui – 15 aprilie 1707 – este o dată importantă în istoria umanităţii şi împlinirea a 300 de ani de la această zi ne face să ne înclinăm încă o dată în faţa copleşitoarei personalităţi a lui *Euler* şi ne îndeamnă să ne gândim cu modestie şi respect că istoria ştiinţei şi culturii au făcut-o titanii.

Euler era elveţian. Această mică ţară – Elveţia – a dat omenirii câteva mari personalităţi. Vom cita dintre acestea: dinastia de matematicieni şi fizicieni *Bernoulli*, filozoful *Jean-Jacques Rousseau*, marele pedagog *Jean Henri Pestalozzi* şi alţii. Elveţia a mai dat lumii rigoarea şi precizia simbolizate de inegalabilele ceasuri elveţiene, precum şi spiritul de onoare şi fidelitate împinse până la sacrificiul suprem simbolizate de garda elveţiană.

Pentru noi, cei care lucrăm în domeniul matematicii, Elveţia a dat omenirii mai presus de orice pe *Leonhard Euler*. Cine nu a auzit de *Euler*? Ne-am întâlnit cu toţii în liceu cu dreapta lui *Euler*, cu cercul lui *Euler*. Poate că nu am ştiut, dar câteva simboluri curente au fost încetăţenite în matematică de *Euler*: e, i, π, $\sum$ şi $f(x)$.

Se spune despre *Euler* că a fost cel mai mare matematician al secolului al XVIII-lea. Desigur acest gen de clasificări este întotdeauna discutabil. Este însă sigur că *Euler* este matematicianul cu cea mai întinsă operă din istorie.

Gustav Eneström listează 850 de titluri de memorii ale lui *Euler*. Academia de Ştiinţe a Elveţiei a înfiinţat în anul 1907 (cu prilejul bicentenarului naşterii) Comisia Euler, care avea ca sarcină publicarea întregii opere a lui *Euler*, împreună cu corespondenţa sa, manuscrisele sale şi jurnalele sale. Această intreprindere a necesitat munca a sute de matematicieni şi admiratori ai lui *Euler* din întreaga lume. Publicarea operelor complete ale lui *Euler* a început în 1911 şi a fost oprită înainte de a se putea publica totul. Publicarea a fost reluată acum câţiva ani şi este, acum, aproape completă. Ediţia (colecţia) actuală beneficiază la fiecare volum de introduceri substanţiale şi date scrise de mari specialişti. Numărul de pagini al fiecărui volum variază între 300 şi 600. Până în prezent au fost publicate circa 30000 de pagini. Colecţia actuală la care facem referire se numeşte Opera Omnia (Opera întreagă) şi este divizată în 4 serii. Iată numele acestor serii:

Series prima: Opera mathematica
Series secunda: Opera mechanica et astronomica
Series tertia: Opera physica. Miscellanea
Series quarta A: Commercium epistolicum
Series quarta B: Manuscripta

Referitor la Opera Omnia menţionăm că:

a) Publicarea colecţiei a început la Editura B. G. Teubner (Leipzig şi Berlin). Actualmente, publicarea este continuată de Editura Birkhauser (Boston, Basel).

b) Mai lipsesc până la editarea completă câteva volume din seriile a IV-a A şi a IV-a B.

Statisticile care urmează pot fi de oarecare interes, descriind opera lui *Euler* într-un sens mai precis.

[1)] Prezentul text reprezintă conferinţa de deschidere ţinută de autor – decanul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti – cu prilejul deschiderii Sesiunii Ştiinţifice aniversare „Leonhard Euler – 300 de ani de la naştere“. (N.R.)

Productivitate pe ani

Perioadă	Nr. Lucrări
1725-1734	35
1735-1744	50
1745-1754	150
1755-1764	110
1765-1774	145
1775-1783	270

Repartiţia pe discipline

Algebră şi teoria numerelor, analiză	40%
Mecanică şi fizică	28%
Geometrie (incluzând trigonometrie)	18%
Astronomie	11%
Teorie navală, artilerie şi arhitectură	2%
Filozofie, teorie muzicală, teologie	1%

Repartiţia pe discipline de matematică pură

Algebră, combinatorică şi teoria probabilităţilor	10%
Teoria numerelor	13%
Fundamentele analizei şi calcul diferenţial	7%
Serii	13%
Calcul integral	20%
Ecuaţii diferenţiale	13%
Calculul variaţiilor	7%
Geometrie (inclusiv geometrie diferenţială)	17%

Euler a reprezentat o piatră de hotar în dezvoltarea matematicii şi a învăţământului matematic. Cărţile sale, caracterizate prin simplitate, claritate şi forţă emoţională de comunicare au reprezentat primele manuale în sensul modern al cuvântului. *Euler* a devenit primul profesor al Europei nu numai în timpul său, ci şi în secolul al XIX-lea. *Gauss* a spus : „Studiul operelor lui Euler rămâne cea mai bună instrucţie în diferite ramuri ale matematicii şi nu poate fi înlocuit cu nimic altceva".

Putem vorbi de un „fenomen Euler"? Credem că da. Acest fenomen are următoarele componente:

a) O cultură vastă, cu tentă clasicizantă, incluzând cunoaşterea multor limbi străine, printre care latina şi greaca. Majoritatea operei lui *Euler* a fost scrisă în limba latină.

b) O memorie fenomenală. Se pare că *Euler* reţinea aproape totul. De exemplu, chiar la o vârstă avansată, era capabil să recite întreaga Eneidă a lui *Virgiliu*, în limba latină.

c) O forţă de calcul uluitoare (făcea calcule mintale uriaşe fără greşeală). Astronomul francez *Francis Arago* spunea: „Euler calculează aşa cum oamenii respiră şi vulturii zboară în văzduh."

d) O capacitate extraordinară de concentrare. Atunci când medita asupra unui subiect, zgomotul şi dezordinea dimprejur nu îl deranjau deloc. *Thiébault*, colegul său de la Academia din Berlin, spunea: „Un copil pe genunchi, o pisică pe spinare – iată cum îşi scria el opera nemuritoare."

e) Capacitate de a munci în mod continuu şi calm, fără întrerupere, ca mod firesc de viaţă.

Toate aceste componente completează în mod armonios geniul matematic al acestui titan al gândirii.

II. Viaţa

1. Copilăria, anii de formare

Leonhard Euler s-a născut la Basel (Bâle), Elveţia, în data de 15 aprilie 1707 şi a murit la Sankt Petersburg (Rusia) în data de 18 septembrie 1783. A avut două surori mai mici: *Anna Maria* şi *Maria Magdalena*.

Tatăl său, *Paul Euler*, era pastor luteran, cu studii de teologie la Universitatea din Basel, dar şi cu studii de matematică (audiase cursurile lui *Jacob Bernoulli*). De altfel, în vremea studenţiei lor la Basel, *Paul Euler* şi *Johann Bernoulli* au locuit în casa lui *Jacob Bernoulli*, care era şi el fiu de pastor protestant. *Johann Bernoulli* avea să devină unul dintre cei mai importanţi matematicieni ai Europei, după moartea lui *Newton* şi avea să aibă o influenţă decisivă asupra carierei lui *Leonhard Euler*.

Cu această ocazie, menţionăm imensa importanţă pe care a avut-o dinastia *Bernoulli* asupra vieţii şi a operei lui *Euler*. *Daniel* şi *Nicolaus*, fii lui *Johann Bernoulli*, aveau să-i fie cei mai buni prieteni.

Mama lui *Euler*, *Margaretha Brucker* era fiica unui pastor protestant. Evident, tânărul *Euler* a primit o educaţie profund religioasă şi foarte solidă, bazată pe studii clasice serioase. Această dublă trăsătură a educaţiei l-a marcat profund, definitiv, pe *Euler*, care a fost un creştin practicant, chiar teoretician al creştinismului şi, de asemenea, un mare om de cultură, adept al clasicismului, cu solide consecinţe de teologie, medicină, astronomie, fizică şi limbi străine.

Când micul *Euler* a împlinit un an, familia s-a mutat în oraşul Riehen, lângă Basel, unde *Euler* şi-a petrecut majoritatea copilăriei. Graţie educaţiei sale matematice, *Paul Euler* l-a putut introduce de timpuriu pe *Leonhard* în lumea miraculoasă a matematicii, predându-i, în acelaşi timp şi elemente de bază ale altor discipline. Trebuie menţionat că *Paul Euler* şi-a dorit cu ardoare ca fiul său să urmeze teologia şi l-a îndrumat în acest sens, reuşind ulterior să înţeleagă că vocaţia acestuia era matematica.

A urmat plecarea tânărului *Leonhard Euler* la şcoală, în oraşul său natal, Basel. Aici el a locuit la bunica dinspre partea mamei. În şcoala de la Basel se preda extrem de puţină matematică (practic aproape de loc). În aceste condiţii, *Leonhard* şi-a potolit setea de matematică pe cont propriu, luând meditaţii. La vârsta de 13 ani (1720) *Leonhard Euler* se înscrie la Universitatea din Basel cu scopul declarat de a se pregăti pentru cariera teologică. În acest sens urma ca, în universitate, să primească, mai întâi o pregătire de bază teologică şi filozofică, completată cu cunoştinţe de limbi orientale şi istorie.

Foarte curând, în timpul studenţiei, *Leonhard Euler* şi-a dat seama că adevărata sa vocaţie este matematica. Acest fapt a fost recunoscut imediat de *Johann Bernoulli* care, deşi era foarte ocupat, i-a indicat cărţile pe care era necesar să le citească, l-a introdus în problemele moderne de cercetare matematică şi l-a primit pentru sfaturi în ceea ce priveşte obstacolele întâlnite. Cităm din *Euler*: „Dacă întâlneam unele obstacole sau dificultăţi, mi s-a dat permisiunea să îl vizitez de câte ori voiam în fiecare duminică după amiază şi el îmi explica cu multă amabilitate tot ceea ce eu nu puteam să înţeleg.“

În 1723, *Leonhard Euler* absolvă facultatea la Basel, obţinând titlul de Master în filozofie. În teza de master, *Eul*er compară şi pune în antiteză ideile filozofice ale lui *Descartes* şi *Newton*.

În toamna lui 1723, *Leonhard Euler*, respectând voinţa tatălui său, începe studiile de teologie la Universitatea din Basel. Studiile intense de teologie, limba greacă, limba latină şi ebraică necesare facultăţii de teologie îl îndepărtau pe *Euler* de matematică. La rugămintea sa, *Johann Bernoulli*, care, după cum am mai spus, era prieten cu tatăl său, l-a convins pe acesta să îl lase pe *Euler* să părăsească teologia şi să studieze matematica.

Euler reuşeşte să încheie studiile de matematică la Universitatea din Basel în 1726. În acest răstimp, sub atenta îndrumare a lui *Johann Bernoulli*, Euler a citit un material enorm, incluzând lucrări ale unor coloşi ai matematicii şi mecanicii ca *Descartes*, *Newton*, *Jacob Bernoulli*, *Taylor*, *Wallis*, *Galilei*, *Varignon*. Deja în 1726, *Euler* scrisese o lucrare privind curbe izocrone în medii rezistente.

În 1727 a publicat un articol despre traiectorii reciproce, pe care l-a trimis să concureze pentru marele premiu la un concurs al Academiei din Paris, dedicat modalităţii optime de aranjare a catargelor pe un vapor. Premiul întâi la acest concurs l-a obţinut

Piere Bourguer, cel care, ulterior, avea să fie supranumit „tatăl arhitecturii navale". Premiul al doilea a fost acordat lui *Euler*. De notat că *Euler* a obţinut în cariera sa de 12 ori premiul Academiei din Paris.

Tot în 1727, *Euler* şi-a susţinut teza de doctorat cu titlul „De sono" (Despre acustică). Pe baza acestei teze, tânărul *Euler* (20 ani) a solicitat un post de profesor de fizică la Universitatea din Basel, post vacant prin decesul titularului, pe care nu l-a obţinut. Unii spun că motivul major al respingerii ar fi fost tinereţea solicitantului.

2. Prima perioadă de la Sankt Petersburg

În faţa situaţiei create prin neobţinerea catedrei de la Basel, *Euler* a trebuit să ia o decizie hotărâtoare pentru viitorul său. În acest sens, o ocazie neaşteptată a apărut prin moartea, în urma unei apendicite, a prietenului său *Nicolaus Bernoulli* II la Sankt Petersburg în iulie 1726, ceea ce a creat un post liber la o catedră de aplicaţii ale matematicii şi mecanicii în fiziologie acolo. *Euler* acceptă acest post în noiembrie 1726, punând condiţia ca să pornească spre Rusia abia în primăvara lui 1727. Motivele acestei amânări au fost duble: pe de o parte, *Euler* dorea să se pregătească pentru noul post, care era foarte pretenţios prin specificul său; pe de altă parte *Euler* a sperat până în ultimul moment să obţină, totuşi, postul de profesor la catedra de fizică a Universităţii din Basel, pe care l-a dorit foarte mult. În acest sens, *Euler* a făcut o ultimă încercare scriind un articol, devenit ulterior clasic despre acustică. Totul a fost în zadar.

Să descriem puţin contextul istoric al acestui moment din viaţa lui *Euler*. În primul rând trebuie spus că prietenii săi *Nicolaus* şi *Daniel Bernoulli* erau în Rusia din 1725, lucrând ca profesori la Academia de Ştiinţe din Sankt Petersburg. În acel moment Rusia era în epoca imediat următoare lui *Petru cel Mare*, despotul luminat care a domnit între anii 1682-1725 şi a modernizat Rusia. El a fondat în anul 1703 oraşul Sankt Petersburg (ulterior Leningrad şi revenit astăzi la denumirea iniţială de Sankt Petersburg). *Petru cel Mare* a adus în Rusia mulţi savanţi fundamentali ai epocii, punând bazele culturii occidentale în Rusia. Urmând ideile lui *Leibniz*, *Petru cel Mare* pregătea apariţia primei instituţii ştiinţifice a Rusiei: Academia de Ştiinţe din Sankt Petersburg. Moartea sa, survenită în 1725, a făcut ca văduva sa, împărăteasa *Ecaterina* I să aibă onoarea de a deschide această Academie, continuând politica culturală a soţului său. *Ecaterina* I a domnit apoi singură între anii 1725-1727.

La 5 aprilie 1727, sub domnia *Ecaterinei* I, *Euler* a plecat din Basel spre Sankt Petersburg. În vremea aceea, călătoriile nu erau deloc rapide. Să-l urmăm pe *Euler* în drumul său. Mai întâi a călătorit cu vaporul pe Rin. Apoi a traversat statele germane cu un vagon de poştă. În fine, îmbarcat la Lübeck, *Euler* ajunge pe vapor la Sankt Petersburg la data de 17 mai 1727. Din păcate, împărăteasa *Ecaterina* I a murit la foarte scurt timp după sosirea lui Euler la Sankt Petersburg. Această moarte nu a fost de bun augur pentru Academia de Ştiinţe din Sankt Petersburg, deoarece anturajul defunctei împărătese nu agrea prea mult pe savanţii străini de la Academie.

Din punct de vedere istoric, pentru Rusia a urmat o perioadă tulbure. Pe tron a fost urcat în 1727 *Petru al II-lea* (în vârstă de 11 ani) care a domnit (evident sub tutelă) până în 1730, când a murit în mod suspect. *Ana Ivanovna*, nepoata lui *Petru cel Mare*, i-a succedat la tron. Ea a guvernat Rusia până la moarte, care a survenit în 1740. A fost urmată la tron de tânărul ţar *Ivan al VI-lea*, care a guvernat sub regenţa mamei sale *Ana Leopoldovna* numai un an. Ei au fost înlăturaţi de la putere de fiica lui *Petru cel Mare*, *Elisabeta Petrovna*, care a domnit între anii 1741-1762. De menţionat că Universitatea din Moscova a fost înfiinţată în 1755, sub domnia ei. În 1762 a fost proclamat ţar *Petru al III-lea* care a fost asasinat în acelaşi an de soţia sa, care avea să devină marea ţarina *Ecaterina a II-a*, conducătoare de excepţie a Rusiei până în 1796.

Să revenim la *Euler*. La insistenţele lui *Daniel Bernoulli* şi *Jakob Hermann*, *Euler* a fost numit la departamentul de matematică şi fizică şi nu la departamentul de fiziologie, unde avusese prima numire. Trebuie să menţionăm că la Academia din Sankt Petersburg activau unii dintre cei mai străluciţi matematicieni ai epocii: *Daniel Bernoulli* (bun prieten cu *Euler*, cu multe preocupări de matematică aplicată), geometrul *Jakob Hermann* (rudă cu *Euler*), *Christian Goldbach* (specialist în mai multe ramuri ale matematicii, autor al faimoasei conjecturi care-i poartă numele) şi mulţi alţii. De altfel, Academia era foarte elitistă, având un număr mic de studenţi admişi, care erau de un nivel foarte ridicat. Dotarea bibliotecii era excepţională, mare parte din cărţi fiind obţinute din donaţii ale curţii imperiale. Aceste circumstanţe făceau ca sarcinile didactice ale numeroşilor profesori ai Academiei să fie foarte reduse, ei putându-se dedica în linişte cercetării ştiinţifice în condiţii materiale excepţionale .

La Sankt Petersburg *Euler* a locuit împreună cu prietenul său *Daniel Bernoulli*, care nu s-a adaptat niciodată foarte bine la condiţiile din Rusia. Spre deosebire de *Daniel Bernoulli*, *Euler* (care era un mare poliglot) a învăţat foarte bine limba rusă şi s-a adaptat perfect Rusiei.

Urmărind cariera lui *Euler*, îl vedem devenind profesor de fizică la Academia de Ştiinţe în 1731. În 1733, *Daniel Bernoulli* părăseşte definitiv Rusia, nemulţumit de intrigile continue şi de ostilitatea cu care era privit de unii colegi şi unii reprezentanţi ai autorităţii statale. Postul de şef al departamentului de matematică devine, astfel, vacant şi este ocupat de *Euler*.

La 7 ianuarie 1734, *Leonhard Euler* se căsătoreşte cu *Katharina Gsell*, care era elveţiană, fiica pictorului *Georg Gsell*, profesor la Gimnaziul Academiei din Sankt Petersburg.

Cu *Katharina*, *Euler* a avut 13 copii dintre care au reuşit să supravieţuiască peste perioada copilăriei numai 5. Numai 3 dintre aceştia i-au supravieţuit. Unul singur – *Johann Albrecht* – a devenit matematician.

Este poate, acum, momentul să spunem câteva cuvinte despre *Euler* – omul, calităţile şi cultura lui ieşite din comun. Era un om deosebit, sociabil şi optimist, în ciuda numeroaselor probleme de sănătate pe care le-a avut. Total lipsit de orice aroganţă, deşi conştient de marea sa valoare, era de o politeţe deosebită, cu maniere care trădau educaţia aleasă pe care o primise.

A fost întotdeauna generos cu ideile sale, împărtăşind altor matematicieni multe din ideile şi descoperirile sale, chiar înainte de a le publica. Nu a căutat niciodată să-şi însuşească ideile sau descoperirile altora. Iată cum vorbea *Euler* despre faimoasa formulă sumatorie care avea să poarte numele de formula *Euler-MacLaurin*: „Nu am niciun fel de dorinţă de a scădea cu ceva faima celebrului domn MacLaurin, deoarece domnia sa a descoperit aceeaşi teoremă de sumare înaintea mea şi prin urmare merită să fie numit prim descoperitor“.

Revenind la cariera ştiinţifică a lui *Euler*, vom menţiona faptul că a fondat revista Commentarii Academiae Scientiarum Imperiales Petropolitanae. De menţionat că reviste ar fi putut exista numai cu articolele lui *Euler*, care lucra într-un ritm incredibil.

Din cauza muncii excesive, la 28 de ani (1735), *Euler* a suferit o congestie cerebrală (unii autori acuză şi condiţiile climatice din Rusia sau, chiar o eventuală cataractă) pierzându-şi ochiul drept. „Voi avea mai puţine distracţii“ a exclamat savantul după pierderea ochiului şi a continuat să muncească cu aceeaşi pasiune, în acelaşi ritm infernal, în ciuda sfaturilor medicilor, care i-au recomandat odihnă. Menţionăm că unii biografi cred că munca excesivă pusă în slujba cartografierii teritoriului Rusiei ar fi fost la originea pierderii ochiului.

În anii 1738 şi 1740 *Euler* a obţinut Marele Premiu al Academiei din Paris, devenind una dintre cele mai importante figuri ale matematicii mondiale.

Anii 1927-1741 (14 ani) au fost prima etapă de şedere la Sankt Petersburg.

3. Etapa Berlin

Ajungem în anul de graţie 1741. La Berlin, pe tronul Prusiei, era regele *Frederic al II-lea Cel Mare* (supranumit uneori „Unicul“). Putem spune cu tot curajul că el a reprezentat modelul de despot luminat. Protector al artelor şi ştiinţelor, s-a înconjurat de unii dintre cei mai mari artişti şi oameni de ştiinţă ai Europei pe care îi primea adesea la minunatul castel de vară Sans Souci. De asemenea *Frederic al II-lea* a fost un mare strateg, câştigând numeroase bătălii. Aceste calităţi au fost dublate şi de un foarte bun spirit administrativ. Desigur, i s-ar putea imputa vanitatea ieşită din comun, precum şi excesiva admiraţie pentru limba şi cultura franceză. În acest sens este de remarcat faptul că *Frederic al II-lea* şi-a scris „Memoriile“ în limba franceză.

În acest timp, în Rusia, situaţia politică era tulbure. Începuseră să se manifeste sentimente de xenofobie, savanţii străini de la Academia de Ştiinţe din Sankt Petersburg resimţind o oarecare nesiguranţă. Moartea ţarinei *Ana Ivanovna*, în 1740 a sporit starea de incertitudine din ţară. Consecvent cu politica sa de atragere a marilor figuri ale artei şi ştiinţei, *Frederic al II-lea* îl invită în mod imperativ pe *Euler* să vină la Berlin, în 1741. *Euler* acceptă invitaţia, pleacă din Sankt Petersburg la 19 iunie 1741 şi ajunge la Berlin la 25 iulie 1741, unde este numit profesor la nou înfiinţata Academie Prusiană (viitoarea Academie din Berlin), stabilindu-se cu întreaga familie. Obţine imediat poziţia de director al departamentului de matematică. De remarcat că preşedinte al Academiei a fost numit mecanicianul francez *Maupertuis*, situat cu mult sub *Euler* în clasificarea neoficială a savanţilor epocii. Cei doi au fost însă buni prieteni şi *Euler* l-a înlocuit de multe ori de facto.

Euler avea să rămână la Berlin 25 de ani, până în 1766. Activitatea sa de la Berlin a fost uriaşă, am putea spune incredibilă. Pe lângă cercetările de matematică, finalizate cu un număr fenomenal de articole (380) şi cărţi, *Euler* a mai avut şi alte numeroase activităţi, dintre care cităm: a supervizat observatorul astronomic şi grădina botanică; a supervizat problemele financiare ale Academiei; a înlesnit publicarea de calendare şi hărţi geografice, din a căror vânzare s-au obţinut venituri serioase pentru Academie; a conceput baza teoretică a corectării nivelului apei în Canalul Finow; a supervizat munca la pompele şi conductele sistemului hidraulic al castelului Sans Souci. Referitor la această ultimă activitate este, poate anecdotic, să amintim că *Frederic al II-lea* se plângea într-o scrisoare către *Voltaire* de prestaţia lui *Euler*, care ar fi lucrat mai mult ca un geometru decât ca un inginer. Să mai adăugăm la aceste activităţi că *Euler* a fost consilier al guvernului pentru loteria de stat, asigurări, pensii şi artilerie. A fost, poate, cel mai activ membru al comitetului ştiinţific al Academiei, ocupându-se de bibliotecă şi publicaţiile ştiinţifice.

Pe bună dreptate ne întrebăm: când a mai putut *Euler* ca în această perioadă să producă 380 de articole de cercetare, precum şi nenumărate cărţi în următoarele domenii: calcul variaţional, calculul orbitelor planetelor, artilerie şi balistică, construcţie de nave, navigaţie, mişcarea lunii, calcul diferenţial. O carte cu un caracter aparte este „Scrisorile lui Euler asupra unor subiecte variate, adresate unei prinţese germane“ (3 volume). În această carte, *Euler*, care fusese numit şi tutore al prinţesei de Anhalt-Dessau (nepoata regelui *Frederic al II-lea*) strânge circa 200 de scrisori către prinţesă, în care expune în mod popular chestiuni privind matematica şi fizica, dar şi religia. Cartea va oferi o privire asupra personalităţii lui *Euler*. De menţionat că acestă carte a cunoscut un succes enorm fiind mai citită decât toate operele matematice ale lui *Euler*, în întreaga Europă şi în Statele Unite. Această carte ilustrează pe deplin talentul inegalabil de mare comunicator al lui *Euler*.

În acest răstimp, *Euler* a păstrat legăturile cu Rusia, rămânând membru al Academiei de Ştiinţe din Sankt Petersburg, căreia *Euler* i-a trimis spre publicare aproximativ jumătate din scrierile sale, fapt pentru care a primit în mod continuu pensie din partea sus-numitei Academii.

Ne apropiem acum de sfârşitul perioadei berlineze din viaţa lui *Euler*. La acest sfârşit au contribuit doi factori: unul negativ şi altul pozitiv.

Factorul negativ, care trebuie menţionat din motive de onestitate istorică, nu face cinste unei mari personalităţi din istoria culturii. Unul din cei mai admiraţi şi iubiţi oameni de cultură aduşi la curte de *Frederic cel Mare* era *Voltaire*, care exercita o poziţie dominantă fiind un fel de favorit al monarhului. Intrigile lui *Voltaire*, combinate cu dispreţul afişat de acesta faţă de modul onest şi direct de comportament al lui *Euler*, l-au afectat profund pe acesta.

Factorul pozitiv a fost reprezentat de dorinţa puternică a marii împărătese *Ecaterina a II-a* a Rusiei de a-l readuce pe *Euler* în Rusia, în cadrul eforturilor ei (încununate de succes) de revenire la gloria anterioară a Academiei de Ştiinţe de la Sankt Petersburg.

În acest sens, ambasadorul rus la Berlin a fost acreditat să accepte absolut toate condiţiile impuse de *Euler* pentru întoarcere.

În 1766, *Euler* decide să părăsească Berlinul pentru a reveni la Sankt Petersburg. *Frederic al II-lea* a fost profund şocat de această hotărâre a lui *Euler* şi, iniţial, nu i-a permis să plece. În urma presiunilor formidabile exercitate de ţarină şi în faţa hotărârii neclintite a lui *Euler*, *Frederic al II-lea* a cedat şi *Euler* a plecat spre Rusia în 1766, prin Polonia. În Polonia a fost primit cu mare fast şi respect de regele *Stanislas*. Întoarcerea la Sankt Petersburg a fost un adevărat triumf.

Menţionăm că succesorul lui *Euler* la Berlin a fos *Lagrange*.

4. A doua perioadă la Sankt Petersburg, ultimii ani

În 1766, la reîntoarcerea în Rusia, *Euler* era în vârstă de 59 de ani. Avea să mai trăiască acolo 17 ani, caracterizaţi de o productivitate extraordinară (aproape o jumătate a operei sale), dar marcaţi din nefericire, de pierderea completă a vederii şi alte nenorociri.

Munca istovitoare de zi cu zi i-a slăbit şi mai mult vederea care era deja afectată. În urma operaţiei nereuşite de cataractă, *Euler* orbeşte complet în 1766. Geniul său a făcut ca această tragedie să nu-i afecteze aproape de loc productivitatea matematică .

Este momentul să reamintim că *Euler* a fost unul din cei mai extraordinari calculatori ai tuturor timpurilor : era capabil să efectueze calcule uriaşe mintal, cu o rapiditate şi o precizie incredibile.

În plus, după cum am spus, memoria sa era fabuloasă. Combinând toate aceste utilităţi, *Euler* a continuat să creeze ajutat de fiii săi *Johann Albrecht Euler* (care devenise în 1766 profesor la catedra de fizică a Academiei de Ştiinţe din Sankt Petersburg, fiind apoi numit şi secretar al acesteia în 1769) şi *Cristoph Euler* (militar de carieră), precum şi de matematicienii *Krafft*, *Lexell* şi *Fuss*. Metoda de lucru era următoarea: *Euler* dicta (în special lui *Johann Albrecht*) şi în acelaşi timp, el purta discuţii matematice cu asistenţii săi, pe care uneori îi punea să îi completeze calculele.

Cu generozitate şi onestitate, maestrul i-a răsplătit pe discipoli pentru eforturile depuse în ajutorul său. De exemplu, *Johann Albrecht*, *Kraft* şi *Lexell* au fost creditaţi ca autori ai unei lucrări de 775 de pagini privind mişcarea lunii.

După pierderea completă a vederii au urmat alte nenorociri. În 1771, un incendiu i-a distrus casa. Intervenţia providenţială a artistului *Peter Grimm* din Basel l-a salvat pe *Euler* din mijlocul flăcărilor. Au ars aproape toate cărţile din casă dar, în mod miraculos, au putut fi salvate manuscrisele lui *Euler*.

În 1773, după o căsătorie care a durat 40 de ani, soţia lui *Euler*, *Katharina* trece în lumea drepţilor. Rămas văduv, *Euler* se recăsătoreşte în 1776 cu sora *Katharinei*, *Abigail Gsell*.

Leonhard Euler a murit la 18 septembrie 1783 la vârsta de 76 de ani. Iată cum descrie istoricul rus al ştiinţelor *A. P. Iuşkevici* (*Youschkevitch*) ultima zi din viaţa lui *Euler*: „În data de 18 septembrie 1783 Euler şi-a petrecut prima parte a zilei ca de obicei. A făcut lecţia de matematică cu nepoţii, a făcut câteva calcule privind mişcarea baloanelor, cu creta pe două table; apoi a discutat cu Lexell şi Fuss despre recent descoperita planetă Uranus. În jurul orei 5 după amiază a suferit o hemoragie cerebrală şi a mai apucat să murmure „Mor!“ înainte de a-şi pierde cunoştinţa. A murit în jurul orei 11 noaptea.“

Elogiul la moartea lui *Euler* a fost scris, din partea Academiei Franceze, de marchizul *de Condorcet* care a fost, ulterior, una din victimele terorii dezlănţuite de revoluţia franceză.

Euler este îngropat în celebra necropolă Nevskii Lavra din Sankt Petersburg. Sarcofagul în care odihneşe marele savant se găseşte într-unul din locurile sfinte ale Rusiei, alături de alte mari personalităţi, ca *Lomonosov* şi alţii.

III. Opera

Este foarte greu, dacă nu imposibil, să cuprinzi într-o conferinţă datele esenţiale privind geniala şi imensa operă a lui *Euler*. Voi încerca în cele ce urmează să mă achit de această sarcină quasi-imposibilă cu riscurile inerente ale unei selecţii eventual arbitrare şi superficiale.

Contribuţia lui *Euler* la Analiza Matematică a fost decisivă. Putem spune că Analiza Matematică a început cu *Euler*. *Euler* a conceput analiza ca studiu al funcţiilor.

Se ştie că există o dispută istorică în ceea ce priveşte primatul asupra introducerii analizei matematice ca disciplină între şcoala britanică (pentru care fondatorul analizei este *Isaac Newton*) şi şcoala germană (pentru care fondatorul analizei este *Gottfried Wilhelm Leibniz*). *Euler* a reuşit să contopească metoda fluxiunilor a lui *Newton* cu calculul diferenţial al lui *Leibniz*.

Cărţile de analiză al lui *Euler*, dinte care cităm pe cele mai faimoase: „Introductio in analysis infinitorum“ (în care apare celebra formulă $e^{i\pi} + 1 = 0$), „Institutiones calculi differentialis“ şi „Institutiones calculi integralis“ au reprezentat multă vreme sursa unică şi autorizată de învăţare a analizei matematice.

Euler s-a ocupat de derivatele parţiale mixte, intuind comutativitatea lor (criteriile *Young-Schwarz*) şi a descoperit criteriul ca o formă diferenţială să fie exactă (în limbaj arhaic „să fie diferenţială totală“).

A studiat probleme de maxim şi minim şi a utilizat în mod constant regulile lui *L'Hospital*.

Euler a introdus integralele care îi poartă numele (integralele euleriene, adică funcţiile beta şi gamma).

În teoria seriilor, *Euler* a avut realizări nenumărate şi remarcabile. A reuşit să calculeze $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ printr-o metodă profund neortodoxă (problema găsirii sumei acestei serii fusese studiată fără succes de *Leibniz*, *Stirling*, *De Moivre*, *Jakob*, *Johann* şi *Daniel Bernoulli*).

Cu metode similare, *Euler* a descoperit că $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$, $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$ şi $\zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$, generalizând apoi formula cu ajutorul numerelor lui *Bernoulli*.

A obţinut celebra formulă privind egalitatea între $\zeta(s)$ şi produsul numerelor de forma $\frac{1}{1-p^{-s}}$ cu p prime. A obţinut foarte multe dezvoltări în serie.

De asemenea, *Euler* s-a ocupat de metode de sumare pentru serii divergente sau foarte lent convergente (accelerarea convergenţei). A obţinut celebra constantă care îi poartă numele (limita şirului $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$).

Inspirat de o carte în două volume a lui *Fagnano*, *Euler* s-a ocupat de integralele eliptice (de altfel el a recunoscut mereu întâietatea lui *Fagnano* în acest domeniu) şi a creat, practic, teoria funcţiilor algebrice.

Euler a obţinut rezultate remarcabile în teoria fracţiilor continue.

Contribuţia lui *Euler* la teoria ecuaţiilor diferenţiale a fost covârşitoare. Îi datorăm rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, precum şi rezolvarea ecuaţiilor liniare de ordin 2 cu coeficienţi variabili. De asemenea, *Euler* a introdus factorul integrant. În fine, *Euler* a avut şi ideea metodei variaţiei constantelor.

Putem spune că *Euler* este fondatorul calculului variaţional dând celebrele ecuaţii *Euler-Lagrange* (descoperite independent de *Lagrange*).

În legătură cu geneza calculului variaţional trebuie să menţionăm că ea este datorată faimoasei probleme a brahistrocronei, propusă de *Johann Bernoulli*. Această problemă a fost rezolvată de mai mulţi matematicieni (se pare că *Newton* a rezolvat-o în aproximativ două ore). *Euler* a dat o teorie sistematică a rezolvării acestui tip de probleme fondând, după cum am spus, calculul variaţional. (A se vedea cartea sa „Methodus inveniendi lineas curvas"). Ulterior, *Lagrange* a intervenit, scriindu-i lui *Euler* şi introducând derivata variaţională şi metoda multiplicatorilor care îi poartă numele.

Euler a avut realizări remarcabile în geometrie (incluzând trigonometria). Nu vom vorbi despre aşa- zisa „geometria elementară", unde ne-a lăsat rezultate remarcabile – adevărate perle ale matematicii. Ne vom referi aici, în primul rând la faptul că *Euler* a introdus în mod riguros funcţiile trigonometrice, dând şi faimoasa formulă

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t.$$

În al doilea rând, *Euler* a început studiul teoriei suprafeţelor, investigând, între altele, curbura lor. A introdus geodezicele. Multe din rezultatele sale nu au fost publicate şi au fost redescoperite ulterior de *Gauss*. În fine, să nu uităm celebra formulă pe care i-o datorăm lui *Euler* privind legătura între numărul vârfurilor, muchiilor şi feţelor unui poliedru convex: $V + F = M + 2$.

Ajungem şi la teoria numerelor unde *Euler* ne-a lăsat o multitudine de rezultate fundamentale.

La *Euler*, teoria numerelor a fost strâns împletită cu Algebra, pentru care ne-a lăsat monogafia „Anleitung zur Algebra", în două volume. Această monografie a constituit, multă vreme, textul standard după care se învăţa algebra. De remarcat că în acest manual, *Euler* a introdus multe probleme pe care le-a rezolvat atunci când învăţa algebră în primii ani cu tatăl său (informaţie comunicată de prof. dr. *D. Vaida*). În sus-numita monografie figura şi formula binomului lui *Newton* cu exponent real (seria binomială).

Menţionăm că multe din rezultatele din teoria numerelor au fost obţinute pornind de la discuţiilor avute de *Euler* cu colegul său *Christian Goldbach* de la Academia de Ştiinţe de la Sankt Petersburg. De exemplu, acesta l-a incitat pe *Euler* să se ocupe de conjectura lui *Fermat* privind faptul că numerele de forma $2^{2^n} + 1$ sunt prime. *Euler* a demonstrat falsitatea conjecturii arătând că $2^{32} + 1$ se divide cu 641.

Studiile de teoria numerelor l-au condus pe *Euler* la introducerea funcţiei φ ($\varphi(n) =$ numărul acelor $1 \leq k < n$ prime cu n). Cu ajutorul lui φ, *Euler* a generalizat mica teoremă a lui *Fermat*. Legat de numele lui *Fermat*, menţionăm că *Euler* a demonstrat celebra sa conjectură („marea teoremă a lui Fermat") pentru $n = 3$.

Mai menţionăm că multe rezultate ale lui *Euler* în teoria numerelor sunt inspirate de lucrările lui *Fermat*. Anume, *Euler* a demonstrat sau a infirmat o mulţime de rezultate ale lui *Fermat* adnotate de acesta pe o ediţie franceză a cărţii „Arithmetica" a lui *Diofant*.

Alte rezultate ale lui *Euler* în teoria numerelor se referă la numerele care se pot reprezenta ca sume a două pătrate, legea reciprocităţii pătratice (pe care doar a intuit-o, demonstraţia fiind dată ulterior de *Gauss*), numere poligonale etc.

În legătură cu contribuţia lui *Euler* la teoria numerelor, trebuie spus că aceasta este cuprinsă 4 volume din Opera Omnia. Din acest motiv, putem spune că teoria numerelor a devenit o parte importantă a matematicii, graţie lui *Euler*.

Euler este şi fondatorul teoriei grafurilor. Naşterea acestei discipline coincide cu rezolvarea de către *Euler* a problemei celor şapte poduri din Königsberg (oraşul lui *Immanuel Kant*, astăzi Kaliningrad, enclavă rusă). Problema era de a străbate câte o singură dată toate cele şapte poduri de pe râul Pregel care trece prin Königsberg, cu întoarcere în punctul de start (recunoaştem problema determinării unui circuit hamiltonian).

Euler a fost unul dintre cei mai mari mecanicieni din istorie (includem aici şi mecanica cerească). Cartea sa „Mechanica" a dat un impuls hotărât mecanicii.

Fundamental, în ceea ce priveşte viziunea lui *Euler* asupra mecanicii, este faptul că, spre deosebire de predecesorii săi, el a folosit, în mod constant, analiza matematică.

În mecanica sistemelor rigide a determinat ecuaţia generală de mişcare a unui corp în jurul unui punct fix. A dat ecuaţia generală de mişcare a unui corp liber.

A fundamentat teoretic principiul minimei acţiuni al lui *Maupertius*.

A atacat problema celor trei corpuri.

A dat ecuaţiile generale de mişcare în hidrodinamică.

Menţionăm că la data morţii sale, *Euler* scria un tratat de hidromecanică.

S-a ocupat de hidrostatică în legătură cu proiectarea navelor.

În studiul mişcării unui punct material pe o suprafaţă el a folosit metoda geodezicelor.

În fundamentala carte „Theoria motus corporum solidorum", *Euler* descompunea mişcarea unui solid într-o mişcare rectilinie şi una de rotaţie, introducând cu această ocazie unghiurile care îi poartă numele.

Lucrările de mecanica fluidelor ale lui *Euler* sunt fundamentale (a dat ecuaţia de continuitate, ecuaţia de mişcare a unui fluid nevâscos incompresibil etc.). Metodele sale în acest domeniu erau uimitoare şi mult superioare predecesorilor săi *Bernoulli*, *Clairaut* şi *D'Alembert*.

În astronomie (mecanica cerească) *Euler* a obţinut rezultate privind calculul orbitelor cometelor, calculul paralaxei Soarelui etc. (a se vedea cărţile „Theoria Motus Lunaris" şi „Theoria Motuum Planetarum et Cometarum"). Rezultatele sale au fost folosite de *Mayer* pentru alcătuirea unor tabele privind mişcarea Lunii.

Euler ne-a lăst şi un tratat de optică intitulat „*Dioptrica*" (trei volume) în care combate teoria corpusculară a luminii a lui *Newton*.

Ca o curiozitate, menţionăm şi un tratat de teoria muzicii, intitulat „Tentamen novae theoriae musicae" (1739) în care încerca să facă muzica (cităm): „parte a matematicii şi să deducem, într-un mod ordonat, din principii corecte, tot ceea ce face să se potrivească şi să se amestece tonurile în mod plăcut". Din păcate, lucrare era (iarăşi cităm) „pentru muzicieni prea avansată în matematică şi pentru matematicieni prea muzicală".

Nu putem încheia aceste referiri la opera lui *Euler* fără să amintim despre scrierile sale cu caracter folozofic şi religios. *Euler*, în armonie cu originea sa părintească şi cu formaţia sa, era profund credincios şi poseda o bogată cultură filozofică. Ca orientare filozofico-creştină, *Euler* era un oponent al filozofiei monadelor, datorată lui *Leibniz* şi discipolului său *Christian Wolff*. Ideile filozofico-religioase ale lui *Euler* apar în deja pomenita culegere „Scrisori către o prinţesă germană...." , precum şi în lucrarea „Apărarea revelaţiei divine împotriva obiecţiilor liber-cugetătorilor" („Rettung der Göttlichen Offenbahrung gegen die Einwürfe der Freigeister").

Terminând de prezentat opera lui *Euler*, este obligatoriu să mai adăugăm un fapt care ilustrează deopotrivă imensul volum de lucrări lăsat de *Euler*, cât şi onestitatea sa şi ataşamentul faţă de Academia de Ştiinţe de la Sankt Petersburg. El s-a angajat să lase

Academiei atâtea memorii cât să se poată publica în analele ei 20 de ani după moartea sa. A dat mai mult decât a promis! S-a putut publica 40 de ani după moartea sa!

IV. Încheiere

Suntem la capătul acestui lung expozeu despre viaţa şi opera genialului *Leonhard Euler*. Ne înclinăm înfioraţi în faţa măreţiei sale.

Am vorbit despre un titan. Nu putem încheia altfel decât citând pe un alt titan – *Pierre-Simon Laplace*: „Citiţi-l pe Euler, citiţi-l pe Euler! El este profesorul nostru, al tuturor!“

Facultatea de Matematică şi Informatică
a Universităţii din Bucureşti
Str. Academiei, nr. 14, Bucureşti

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

Sesiunea aniversară
„Leonhard Euler – 300 de ani de la naştere“

În ziua de 11 mai 2007, a avut loc Sesiunea aniversară „Leonhard Euler – 300 de ani de la naştere“, organizată de Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Deschiderea lucrărilor a fost făcută de prof. univ dr. *Ion Chiţescu*, decanul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.[1)] În continuare, lucrările sesiunii s-au desfăşurat pe trei secţiuni, prezentându-se în total 30 de comunicări ştiinţifice.

Prezentăm mai jos lista comunicărilor în ordinea susţinerii lor.

Secţiunea Algebră şi Informatică

- *A. L. Agore*, *A.Chirvasitu* (studenţi la Universitatea din Bucureşti), *B. Ion* (University of Pittsburg), prof. dr. *G. Militaru*, Probleme de factorizare pentru grupuri finite;
- conf. dr. *A. Baranga*, Cea mai tare postcondiţie a adjuvant la dreapta al celei mai slabe postcondiţii în semantica parţial aditică;
- asist. *C. Chiriţă*, O teoremă de completitudine pentru logica trivalentă temporală cu predicate;
- conf. dr. *A. Gica*, Resturi de puteri în şiruri Fibonacci;
- prof. dr. *Ion D. Ion*, prof. dr. *C. Niţă*, Rezultate asupra ultraproduselor de module;
- prof. dr. *G. Militaru*, Produse încrucişate de grupuri;
- prof. dr. *D. Ştefănescu*, Euler şi rezolvarea numerică a ecuaţiilor algebrice;
- prof. dr. *D. Vaida*, Proprietăţi de ordine referitoare la procese semantice.

Secţiunea Analiză şi Geometrie

- prof. dr. *I. Chiţescu*, O problemă privind dreapta lui Euler. Amintiri de acum 44 de ani;
- prof. dr. *M. Cristea*, Produse directe de aplicaţii cvasiregulate pe spaţii metrice;
- conf. dr. *Iulia Hirică*, prof. dr. *L. Nicolescu*, Rezultate recente privind varietăţile Weyl şi Lyra;

[1)] Conferinţ de deschidere a lucrărilor sesiunii este reprodusă în prezentul număr, în cadrul rubricii „Istoria Matematicii“. (N.R.)

• prof. dr. *L. Nicolescu*, prof. dr. *G. Pripoae*, asist. *R. Gogu*, Asupra unei teoreme a lui E. Cartan;
• prof. dr. *L. Nicolescu*, conf. dr. *N. Soare*, Cercetările lui Leonhard Euler în Geometrie;
• asist. dr. *T. Oprea*, Plane critice pentru curbura secţională;
• conf. dr. *L. Pavel*, Asupra polinoamelor trigonometrice din L_1 – algebra de hipergrupuri compacte;
• conf. dr. *N. Soare*, O generalizare a unei clase de curbe;
• lect. dr. *S. Stupariu*, Concepte de stabilitate pentru reprezentări de tolbe;
• lect. dr. *A. M. Teleman*, conf. dr. *K. Teleman*, Lagrangieni de tip Witten şi topologie cuantică;
• prof. dr. *A. Turtoi*, Spaţiul twistor al structurilor complexe generalizate;
• lect. dr. *C. Volintiru*, Convenţia $0 \cdot \infty = 0$, o posibilă anomalie din cărţile având ca subiect Teoria Măsurării.

Secţiunea Mecanică şi Ecuaţii

• prof. dr. *A. Carabineanu*, O variantă a metodei lui Seidel de rezolvare iterativă a sistemelor de ecuţii neliniare;
• conf. dr. *A. Cernea*, Condiţii necesare de optimalitate pentru incluziuni diferenţiale cu întârzieri şi restricţii de fază;
• prof. dr. *S Cleja-Ţigoiu*, Model elaso-plastic pentru materiale cu dislocaţii continuu distribuite;
• prof. dr. *I. Mihăilă*, prof. dr. *N. Marcov*, asist. dr. *V. Pambuccian*, Studiul mişcării pendulului lui Foucault la Luanda în timpul eclipsei solare din 21 iunie 2001;
• prof. dr. *I. Mihăilă*, Asupra perioadei lui Euler;
• prof. dr. *Şt. Mirică*, Asupra jocului diferenţial „Lady in the lake";
• asist. dr. *V. Pambuccian*, Câmpul gravitaţional şi câmpul electromagnetic în relativitatea generală;
• prof. dr. *I. Roşca*, Metoda variaţională şi câteva rezultate clasice din analiza funcţională;
• prof. dr. *O. Simionescu*, prof. *I. Ana*, Descompunerea undelor ghidate care se propagă în cristale piezoelectrie supuse unor câmpuri inţiale;
• conf. dr. *V. Ţigoiu*, Fluide ne-newtoniene de tip polinomial.

Radu Miculescu

Al VI-lea Congres al Matematicienilor români
Bucureşti, 28 iunie - 4 iulie 2007

Cel mai important eveniment matematic al anului – Congresul matematicienilor români a avut loc în perioada 28 iunie – 4 iulie, la Bucureşti, sub înaltul patronaj al Academiei Române şi organizarea Universităţii din Bucureşti, Institutului de Matematică „Simion Stoilov" al Academiei şi al Universităţilor din Piteşti şi Timişoara.

Nu este lipsit de interes că primul Congres al Matematicienilor Români a avut loc în anul 1929 la Cluj, fiind organizat la iniţiativa matematicianului *Petre Sergescu*. Au urmat Congresele de la Turnu Severin (1932), Bucureşti (1945 şi 1956) şi Piteşti (2003).

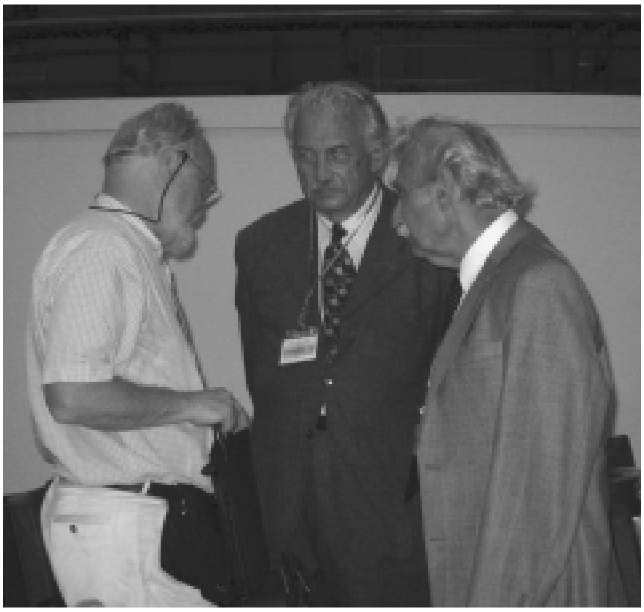
Să menţionăm că în organizarea primelor trei congrese Societatea „Gazeta Matematică" a avut un rol deosebit.

Din comitetul de organizare au făcut parte academicianul *Romulus Cristescu* (preşedinte), *Viorel Barbu*, *Constantin Corduneanu*, *Marius Iosifescu*, *Solomon Marcus*, *Radu Miron*, *Petre T. Mocanu*, *Gabriela Marinoschi*, cercetători, *Lucian Beznea* (secretar) şi *Radu Purice* (I. M. A. R.) precum şi profesorii *Ion Chiţescu*, *Victor Ţigoiu* (Universitatea din Bucureşti), *Gheorghe Barbu* (Universitatea din Piteşti), *Dumitru Gaşpar* şi *Mihail Megan* (Universitatea de Vest din Timişoara), *Doina Ciorănescu* (Universitatea Paris IV, Franţa) şi *Tudor Zamfirescu* (Universitatea din Dortmund, Germania).

Şedinţa de deschidere a avut loc în Aula Universităţii din Bucureşti, în prezidiu aflându-se acad. *Romulus Cristescu*, *Ioan Haiduc*, preşedintele Academiei, *Ioan Pânzaru*, rectorul Universităţii din Bucureşti, reprezentanţi ai Ministerului de Externe şi ai Ministerului Educaţiei, Cercetării şi Tineretului.

A fost prezentat mesajul de salut al Preşedinţiei României.

În plen au fost prezentate rapoarte întocmite de colective delegate de Comitetul de Organizare: Cercetarea matematică românească (*V. Brânzănescu*), Învăţământul matematic în România (*C. Niculescu*), Diaspora matematică românească (*D. Timotin*), Matematica românească în cultură şi societate (*S. Marcus*).



Prof. dr. Dan Burghelea, Universitatea Columbus, Ohio, S.U.A, academicienii Ion Cuculescu şi N. Cristescu într-o pauză a Congresului

Lucrările Congresului s-au desfăşurat începând cu a doua zi în clădirea Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti, pe opt secţiuni: Algebră, Geometrie Diferenţială şi Topologie, Analiză reală şi complexă, Teoria Potenţialului, Ecuaţii diferenţiale, Control Optimal şi Fizica Matematicii, Analiză Funcţională, Teoria Operatorilor şi Analiză Numerică, Probabilităţi şi Statistică Matematică, Mecanică şi Matematică Aplicată, Cercetări Operaţionale, Istoria şi Filozofia Matematicii.

Au fost prezentate peste 800 de comunicări ştiinţifice de către cercetători români şi străini, numărul acestora din urmă fiind în continuă creştere, la prezentul congres depăşind o sută. Au fost prezenţi matematicieni de pe toate continentele, un număr mare provenind din ţările europene şi S. U. A. De remarcat este numărul mare de matematicieni români din disaporă, precum şi cel al matematicienilor tineri care îşi pregătesc doctoratul în alte ţări.

Dintre participanţii din străinătate menţionăm câteva nume prestigioase: *H. T. Banks*, *Alexandra Bellow*, *Nicolae Dinculeanu*, *Dan Burghelea*, *Daniel Tătaru* (S. U. A), *Doina Ciorănescu*, *Florian Vasilescu* (Franţa), *Izu Vaisman* (Israel), *Preda Mihăilescu*, *Tudor Zamfirescu* (Germania), *Jean Mawhin* (Belgia), *Tudor Raţiu* (Elveţia), *Eugen Grebenikov* (Rusia), *Vicenzo Cappasso*, *Mimmo Iannelli* (Italia) şi mulţi alţii.

Ziua de 1 iulie a fost dedicată unei frumoase excursii pe ruta Bucureşti – Sinaia – Bran – Rucăr – Piteşti – Bucureşti. La Casa Universitarilor din Piteşti a avut loc banchetul Congresului, într-o ambianţă deosebită, cu un program folcloric apreciat de către participanţi.

Lucrările Congresului vor fi publicate în volum.

Societatea de Ştiinţe Matematice din România a organizat în zilele de 26-27 iunie cea de a 11-a Conferinţă Anuală, Conferinţă satelit a Congresului (Workshop on Mathematical Education).

Mircea Trifu

DIN VIAŢA SOCIETĂŢII

Cursurile de vară de la Buşteni

Între 29 iulie şi 8 august 2007 S.S.M.R. a organizat – ca de obicei, la Buşteni – cursurile de vară pentru perfecţionarea profesorilor de matematică din învăţământul preuniversitar. Aceasta a fost a XI-a ediţie după reluarea, în 1997, a unei vechi tradiţii pe care S.S.M.R. o are în organizarea şcolilor de vară, tradiţie ce datează din 1957, cu o scurtă întrerupere în anii '90.

Gazdă a cursurilor a fost şi anul acesta Centrul de Pregătire pentru Personalul din Industrie din localitate, care ne-a asigurat – prin persoana domnului director general *Irinel Ghiţă* şi a subordonaţilor săi – condiţii deosebite atât în ceea ce priveşte desfăşurarea cursurilor, cât şi în privinţa cazării şi a mesei. Le mulţumim tuturor pe această cale.

Programul zilnic a cuprins trei module (conferinţe) – inclusiv sâmbăta – pentru a acoperi un număr de 40 de ore, în intervalul 30 iulie - 7 august, în care au avut loc cursurile propriu-zise. La finele acestora, pe 7 august, s-a desfăşurat un colocviu, în cadrul căruia s- au prezentat cele mai interesante referate alcătuite de cursanţi şi selectate de comisia de examinare. Subiectele, liber alese de cursanţi, au abordat în general teme ştiinţifice sau metodice, nelipsind însă şi câteva dedicate istoriei matematicii precum şi problematicii generale a învăţământului matematic preuniversitar. Această diversificare a tematicii constituie un fenomen specific ultimilor ani, reflectând lărgirea ariei preocupărilor profesorilor de matematică, tendinţa acestora de a se ancora mai temeinic în realitate, preluând tradiţiile înaintaşilor. Este absolut notabilă seriozitatea cu care cursanţii au tratat temele alese – desigur, majoritatea clasice – mulţi dintre ei încercând deschideri către alte domenii sau conexiuni metodice interesante şi, de multe ori, cu caracter original. Vom mai menţiona că alcătuirea acestor referate a constituit o condiţie obligatorie pentru eliberarea adeverinţelor de participare la cursuri. Comisia de selecţie a lucrărilor a fost alcătuită din acad. *Ioan Tomescu*, prof. univ. dr. *Dorel Duca*, conf. univ. dr. *Eugen Păltănea*, prof. *Alexandru Popescu-Zorica* şi semnatarul acestor rânduri.

Numărul mai mic de participanţi de anul acesta (38 de profesori) se explică atât prin majorarea tarifelor de cazare şi – în special – masă, cât – mai ales– prin refuzul autorităţilor competente de a da un caracter oficial cursurilor, acestea nefiind punctate ca activităţi didactice, datorită absenţei modulului de pedagogie. Aceasta este o veche problemă, care a fost discutată în repetate rânduri, atât în cadrul Biroului S.S.M.R, cât şi cu participanţii la cursuri, ei fiind în ultimă instanţă, cei mai în măsură să decidă asupra oportunităţii audierii unor conferinţe de pedagogie sau din domenii conexe acesteia. Fără a refuza în mod absolut prezenţa pedagogiei în cadrul cursurilor, cursanţii sunt unanim de acord că timpul legal acordat acesteia (40% în totalul orelor) este exagerat şi ar dăuna interesului general. Singura soluţie acceptabilă din punctul lor de vederear fi ca ministerul să acorde un punctaj mai mic pentru perfecţionarea ştiinţifică şi metodică, urmând ca cei intresaţi de un punctaj mai mare să urmărească modulul de pedagogie din cadrul altor forme de perfecţionare.

Repartiţia zonală a cursanţilor a fost destul de uniformă, fiind – totuşi – preponderente, judeţele din Moldova, unde filialelor S.S.M.R. locale au desfăşurat o activitate de informare mai susţinută şi eficientă. Ca de obicei pe primul loc s-a situat filiala Iaşi, care prin persoana domnului profesor *Vasile Nechita* – secretarul acesteia – a adus cel mai mare număr de participanţi. De altfel, domnia sa participă pentru a unsprezecea oară consecutiv la aceste cursuri, fiind cel mai important animator al lor. Din aceste motive, am hotărât ca, începând cu acest an, domnul prof. *Vasile Nechita* să fie numit secretar al cursurilor, umând să se ocupe de o serie întreagă de probleme de organizare şi informare.

Conferinţele ţinute în cadrul cursurilor au stârnit, în general, un viu interes printre participanţi, fapt marcat şi de sondajul efectuat la finele acestora - sondaj care, ca deobicei ne va ajuta şi la îmbunătăţirea tematicii în anii următori. Discuţiile purtate între cursaţi şi între cursanţi şi conferenţiari, au marcat o creştere a interesului pentru temele prezentate, relevând şi o serie întreagă de sugestii pentru ediţiile următoare.

Tematica conferinţelor a fost atent selectată, ţinând seama de subiectele sugerate de cursanţi în sondajele din anii anteriori. Astfel, am căutat să păstrăm un echilibru între subiectele cu caracter de informare ştiinţifică şi cele vizând metodica şi metodologia predării la clasă, primele având evident, un caracter preponderent. În selectarea conferenţiarilor am avut în vedere unii dintre cei mai distinşi universitari, care, în decursul timpului s-au aplecat, cu interes şi seriozitate, asupra învăţământului preuniversitar, fiind preocupaţi de perpetua îmbunătăţire şi diversificare a acestuia. De bună seamă, aceştia au ştiut să stabilească un mod de comunicare simplu şi eficient cu profesorii cursanţi, neabuzând de informaţia ştiinţifică şi – ceea ce ni se pare esenţial – neadoptând o poziţie *ex cathedra*.

Vom prezenta, mai jos, tematica conferinţelor susţinute:

• prof. univ. dr. *Ioan Tomescu*, membru corespondent al Academiei Române (Universitatea din Bucureşti) – „Numere binomiale şi multinomiale şi aplicaţii“ (o conferinţă); „Principiul includerii şi excluderii şi aplicaţii“ (o conferinţă); „Numere lui Catalan“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr. *Constantin Popovici* (Universitatea din Bucureşti) – „Infinitatea numerelor prime de forma $4k-1$, $4k+1$, $6k-1$, $6k+1$“ (o conferinţă); „Inele factoriale“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr. *Doru Ştefănescu* (Universitatea din Bucureşti) – „Inegalităţi privind polinoamele şi aplicaţii“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr. *Adrian Albu* (Universitatea de Vest din Timişoara) – „Contraexemplul în matematică. Probleme de independenţă în matematică“ (două conferinţe); „Euler – 300“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr. *Miron Oprea* (Universitatea Petrol şi Gaze din Ploieşti) – „Aplicaţii ale algoritmului lui Euclid“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr. *Dorel Duca* (Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj) – „Generalizări ale punctelor de optim“ (două conferinţe); „Condiţii de eficienţă cu ipoteze de derivabilitate asupra funcţiei“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr. *Horea Banea* (Universitatea Transilvania din Braşov) – „Generalizarea noţiunilor de derivată şi integrală“ (o conferinţă); „Rolul problemelor“ (o conferinţă);

• conf. univ. dr. *Dragoş Popescu* (Universitatea din Bucureşti) – „Teorema lui Pick“ (o conferinţă); „Funcţii aritmetice“ (o conferinţă); „Aplicaţii ale problemei poliedrale a lui Euler“ (o conferinţă);

• conf. univ. dr. *Radu Miculescu* (Universitatea din Bucureşti) – „Aplicaţii ale formulei lui Taylor“ (o conferinţă);

• conf. univ. dr. *Eugen Păltănea* (Universitatea Transilvania din Braşov) – „Asupra unei probleme de numărare“;

• conf. univ. dr. *Andrei Vernescu* (Universitatea Valahia din Târgovişte) – „Viteza de convergenţă a şirurilor de numere reale“ (o conferinţă).

Înainte de a încheia vom mai face o ultimă observaţie: în decursul celor 11 ediţii desfăşurate din 1997 şi până în prezent, s-a conturat un nucleu de profesori care, cu perseverenţă şi interes, participă an de an la aceste cursuri, jucând un rol important ca ferment activ în popularizarea lor – pe de o parte – iar pe de altă parte ne obligă să diversificăm subiectele conferinţelor pentru a nu genera repetativitate. Pentru a da un exemplu, în acest sens (în afara liderului de necontestat, prof *Vasile Nechita*) vom aminti că anul acesta am acordat o nouă diplomă de fidelitate (pentru prezenţa la şapte ediţii consecutive ale cursurilor), doamnei profesoare *Elena Chirea* de la Liceul teoretic Nicolae Bălcescu din Medgidia. O felicităm pe această cale, atât pe domnia sa şi pe toţi ceilalţi „veterani“ ai cursurilor şi îi asigurăm că vom face, pe viitor, tot ce este posibil pentru a le menţine interesul mereu treaz prin tematica abordată.

ceilalţi „veterani“ ai cursurilor şi îi asigurăm că vom face, pe viitor, tot ce este posibil pentru a le menţine interesul mereu treaz prin tematica abordată.

În final, mai trebuie să adresăm mulţumirile noastre sincere domnului profesor *Nicolae Angelescu* – inspector general adjunct la I.Ş.J. Prahova şi doamnei profesoare *Mirela Dobrea* – directoare a Grupului Şcolar Ion Kalinderu din Buşteni – pentru sprijinul deosebit acordat în buna organizare şi desfăşurare a acestor cursuri. Acestora şi multor altora, anonimi, le exprimăm gratitudinea noastră.

Absolvenţii cursurilor Şcolii de vară de la Buşteni, ediţia 2007, împreună cu profesorii Alexandru Popescu-Zorica, Dan Radu şi Eugen Păltănea

Dan Radu

Lista absolvenţilor cursurilor de perfecţionare pentru profesorii de matematică, organizate de S.S.M.R. Buşteni, 29 iulie-8 august 2007

1. Agapi Maria	Şc. cu clasele I-VIII nr.2 George Călinescu – Oneşti
2. Andrei Dumitru Mihai	Gr. Şc. Agricol Palas – Constanţa
3. Ababei Constantin	Şc. cu clasele I-VIII Mihai Eminescu – Roman
4. Ababei Elena	Şc. cu clasele I-VIII Mihai Eminescu – Roman
5. Bursuc Ion	Col. de Informatică Spiru Haret – Suceava
6. Bejan Cornelia Livia	Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi – Iaşi
7. Chirea Elena	Lic. Teoretic Nicolae Bălcescu – Medgidia
8. Costăchescu Mărioara	Lic. cu Program Sportiv – Roman
9. Crăciun Dorinel Mihai	Lic. Teoretic Mihail Sadoveanu – Paşcani
10. Dincă Sanda Mihaela	Gr.Şc. Industrial Metalurgic – Slatina
11. Deacănu Nicoliţa	Lic. Teoretic Ioan Petruş – Otopeni
12. Doinaru Mihaela Marcela	Col. Mihai Cantacuzino – Sinaia
13. Duma Iuliana	Col. Naţ. Vasile Alecsandri – Galaţi
14. Duma Vasile	Şc. Gimnazială nr. 26 Ion Creangă – Galaţi
15. Filip Maria	Lic. Teoretic Ioan Petruş – Otopeni
16. Frenţ Angela	Col. Tehnic Feroviar – Braşov
17. Georgescu Mioriţa	Col. Naţ. Anastasescu – Roşiorii de Vede
18. Georgescu Anton-Savel	Col. Naţ. Anastasescu – Roşiorii de Vede
19. Gavriluţ Mihai	Col. Naţ. Roman Vodă – Roman
20. Jecan Mihaela Doina	Lic. Teoretic Mihai Eminescu – Cluj
21. Marinescu Damian	Şc. Tudor Vladimirescu – Târgovişte
22. Meciu Eugenia Ana	Şc. cu cl. I-VIII Alexandru Vaida Voievod – Cluj
23. Mihăeş Maria	Col. Tehnic Danubiana – Roman
24. Nechita Vasile	Col. Costache Negruzzi – Iaşi
25. Nour MAria	Şc. cu clasele I-VIII nr. 41 – Galaţi
26. Oleniuc Claudia	Gr. Şc. Virgil Madgearu – Iaşi
27. Oleniuc Mariana	Şc. cu clasele I-VIII Blăgeşti – Başcani
28. Popa Filofteia	Şc. cu clasele I-VIII nr. 12 – Târgovişte
29. Popescu Claudia	Lic. Teoretic Mihail Sadoveanu – Paşcani

30. Popescu Maria	Şcoala Centrală – Bucureşti
31. Roman Neculai	Şc. cu cl. I-VIII Vasile Alecsandri–Mirceşti,
32. Rotundu Raluca Ioana	Şc. cu cl. I-VIII Ionel Teodoreanu – Iaşi
33. Rusu-Marian Cristina	Gr. Şc. Gheorghe Şincai – Târgu Mureş
34. Savu Eleonora	Col. Naţ. Ferdinand I – Bacău
35. Vişan Ion	Lic. Teoretic Tudor Arghezi – Craiova
36. Zaharia Maria	Col. Naţ. Dimitrie Cantemir – Oneşti
37. Zaharia Dan	Col. Naţ. Dimitrie Cantemir – Oneşti

Dan Radu

REVISTA REVISTELOR

Didactica Matematică

Domnul prof. univ. *Dorel I. Duca* de la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj ne-a înmânat, cu ocazia cursurilor de perfecţionare pentru profesorii de matematică desfăşurate la Buşteni în vara anului 2007, ultimul număr apărut (vol. 25, nr. 1/2006) al revistei clujene editate sub auspiciile S.S.M.R. şi care conţine mai vechea publicaţie Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii. Cu îndreptăţită mândrie, domnia sa ne-a subliniat condiţiile grafice deosebite în care a apărut revista, fapt facilitat şi de către o mică sponsorizare din partea S.S.M.R..

Desigur, publicaţia are un caracter în primul rând ştiinţific, reunind o sumă de articole de cercetare – dar şi de informare – cu precădere dedicate didacticii matematicii, această ramură a matematicii care s-a impus de mult în alte ţări, dar care la noi abia în ultimii ani face, cu timiditate, primii paşi.

Vom da mai jos, titlurile câtorva articole inserate în acest număr, cu menţiunea că selecţia făcută este destul de arbitrară şi subiectivă: „Symetric inequalities with and without a Computer Algebra System" (*V. Anişiu*), „Fibonacci Numbers" (*I. E. Duca*), „Hilbert functions and Macaulay representation of natural numbers" (*D. Popescu*), „The maxim modulus, the inner functions and the Lowner's differenţial equations" (*I. Şerb*) etc.

Dan Radu

Axioma – supliment matematic

De la Ploieşti ne-a parvenit nr. 23 (mai 2007) al revistei Axioma – supliment matematic. Desigur revista este o veche cunoştinţă a cititorilor noştri, prezentând-o – în numeroase rânduri – acestora.

Publicaţia ploieşteană este consecventă în ceea ce priveşte formatul (structura) şi conţinutul. Ea continuă să fie – aşa cum s-a vrut, probabil, încă de la început – o colecţie de probleme propuse şi rezolvate, destinată să faciliteze studiul matematic de către elevi, începând chiar din clasele primare şi până la finele liceului. Scopul, în mare, a fost atins cu prisosinţă, ultimul număr inserând nu mai puţin de 14 pagini dedicate rubricii rezolvitorilor de probleme, care – dacă înregistrările sunt corecte – depăşesc substanţial numărul de pagini afectat rubricii respective în Gazeta Matematică seria B.

Vom mai semnala, în acest număr, şi publicarea unui articol intitulat „Asupra conjecturii lui Collatz" (semnat de *M. Avram* şi *M. Oprea*), foarte interesant şi incitant pentru tinerii cititori. De altfel, acest material reflectă mai vechile preocupări ale autorilor privind conjectura lui Collatz, aceştia susţinând – în urmă cu câţiva ani – şi o comunicare, pe această temă, în cadrul Sesiunii de comunicări metodico-ştiinţifice a judeţului Braşov, desfăşurată la Sinaia.

În fine, tot în acest număr, este inserată o scurtă notă metodică de geometrie, cu titlul „O metodă unitară în demonstrarea unor teoreme cunoscute" (*A. Dănoiu*).

Dan Radu

Revista de Matematică din Galaţi

Domnul profesor *Romeo Zamfir* – redactorul şef adjunct al publicaţiei – ne-a expediat ultimul număr apărut (nr. 29/2007) al revistei gălăţene.

Revista debutează printr-o amplă prezentare a de-acum tradiţionalului Concurs interjudeţean de matematică „Cristian S. Calude", prezentare semnată de domnul profesor *Romeo Zamfir* şi menită să facă un scurt istoric al acestuia, al modului de organizare şi desfăşurare.

Dintre materialele cu caracter teoretic conţinute în prezentul număr, vom menţiona: „Subgrupuri ale grupului aditiv al numerelor reale" (*M. A. Baroni*), „Consideraţii metodice despre cercul celor nouă puncte şi dreapta lui Euler" (*L. G. Tănase*), „Asupra unor probleme de la etapa locală, Galaţi 2007" (*M. Coadă*), „Concurenţă şi coliniaritate" (*M. Cană*), „Legătura dintre polinomul caracteristic şi polinomul minimal al unei matrici"[1)] (*I. Duma*) şi „On some inequalities" (*Z. Starc*).

Dan Radu

Revista de Matematică din Timişoara

Domnul profesor *Dan Bîrchi* ne-a trimis, din Timişoara, ultimul număr tipărit al publicaţiei locale (nr. 3/2007).

Păstrându-şi caracterul de revistă – culegere de probleme, publicaţia timişoreană inserează şi trei scurte – dar foarte interesante – note matematice; iată titlurile lor: „Câteva teoreme de geometrie" (*Gh. Eckstein*), „O rafinare a inegalităţii lui Cesàro" (*M. Bencze*) şi „O metodă elegantă de calcul a unor limite de şiruri" (*C. Chiser*).

Vom menţiona, ca de obicei, calitatea deosebită a problemelor propuse spre rezolvare tinerilor cititori, calitate girată de prestigioasele nume ale propunătorilor, profesori cu o vastă şi îndelungată activitate didactică şi ştiinţifică.

Dan Radu

RECENZII

FLORIN DIAC, O istorie a învăţământului românesc modern, vol. III – perioada 1989-2000 Editura OSCAR PRINT, Bucureşti, 2007

Volumul al treilea – şi ultimul – al prestigioasei monografii dedicate de profesorul *Florin Diac* istoriei învăţământului românesc modern acoperă perioada cea mai cunoscută, dar şi cea mai controversată, a evoluţiei acestuia – anume cei 17 ani ce s-au scurs după evenimentele din decembrie 1989. Perioada, una de profunderi prefaceri şi seisme, nu de puţine ori a scindat nu numai marea masă a celor direct implicaţi în procesul de învăţământ, ci chiar şi publicul larg, în două categorii de partizani cu puncte de vedere aparent antagonice: cei ce doreau cu tot dinadinsul o „modernizare" rapidă şi uneori chiar „forţată a învăţământului românesc pentru a-l înscrie pe coordonatele europene (sau chiar euroatlantice) contemporane şi „tradiţionaliştii", susţinători ai valorilor probate în timp – şi chiar prin arialul geografic larg, dacă ne gândim la marele număr de specialişti ce au îngroşat diaspora românească în ultimii ani – de mai bine de o sută de ani de la fundamentala şi cu adevărat revoluţionara reformă a învăţământului iniţiată de *Spiru Haret*. Ceea ce se uită, îndeobşte, este că amândouă categoriile despre care vorbeam mai sus sunt animate de aceleaşi bune intenţii: propăşirea învăţământului românesc, recunoaşterea valorii lui pe plan internaţional şi perpetuarea calităţii lui, fapt de acum recunoscut explicit sau implicit chiar şi de către campionii unor puncte de vedere extremiste, ce îmbracă uneori uneori forme acute sau detractive. Ei bine, ceea ce a reuşit profesorul *Florin Diac* este să păstreze un echilibru între aceste două puncte de vedere, să prezinte cu degajare şi imparţialitate evoluţia fenomenelor, detaşându-se de atitudinile partizane extremiste şi de exagerările vehiculate de cele două tabere. În plus, domnia sa a beneficiat de un atu important din punct de vedere informaţional, fiind direct angrenat în

[1)] Lucrarea a fost prezentată de către autoare şi în cadrul Şcolii de vară de la Buşteni, 2007, fiind bine primită şi apreciată de către participanţi. (D.R.)

acest proces (ca să nu zicem „ciocniri“ ale unor puncte de vedere) atât ca inspector general al municipiului Bucureşti, cât şi – mai apoi – ca secretar general al S.S.M.R.. Personal, considerăm că acest al treilea volum al monografiei este cel mai bine documentat şi redactat cu o deosebită vocaţie a detaliului istoric, fiecare fapt fiind plasat la locul şi în contextul potrivit, comentariile cu caracter subiectiv fiind ori cu totul absente, ori jucând un rol minim – atunci când au fost absolut necesare.

Din păcate, spaţiul nu ne permite o detaliere a conţinutului acestui al treilea volum al monografiei; ne vom mulţumi să cităm doar titlurile celor şapte capitole ale lucrării, pentru a sublinia caracterul destul de exhaustiv al acesteia.

- cap. I: Învăţământul românesc în perioada postrevoluţiei din decembrie 1989;
- cap. II: Schimbări în structura Ministerului Învăţământului;
- cap. III: Procesul informatizării învăţământului preuniversitar românesc;
- cap. IV: Deschiderea învăţământului preuniversitar românesc cu exemplificări din învăţământul bucureştean în perioada postrevoluţiei din decembrie 1989;
- cap. V: Situaţii grele, uneori conflictuale, cu care s-a confundat învăţământului preuniversitar bucureştean în perioada postrevoluţiei din decembrie 1989;
- cap. VI: Constituirea „Asociaţiei directorilor de şcoli din România“ şi aderarea acesteia la „Asociaţia europeană a directorilor şcolilor secundare“;
- cap. VII: Evoluţia reformei învăţământului preuniversitar românesc după alegerile din toamna anului 1996 şi instaurarea coaliţiei C. D. R.

Vom mai menţiona că întregul volum este presărat cu statistici şi diagrame, preluate din statistici oficiale sau din alte lucrări cu caracter similar, menite să ilustreze mai bine şi mai clar materialul prezentat. Exemplificările sunt făcute, în general, cu faptele cunoscute de autor din vremea când se afla la conducerea Inspectoratului general al Municipiului Bucureşti şi al judeţului Ilfov, din păcate alte date şi informaţii fiind mai greu accesibile. Dar, la o eventuală reeditare ...

În final, vom sublinia din nou ideea că lucrarea ni se pare absolut de excepţie, acoperind un spaţiu informaţional dacă nu complet vid, în orice caz puţin populat cu fapte şi date pertinent şi obiectiv prezentate, constituindu-se ca un veritabil reper bibliografic pentru orice altă lucrare ulterioară dedicată acestui areal spiritual: evoluţia învăţământului românesc de-a lungul timpului.

Dan Radu

CRISTINEL MORTICI, Bazele matematicii, teorie şi probleme
Editura MINUS, Târgovişte, 2007

O nouă lucrare care acoperă principalele cursuri de matematică universitară se află acum la dispoziţia studenţilor din primii ani ai facultăţilor de ştiinţe, inginerie sau ştiinţe economice.

În condiţiile unei lipse acute de manuale universitare (spre deosebire de anii '60-'90), cât şi a fenomenului îngrijorător al scăderii nivelului mediu general al studenţilor, cartea domnului conferenţiar dr. *Cristinel Mortici* este mai mult decât binevenită pentru studenţi. Aceştia vor găsi în carte teorie şi probleme care acoperă cursurile generale de matematică, Analiză Matematică, Analiză numerică, Algebră liniară şi geometrie, Matematici speciale, Matematici aplicate în economie, Topologie, Ecuaţii diferenţiale, integrale şi cu derivate parţiale, Probabilităţi, Statistică şi, în final, Aritmetică şi teoria numerelor.

Autorul se achită perfect de sarcina dificilă asumată şi, pe parcursul a circa 360 de pagini, în 32 de capitole, reuşeşte să cuprindă, în mod echilibrat, materiile menţionate.

Fiecare capitol începe cu câte un breviar teoretic şi este urmat de câte un set de probleme legate de teoria prezentată anterior. Este remarcabilă acurateţea şi concizia lucrării, cât şi gradarea judicioasă a problemelor, ceea ce face studiul foarte abordabil şi de către studenţii care doresc să apeleze şi la ajutorul cuvântului scris, în afara orelor de curs sau de seminar. Numeroase probleme au rezolvări complete, aşa încât, după studierea acestora, abordarea celor fără soluţii să fie mai accesibilă.

La elaborarea lucrării, autorul a consultat o bibliografie, cuprinzând 75 de titluri din literatura matematică românească şi străină.

Prezentarea grafică este foarte îngrijită.

Pentru toate calităţile sale didactice, cât şi pentru înaltul său grad de utilitate, recomandăm lucrarea cu căldură.

Andrei Vernescu

VASILE POPA, Algebră liniară – matrici şi determinanţi – pentru elevi, studenţi şi concursuri, Editura MEDIAMIRA, Cluj, 2007,

O nouă carte de Algebră liniară îşi face apariţia. Ea se înscrie în linia cărţii lui *Gh. Andrei, C. Caragea, Gh. Bordea* din 1993 precum şi a cărţii lui *L. Lupaş, A. Lupaş* şi colectiv, din 1996 şi 2001, având ca obiectiv tratarea detaliată a problematicii de Algebră de clasa a XI-a, orientată, aşa cum o arată titlul, şi către concursuri.

Cartea conţine următoarele patru capitole:

1. Matrice de ordin 2 şi aplicaţii;
2. Matrice. Determinanţi. Transformări elementare;
3. Determinanţi speciali;
4. Valori proprii. Polinom caracteristic. Teorema Cayley-Hamilton

şi conţine circa 250 de pagini. Fiecare capitol se compune din trei părţi: probleme teoretice, probleme rezolvate şi probleme propuse. Cităm din introducere: „Problemele propuse au în general o problemă geamănă în problemele rezolvate şi sunt rezolvate complet la sfârşitul capitolului".

Aşa cum este concepută şi prezentată, lucrarea este de real folos elevilor, pentru studiu, este scrisă didactic, cu toate detaliile necesare, aşa încât rezolvarea problemelor să nu se mai prezinte ca fiind un demers excesiv de dificil.

Prezentarea grafică este foarte bună, suficient de „aerisită".

O recomandăm cu căldură.

Andrei Vernescu

POŞTA REDACŢIEI

Laurenţiu Modan – Academia de Studii Economice din Bucureşti. Am primit materialul dumneavoastră intitulat „Profesorul Constantin Corduneanu – o viaţă dedicată matematicii"; de asemenea şi cele două probleme propuse. Colegiul Redacţional va hotărî asupra oportunităţii publicării lor.

Tănase Negoi – comuna Traian, jud. Teleorman. La redacţie ne-au parvenit, din partea dumneavoastră, următoarele materiale: „Asupra unei teoreme a lui Fermat", „Monotonia şirului lui Traian Lalescu", „Asupra unor şiruri speciale". Vom vedea în ce măsură vreuna din aceste note este publicabilă. Vă rugăm ca, pe viitor, să nu ne mai expediaţi materiale decât într-o formă finită (care consideraţi că poate fi publicată nemodificat); în caz contrar, nu vom lua în consideraţie corespondenţa primită de la dumneavoastră.

Mihai Miculiţă – şcoala Oltea Doamna din Oradea, **Marius Olteanu** – S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea. Articolul dumneavoastră intitulat „Rafinări ale unor inegalităţi în tetraedru" a primit aviz favorabil şi va fi publicat – cel mai probabil – într-unul din numerele pe anul viitor ale revistei.

Mihály Bencze – str. Hărmanului, nr. 6, Săcele, jud. Braşov. Am primit cele două probleme propuse de dumneavoastră. Le vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Szász Róbert – Str. Rovinari, bl. 32/B114, Târgu Mureş. Problemele propuse expediate de dumneavoastră se află în atenţia Colegiului Redacţional.

Gheorghe Szöllösy – str. Avram Iancu, nr. 28 E, 435500 Sighetu Marmaţiei. Am primit problema propusă pe care aţi expediat-o la Redacţie. O vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Adrian Reisner – Centrul de calcul E. N. S. T. din Paris, Franţa. Articolele trimise intitulate respectiv „Distanţa dintre doi proiectori ortogonali", respectiv „Raza numerică a unui endomorfism: $W(T) = \sup\{1 <, Tz > 1, \ ||x|| = 1\}$ şi extinderi algebrice" vor fi studiate de Colegiul Redacţional care va decide asupra oportunităţii publicării lor.

A. L. Agore şi **Gh. Militaru** – Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti. Articolul dumneavoastră cu titlul „Jocul cu numere şi axiome: sisteme Peano-Dedekind" se află, în prezent, la referenţi. Colegiul Redacţional va decide asupra oportunităţii publicării lui.

Laurenţiu Modan, Facultatea de Matematică-Informatică a Universităţii Spiru Haret din Bucureşti. Am primit articolul dumneavoastră intitulat „Starea actuală a învăţământului superior românesc". Va fi predat spre studiu Colegiului Redacţional.

Marius Olteanu – – S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea. Am primit problema de geometrie propusă. O vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Gabriel Dospinescu – École Normale Supérieure Paris şi **Marian Tetiva** – Colegiul Naţional Roşca Codreanu din Bârlad. Nota matematică cu titlul „How many disjoint subsets with a given sum of elements can $\{1, \ldots, n\}$ have?“ se află în atenţia Colegiului Redacţional.

Dan Schwarz – Materialul dumneavoastră intitulat „I. M. C. 2007, Blagoevgrad, Bulgaria“ va fi inserat în unul din numerele pe anul viitor al revistei.

Dan Radu

ERATĂ

1. În G.M.-A nr. **3**/2007, la articolul „Asupra unei clase de şiruri “ de *Adrian Stroe*:

1. la pag. 203, rândul 6 de sus, în loc de $x_n \in (n, n+1)$ se va citi $x_n \in [n, n+1]$;
2. la pag. 218, rândul 11 de jos, în loc de $y_n = \dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}$ se va citi $y_n = \dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} - \ln x_n$;
3. la pag. 222, rândul 8 de sus, în loc de [3] se va citi [7];
4. la pag. 222, rândul 9 de sus, în loc de [7] se va citi [6];
5. la pag. 226, rândul 1 de jos, în loc de $* * *$ se va citi D. M. Bătineţu-Giurgiu, *Ponderea unor şiruri.*

Redacţia

TABLA DE MATERII

Vol. XXV (CIV) 2007

XII. Recenzii

XIII. Probleme propuse – rubrică permanentă redactată de Dan Radu şi Radu Miculescu

XIV. Soluţiile problemelor propuse – rubrică permanentă redactată de Dan Radu şi Radu Miculescu

XV. Poşta redacţiei – rubrică permanentă redactată de Dan Radu