GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ

ANUL XXVI(CV) **Nr. 1 / 2008**

An exploration of Hilbert's Neutral geometry

by Wladimir-Georges Boskoff,
Bogdan D. Suceavă and
Adrian I. Vâjiac

Abstract

We explore the axioms of incidence, order and congruence in the context of neutral (or, as it is called sometimes, absolute) geometry, following *Hilbert*'s axiomatic system. We present the material in a self-contained form, emphasizing on pure geometric concepts and ideas. We carefully investigate the importance and the minimality of each group of axioms which lead to the construction of neutral geometry. This paper approaches the foundations of geometry from an educational viewpoint and is intended to meet the interest of readers who would like to explore the axiomatic method and in particular *Hilbert*'s axiomatic system.

Key words: Neutral geometry, axiomatic method, Hilbert's axiomatic system.
M.S.C.: Primary 03B30, 51A05, Secondary: 51A99, 01A60.

1. Introduction

Recently, Springer-Verlag published *David Hilbert*'s original notes on Foundations of Geometry [19]. The volume invites the reader to revisit and reflect on many interesting themes that were in the center of attention of mathematical world at the end of the XIX-th century. Some of these ideas are valuable for their potential for undergraduate research in the current curriculum in many North American Universities. The present article is an exploration that invites the reader to revise from an educational viewpoint the original *David Hilbert*'s ideas.

Hilbert's axiomatic system is already incorporated in a well-known text written by *M. J. Greenberg* [15]. However, *Greenberg* presents only three incidence axioms (one of the versions of *Hilbert*'s system has eight). For educational purposes, we would like to understand why these axioms are important. Furthermore, by discussing precisely these axioms, we face a more important question: what is actually the axiomatic method? Why is it important? Why is it „important to separate the purely geometric ideas from the numerical ideas", as *Greenberg* writes (see [15], p. xii) ?

We start our discussion by a historical presentation. Since first stated, *Hilbert*'s axiomatic system was subject to many comments, critical views or educational developments. While *Hölder* and *Sommer* have accepted that *Hilbert*'s 1899 axiomatic system consists of independent axioms (no one of the axioms is logically deducible from the remaining axioms), Schur claimed that three of the axioms are consequences of eight other axioms [27]. *Schur*'s critical standpoint has been proved as incorrect by *E. H. Moore* [27], while some other redundancies have been mentioned in the same reference. Since the original discussion of the 1899 version of his axiomatic system, *Hilbert* updated twice his axiomatic system [19]. In 1904, *Veblen* writes that he regards his own research [50] as a continuation of the work of *Pasch* and *Peano*, rather than the one of *Hilbert* and *Pieri*. A few years later, *R. L. Moore* [28] proved that several of *Veblen*'s axioms depend on the others. Three decades later, *Barbilian* (who took classes with *Hilbert*) comments in his notes that *Hilbert* does not tell us how he obtained his axioms, implying that the original axiomatic system was a long trial and error evolution.

Hilbert's viewpoint on foundations is not the only one available for educational purposes. One can present the axiomatic method by using the ruler-and-protractor postulates that are currently used in high school texts. There is also an excellent recent college textbook studying this viewpoint [51].

Birkhoff's influential article [2] starts by reminding several other attempts to present the axiomatic method in its simpler and most accessible form. *Birkhoff's* viewpoint has been further simplified by *MacLane* in 1959 [23] to better serve the needs of high school curriculum. However, all these viewpoints on Foundations of Geometry represent semi-formalized axiomatic systems. They incorporate the number system in the foundations of geometry, when this is not mathematically necessary. A motivated undergraduate student may want to know also more about *Hilbert*'s original ideas and program. Actually, if we wish that our students experience a higher degree of generality and abstract content, then shouldn't we discuss the topic in its most general framework, that is pursuing *Hilbert*'s terms in their utmost generality? Shouldn't we look for a version of *Hilbert*'s axiomatic system with axioms stated in their „weakest“ form? Here there is a wide potential for undergraduate research and further explorations. This is the idea that motivates the present study.

While preparing our work, we have revised many seminal contributions and viewpoints (see e.g. [2, 3, 4, 6, 13, 14, 20, 21, 23, 24, 26, 30, 33, 34, 35, 54]) and we recommend them to the interested reader. However, the present material aims to be self-contained and no other reading is assumed to be necessary.

The North-American reader is familiar with *Hilbert*'s axiomatic system mainly through Townsend's classical translation [18]. That's why we have constantly referred throughout the text to this reference. In our approach, the axioms of order are different than *Hilbert*'s original group of axioms of order, and we follow along the lines of the presentation suggested by *Adler*'s notes to *Hilbert*'s viewpoint from the summer of 1902 (see *Michael Hallett* interesting presentation in [19], pp. 532-539 and *Hilbert*'s notes [19], pp. 543-552). The axioms of equality are written in their weakest form and symmetry and transitivity are proved as consequences. More precisely, our exploration shows that some of *Hilbert*'s axioms from 1899 can be weakened. Part of the original 1899 axiom $\mathbf{I_7}$ is our Theorem 5, while *Hilbert*'s 1899 axiom $\mathbf{II_3}$ is Theorem 8 below. Also, *Hilbert*'s axiom $\mathbf{II_4}$ is obtained from *Moore*'s theorems from section 3.2. The first axiom of congruence in [18] is proved in Theorem 22, by using weakened forms of the axioms of equality $\mathbf{E_1} - \mathbf{E_5}$. Furthermore, the weakened form of the axioms of equality $\mathbf{E_1} - \mathbf{E_5}$ yield the SSS congruence case in Theorem 30, which implies that the congruence of triangles and congruence of angles are relations of equivalence. These facts are obtained in the conclusion of the present work, in Corollaries 2 and 3.

The key idea of the axiomatic method is that any mathematical theory is built from a set of primary objects, which do not require definitions, together with a set of axioms. The theory is built as a collection of mathematically rigorous statements deduced from the axioms and using the axioms. The collection of primary objects of the geometry are the following, inherited from set theory. The objects of the first collection are called *points*, and they are denoted by capital letters $A, B, C, \ldots$ The second collection contains the *lines*, denoted by $l, l', \ldots$ The third collection contains the *planes*, denoted by Greek letters $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Finally, the last collection contains only one element called the *space*, denoted by S.

For reasons of space, we limit our exploration to the first three groups of axioms, covering Incidence, Order and Congruence. The properties that can be proved in this axiomatic framework generate the so-called *Hilbert*'s neutral plane without continuity, since no Continuity Axiom is assumed. With this preparation, we are ready to study this viewpoint and see how this geometric space and its objects could be presented today.

2. Exploring Axioms of Incidence

2.1. Axioms of incidence

The first two axioms establish the existence and uniqueness of a line that is incident to two given distinct points.

Axiom $\mathbf{I}_1$. *For any two distinct points A and B there exists a line l which is incident with both A and B, i.e. $A \in l$ and $B \in l$.*

Axiom $\mathbf{I}_2$. *For any two distinct points A and B there is at most one line l which is incident with both A and B, i.e. $A \in l$ and $B \in l$.*

Put together, these axioms lead obviously to the following.

Proposition 1. *For any two distinct points A and B there is an unique line l such that $A \in l$ and $B \in l$.*

The unique line l of the previous theorem is often denoted by AB, indicating that it is *the line* that passes through the points A and B.

Axiom $\mathbf{I}_3$. *There exist at least two distinct points on any line. Moreover, there exist at least three distinct points which are not on the same line.*

In view of the axiom $\mathbf{I}_3$, it seems useful to be able to distinguish points which are on a line from points which do not belong to the same line, therefore we introduce the following notion.

Definition 1. *Any number of points are called collinear if there is a line which is incident to all of them. Otherwise, they are called non-collinear.*

For example, axiom $\mathbf{I}_1$ asserts that every two distinct points are collinear, and axiom $\mathbf{I}_3$ guarantees the existence of at least three non-collinear points in any geometry. The next two axioms establish the relationship between points and planes.

Axiom $\mathbf{I}_4$. *For any three arbitrary non-collinear distinct points A, B and C, there exists a plane α which contains A, B and C.*

In general, such a plane is denoted by $\alpha = (ABC)$. Remark that, in any geometry, axioms $\mathbf{I}_3$ and $\mathbf{I}_4$ guarantee the existence of at least three non-collinear points, therefore the existence of at least one plane that contains them. Similar to axiom $\mathbf{I}_2$ in the context of points and lines, we introduce the following axiom, which guarantees the uniqueness of the plane which contains three given non-collinear points.

Axiom $\mathbf{I}_5$. *For any three non-collinear points A, B and C, there exists at most one plane α which contains A, B and C.*

In a similar fashion, one can easily prove the following.

Proposition 2. *For any three non-collinear points A, B and C there is an unique plane α which contains A, B and C.*

The following axiom establishes the relationship among points on a given line and a plane containing that line. This axiom plays a crucial role once we construct geometries with more number of points and lines.

Axiom $\mathbf{I}_6$. *If two points A and B, which determine the line l, lie in the plane α, then every point of the line l lies in the plane α.*

In this case, we write $l \subset \alpha$ (regarded as a subset of points). The following axiom states that the minimum number of points in an intersection of two planes is two.

Axiom $\mathbf{I}_7$. *If two planes α and β have a common point A, then they have another common point B distinct from A.*

An immediate consequence of axioms $\mathbf{I}_7$ and $\mathbf{I}_6$ is that if the planes α and β contain the two distinct points A and B, then they contain the whole line $l = AB$, and we write $\alpha \cap \beta = \{l\}$, again as an equality of sets of points.

The last axiom of incidence states the minimum number of points in the space of any geometry.

Axiom $\mathbf{I}_8$. *There exist at least four points which do not belong to the same plane.*

In the view of this last axiom $\mathbf{I}_8$, we give the following.

Definition 3. *Any number of points are called coplanar if there is a plane which passes through all of them. Otherwise, they are called non-coplanar.*

Example 1. *Axioms $\mathbf{I}_1$–$\mathbf{I}_8$ give rise to a simple model of a space created only with 4 points, 6 lines and 4 planes.*

The model described above can be written as follows. The distinct points are A, B, C, D, and the six lines are given by the following sets of points: $l_{AB} = \{A, B\}$, $l_{AC} = \{A, C\}$, $l_{BC} = \{B, C\}$, $l_{BD} = \{B, D\}$, $l_{CD} = \{C, D\}$, *and* $l_{AD} = \{A, D\}$. *The four planes are* $(ABC) = \{A, B, C\}$, $(ABD) = \{A, B, D\}$, $(ACD) = \{A, C, D\}$, $(BCD) = \{B, C, D\}$, *and the space is* $(ABCD)$.

2.2. First theorems

We study below some immediate consequences of the group of eight axioms of incidence $\mathbf{I}_1$–$\mathbf{I}_8$. Notice that the results we prove below make sense even when applied to the simple model described above.

Theorem 1. *Two distinct lines have at most one common point.*

Proof. Let l_1, l_2 two distinct lines. We distinguish the following two cases.

If $l_1 \cap l_2 = \emptyset$, then they have no point in common, therefore the conclusion of the theorem is true.

If $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$, then let $A \in l_1 \cap l_2$ a point in their intersection. Let us assume, by contradiction, that there is another point $B \in l_1 \cap l_2$, $B \neq A$. In particular,

$A, B \in l_1$, therefore $l_1 = AB$ (axiom $\mathbf{I}_1$). Similarly, $A, B \in l_2$, therefore $l_2 = AB$. Proposition 1 says then that $AB = l_1 = l_2$, in contradiction with the hypothesis that $l_1 \neq l_2$. Therefore, our assumption on the existence of a different point $B \in l_1 \cap l_2$ is false. In conclusion, A is the only common point of the two lines l_1 and l_2. ∎

The previous theorem motivates the following

Definition 3. *Two distinct lines that intersect in exactly one point are called secant lines.*

Figure 1: Two secant lines determine an unique plane

Theorem 2. *Two secant lines determine an unique plane.*

Proof. Let l_1 and l_2 be two secant lines. Theorem 1 asserts that there is an unique point O in their intersection, i.e. $O \in l_1 \cap l_2$. Then there exists a point $A \neq O$, $A \in l_1$ (axiom $\mathbf{I}_3$), and similarly, a point $B \neq O$, $B \in l_2$. Moreover $A \neq B$, via theorem 1.

But $O \in l_1$ and $A \in l_1$, so $OA = l_1$ (proposition 1). An analogous reasoning gives $OB = l_2$. Now, applying proposition 2 for the non-collinear distinct points O, A and B, we deduce the existence and the uniqueness of the plane $\alpha = (OAB)$. Moreover, the plane α contains the lines $OA = l_1$ and $OB = l_2$ (axiom $\mathbf{I}_6$). ∎

Theorem 3. *A line l and a point $O \notin l$ determine an unique plane.*

Figure 2: A plane determined by a line l and an exterior point O

Proof. Let O be a point and l a line such that $O \notin l$. Then there exist two points $A \neq B$, such that $A, B \in l$ (axiom $\mathbf{I}_3$), and via proposition 1, we have $AB = l$. But $O \notin l$, so O, A and B are distinct non-collinear points, and proposition 2 asserts that there is an unique plane $\alpha = (OAB)$, which contains O and $l = AB$ (axiom $\mathbf{I}_6$). Therefore l and O uniquely determine the plane α. ∎

Theorem 4. *Two distinct planes either they have no common point, or they have exactly one line in common.*

Proof. Let us assume that two planes α and β have a non-empty intersection, so they have at least a point in common, say A. Then axiom $\mathbf{I}_7$ affirms that they must have another common point B, and proposition 1 asserts that the two distinct points A and B determine an unique line $l = AB$. Via axiom $\mathbf{I}_6$, every point on the line l is in both planes, so $l \subset \alpha \cap \beta$.

Now, if we assume, by contradiction, that there is another point $C \in \alpha \cap \beta$, distinct from both A and B, and $C \notin l$, then axiom $\mathbf{I}_5$ would confirm that the two planes α and β would coincide, in contradiction with the hypothesis. ∎

We are ready to prove Theorem 5. This fact was in *Hilbert*'s 1899 version of his axiomatic system part of his original axiom $\mathbf{I_7}$ (see [18], p.5). Thus, we point out that this part of the 1899 axiomatic system can be relaxed as one can see here.

Theorem 5. *Every plane contains at least three distinct points.*

Figure 3: A plane contains at least three points: A, D, F

Figure 4: Spatial Desargues' theorem

Proof. Let α be our plane. Since $\alpha \neq \emptyset$, then it contains at least one point A. Moreover, there exists a different point $B \notin \alpha$ (axiom $\mathbf{I}_8$), and so they determine an unique line $l = AB$ (proposition 1).

Axiom $\mathbf{I}_3$ asserts that there exists a different point $C \notin l$. From proposition 2 the points A, B, C determine an unique plane, say $\beta = (ABC)$. Then $A \in \beta \cap \alpha$, so there exists another point $D \in \beta \cap \alpha$, $D \neq A$ (axiom $\mathbf{I}_7$). In particular, $D \in \alpha$, and $\beta = (ABD)$.

We repeat the reasoning above for the plane β: there is a point $E \notin \beta$ (axiom $\mathbf{I}_8$), so the points A, B, E determine a plane γ (proposition 1). Then $A \in \gamma \cap \alpha$, so there exists another point $F \in \gamma \cap \alpha$, $F \neq A$ (axiom $\mathbf{I}_7$). In particular, $F \in \alpha$, and $\gamma = (ABF)$.

Notice that $D \neq F$, otherwise, $\beta = (ABD) = (ABF) = \gamma$, which is a contradiction with the fact that $E \in \gamma$ but $E \notin \beta$. In conclusion, we obtained three distinct points A, D, F contained in the plane α. ■

2.3. Desargues theorem

The following theorem is attributed to *Desargues* (see e.g. [11], pp. 70-72). What is really interesting to point out is that all we need to prove it are the Axioms of Incidence.

Theorem 6. [Desargues] *Consider two triples of noncollinear points in space A, B, C and A', B', C', all six of them distinct two by two. Suppose that the lines AA', BB' and CC' have a common point Q and that the intersection points $\{M\} = AB \cap A'B'$, $\{N\} = BC \cap B'C'$ and $\{P\} = CA \cap C'A'$ exist. Then the points M, N, P are collinear.*

Proof. Let α be the plane determined by the points A, B and C (axiom $\mathbf{I}_4$), and let β be the plane determined by A', B' and C' (axiom $\mathbf{I}_4$).

Because A and B are points in the plane α then the line AB is included in α, i.e. $AB \subset \alpha$ (axiom $\mathbf{I}_6$). Analogously, $A'B' \subset \beta$. But if $AB \cap A'B' = \{M\}$, then it follows that $M \in \alpha \cap \beta$. Similarly, $N \in \alpha \cap \beta$ and $P \in \alpha \cap \beta$. But the intersection of the two planes α and β is a line (axiom $\mathbf{I}_7$), therefore, M, N and P are collinear points. ■

3. Axioms of order

The axioms of order deal with the undefined relation of *betweenness*, i.e. of a point lying between two other points.

3.1. Introducing the axioms of order

The axioms of order are formulated as follows.

Axiom $\mathbf{O}_1$. *If a point B is between A and C, then A, B, C are three distinct collinear points on a line l, and B is between C and A.*

Note here that the usual Euclidean picture of a point being "to the left" or "to the right" of other points is misleading (see figure 5); the line l has no predefined "orientation". The only correct concept of order among points is defined to be "between".

Figure 5: The point B is between A and C

Figure 6: There is a point M is between A and B

Axiom $\mathbf{O}_2$. *For every pair of distinct points A and B, there is at least another distinct point C such that B is between A and C.*

An immediate consequence of axiom $\mathbf{O}_2$, combined with axiom $\mathbf{I}_3$, is that a line contains at least three points. The axiom can be applied again for the pair $\{A, C\}$, so there exists another point D such that C is between A and D, etc.

Axiom $\mathbf{O}_3$. *Given three arbitrary points on a line, at most one of them is between the other two.*

Notice that the axiom $\mathbf{O}_2$ does not guarantee the existence of a point B between two given ones A and C. This will be proven below in theorem 7. Nevertheless, if we assume that there exists B between A and C, then the axiom $\mathbf{O}_3$ guarantees that A cannot be between B and C, and C cannot be between A and B. Theorem 8 will clarify the situation of three given points on a line.

Axiom $\mathbf{O}_4$ (Pasch). *Let A, B, C be three non-collinear points, and l a line situated in the plane (ABC) which does not pass through any of the points A, B, C. If the line l contains a point which is between A and B, then the line l contains either a point between A and C or a point between B and C.*

We denote by $\overline{ABC}$ when B is on the line AC and B is between A and C, and we will refer to it as the *order* ABC. Note that by axiom $\mathbf{O}_1$, the order $\overline{ABC}$ is the same as the order $\overline{CBA}$.

An immediate consequence of the axioms of order is the following

Theorem 7. *Given two points A and B on a line l, there is a point $M \in l$ such that we have the order $\overline{AMB}$.*

Proof. There exists a point C not on the line AB (axiom $\mathbf{I}_3$). Then there exists a point D (see figure 6) such that we have the order $\overline{ACD}$ (axiom $\mathbf{O}_2$). Similarly, there exists the point E with respect to the order $\overline{DBE}$ (axiom $\mathbf{O}_2$). Then we apply axiom $\mathbf{O}_4$ for the points C, D, E and the line AB, so there exists a point M on the line AB such that we have order $\overline{AMB}$. ■

The previous theorem suggest the following

Definition 4. *The set of points M on the line AB with the property that M is between A and B is called a segment, and it is denoted by $[AB]$. Formally we can write*

$$[AB] = \{M \in AB \,|\, \overline{AMB}\} \cup \{A, B\}$$

The *interior* of the segment $[AB]$ is defined to be the set $[AB] - \{A, B\}$.

Note that the segment $[AB]$, seen as a set of points, is equal to the segment $[BA]$. Moreover, the order $\overline{AMB}$ is equivalent to $M \in [AB] - \{A, B\}$, so the theorem 7 can be reformulated as follows: *the interior of every segment is non-empty.* We have also $[AA] = \{A\}$. Moreover, we can define now one of the most important object of any geometry: the triangle.

Definition 5. *A configuration of three distinct non-collinear points A, B, C is called a triangle, and it is denoted by ΔABC. Moreover, the points A, B, C are called the vertices of the triangle, and the segments determined by each pair of two vertices are called the sides of the triangle.*

The next theorem guarantees the existence and uniqueness of ordering three collinear points. This theorem is important for another reason. In Hilbert's 1899 axiomatic system (see [18], p.6) this property was axiom $\mathbf{II_3}$. By proving it, the present exploration shows how the original axiomatic standpoint can be weakened.

Theorem 8. *Let A, B, C three points on a line l. Then one and only one of the orders $\overline{ABC}$, $\overline{ACB}$ or $\overline{BAC}$ occurs.*

Proof. We assume that we have neither the order $\overline{ACB}$, nor the order $\overline{BAC}$, and we prove that we must have the order $\overline{ABC}$. In our Euclidean intuition, we will prove that if B is not "to the left" of A and not "to the right" of C, then it must be between A and C.

Figure 7: Uniqueness of order on a line

There exists a point $D \notin AC$ (axiom $\mathbf{I}_3$). Then there exists a point $E \in DB$ with the order $\overline{EDB}$ (axiom $\mathbf{O}_2$). Looking at the triangle ΔBEC and the secant line AD, then there is a point F at the intersection of AD and EC, such that we have the order $\overline{EFC}$ (axiom $\mathbf{O}_4$). In the same way, there exists the point $\{G\} = CD \cap AE$, such that we have the order $\overline{AGE}$ (see figure 7).

The line CG is a secant line for the triangle ΔAEF, as we have the order $\overline{ADF}$. Moreover, considering the triangle ΔAFC and the secant line DE, it follows the order $\overline{ABC}$. ■

The following theorems establish incidence relations between a line and a triangle. Historically they are attributed to *Moritz Pasch*, whose influential works (see for example [31, 32]) have been one century ago in the center of attention of many authors interested in foundations of geometry.

Theorem 9. *If a line l does not intersect two sides of a triangle ΔABC, then it cannot intersect the third one, either.*

Proof. Without loss of generality, we can assume l does not intersect neither AC nor BC. By contradiction, let us assume l intersects AB, so l contains a point between A and B. Then the axiom $\mathbf{O}_4$ affirms that l must contain either a point between A and C, or a point between B and C, in contradiction with the hypothesis. ■

Theorem 10. *If a line l intersects two sides of a triangle ΔABC, then it cannot intersect the third one.*

Proof. Let us assume, by contradiction, that the line l intersects all sides BC, AC, and AB of the triangle ΔABC in respectively D, E, and F. We can assume the order $\overline{EFD}$ on the line l (see figure 8). Let us consider the triangle ΔCDE and the secant line AB, which intersects DE in F.

It follows that AB intersects either DC or EC (axiom $\mathbf{O}_4$). In either case, it follows that AB intersects either AC or BC, respectively, in two points, which means

Figure 8: By contradiction, l intersects all sides of ΔABC

that either $AB = BC$ or $AB = AC$ (axiom $\mathbf{I}_2$), contradiction with the assumption that ΔABC is a triangle. ■

3.2. Quadruples of collinear points

The most important result in this section is Theorem 15. Its proof relies on a sequence of theorems generally attributed to *E. H. Moore* [27]. The role of these theorems is to complete the discussion of order properties in a context that does not include the real numbers.

Let us consider A, B, C, D four collinear points on a line l.

Theorem 11. [Moore] *If A, B, C, D are four points on a line l, and we have the orders $\overline{ABC}$ and $\overline{BCD}$, then it follows the orders $\overline{ACD}$ and $\overline{ABD}$.*

Figure 9: Moore's first theorem

Proof. If we have the orders $\overline{ABC}$ and $\overline{BCD}$, then A, B, C and D are collinear points. Let l be the line containing them. From axiom $\mathbf{I}_3$ it follows that there exists a point $P \notin l$. Then there is a point Q such that we have the order $\overline{BPQ}$ (axiom $\mathbf{O}_2$).

From proposition 1 it follows that the lines CQ and DP are distinct. From the order $\overline{BCD}$, we look now at the triangle ΔBPD and the secant line CQ. Then there exists the point $\{R\} = DP \cap CQ$ (axiom $\mathbf{O}_4$), with the order $\overline{DRP}$. Consider now the triangle ΔBCQ and the secant line AP. Axiom $\mathbf{O}_4$ asserts that there is a point $\{S\} = AP \cap CQ$, with the order $\overline{QSC}$.

Let us look now at the triangle ΔASC and the secant line BQ (here we use the order $\overline{ABC}$), thus there exists a point $\{P\} = AS \cap BQ$, with the order $\overline{APS}$ (axiom $\mathbf{O}_4$).

Considering now the triangle $\overline{ADP}$ with the secant line CQ, we obtain the order $\overline{ACD}$ (axiom $\mathbf{O}_4$).

Therefore, from the orders $\overline{ABC}$ and $\overline{BCD}$ we obtained the order $\overline{ACD}$. Now let us replace A by D and B by C in the proof above. The order $\overline{ABC}$ becomes $\overline{DCB}$, which means we have the order $\overline{BCD}$. Moreover, the order $\overline{BCD}$ becomes $\overline{CBA}$, which means we have the order $\overline{ABC}$. That means that from the previous orders $\overline{ABC}$ and $\overline{BCD}$ we also obtain the desired order $\overline{ABD}$. ■

The following theorem has a similar proof.

Theorem 12. [Moore] *If A, B, C, D are four points on a line l, and we have the orders $\overline{ACD}$ and $\overline{ABC}$, then it follows the orders $\overline{BCD}$ and $\overline{ABD}$.*

The last theorem of *Moore* about quadruples of points on a line is the following.

Theorem 13. [Moore] *Let A, B, C, D be four points on a line l. Then the orders $\overline{ACD}$ and $\overline{BCD}$ exclude the order $\overline{ACB}$.*

Proof. There exist the points $P \notin l$ (axiom $\mathbf{I}_3$) and Q, such that we have the order $\overline{DPQ}$ (axiom $\mathbf{O}_2$). From axiom $\mathbf{O}_4$ for the triangle ΔADP with the secant line QC we deduce the existence of a point R with the order $\overline{ARP}$.

Figure 10: Moore's third theorem

Similarly, for the triangle ΔBPD with the secant line QC, it follows the existence of a point S with the order $\overline{BSP}$. Consider now the triangle ΔABP with the secant line CQ. It follows that $C \notin [AB]$. Therefore, from the order $\overline{BCD}$, it follows the order $\overline{ABC}$, thus we cannot have the order $\overline{ACB}$. ■

Immediate consequences of *Moore*'s theorems are the following results about the interior of segments.

Theorem 14. *There are a (countable) infinite number of points between two distinct points on a line.*

Proof. Let $A, B \in l$. Theorem 7 says that there is a point $C \in [AB]$ such that we have the order $\overline{ACB}$. Similarly, there exist a point $D \in [CB]$. Therefore we have the orders $\overline{ACB}$ and $\overline{CBD}$, and theorem 12 assures that $D \in [AB]$. Obviously, we can continue this argument indefinitely. ■

On the same lines, the following theorem establishes the relationship between the interiors of two segments, one of which is included in the second one.

Theorem 15. *If the points C and D are between A and B, and a point M is between C and D, then M is between A and B.*

Proof. The hypothesis gives us the orders $\overline{ACB}$, $\overline{ADB}$, and $\overline{CMD}$. Let us assume the order $\overline{ACD}$. Note here that the order $\overline{CAD}$ cannot occur (theorem 13).

From the orders $\overline{ACD}$ and $\overline{CMD}$ it follows the order $\overline{AMD}$ (theorem 12), thus $M \in [AD]$. Using the same argument, from the orders $\overline{AMD}$ and $\overline{ADB}$ it follows the order $\overline{AMB}$, so $M \in [AB]$. ■

3.3. Half-lines

In what follows, we introduce the notion of *half-lines* . Let O be a fixed point on a line l and let $A, B \in l$ be two points such that we have the order $\overline{OAB}$. Then we call A and B to be *on the same side of the point* O. This defines a binary relation on the set of points of l.

Theorem 16. *The binary relation defined above is an equivalence relation on the set of points of a line l.*

Proof. Reflexivity is obviously true, as for $A = B$, we have clearly the order $\overline{OAA}$. The symmetry follows from the fact that the order $\overline{OAB}$ is the same as the order $\overline{BAO}$ (axiom $\mathbf{O}_1$). For the transitivity, we apply *Moore*'s theorem 12: if we have $\overline{OAB}$ and $\overline{OBC}$, then it follows the order $\overline{OAC}$. ■

In this context, we can define a half-line as follows.

Definition 6. *The equivalence class of a point on a line l with respect to a fixed point $O \in l$ is called the half-line with vertex (origin) O.*

Remark that the definition of a half-line is not necessarily bounded to *Moore*'s theorems. An equivalent formulation would be as follows: given a pair of points A and B, the half-line starting at A and pointing in the direction of B consists of all points P so that we have either the order $\overline{ABP}$, or the order $\overline{APB}$. A half-line AB is often called a *ray* emanated from A towards B.

Theorem 17. *Let O and A be two points on a line l. The set of points $A' \in l$ such that we have the order $\overline{A'OA}$ forms a half-line with origin O.*

Proof. Let A' be an arbitrary point such that $\overline{A'OA}$. Let B be a representative of the equivalence class defined by A with respect to O, i.e. A and B are on the same side of O. Thus we have the order $\overline{OAB}$. Let $B' \in l$ such that we have the order $\overline{B'OB}$. From the orders $\overline{BAO}$ and $\overline{B'OB}$ it follows the order $\overline{AOB'}$. But the orders $\overline{A'OA}$ and $\overline{B'OA}$ exclude the order $\overline{A'OB'}$ (*Moore*'s theorem 13). Therefore the points A' and B' are on the same side of O, which proves the conclusion of the theorem. ■

The theorem above affirms that a point O on a line l divides the line in two half-lines. For any point $A \neq O$, we denote one half-line by $(OA$, and the other half-line by $(OA'$, also called the *complementary* half-line of $(OA$.

Figure 11: Two complementary half-lines

Remark 1. *The set of points of a half-line is a total ordered set. Indeed, for two points A and B on a half-line, we have either A coincides with B, of we have one of the orders $\overline{OAB}$ or $\overline{OBA}$ (theorem 8). If we have the order $\overline{OAB}$, we say A precedes B. Therefore, in view of this total ordering, for any two distinct points A and B on a half-line, either A precedes B or B precedes A.*

In view of this remark, we can arrange any finite set of points on a line l in the order of their precedence. Moreover, if we denote the ordered points by $A_1, A_2, \ldots$, then for any $i < j < k$ we have the order $\overline{A_i A_j A_k}$. This proves the following:

Theorem 18. *There is an order preserving, one-to-one correspondence between any set of n points on a line l and the set of natural numbers $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

3.4. Half-planes

Similarly as in the case of half-lines, one can introduce the following binary relation of the set of points in a plane.

Definition 7. *If l is a line in a plane π and A, B are two points in π such that $[AB] \cap l = \emptyset$, then we say that the points A and B are on the same side of the plane π with respect to the line l. This defines a binary relation on the set of points of the plane π.*

As before, we prove the following:

Theorem 19. *The binary relation defined above is an equivalence relation.*

Proof. Reflexivity and symmetry are obviously true. We have to prove the transitivity of this relation. Let A, B and B, C on the same side of the plane π with respect to the line l. If follows that the intersections of l with $[AB]$, respectively $[BC]$, are empty. From theorem 9 it follows that $l \cap [AC] = \emptyset$, so the points A, C are on the same side of the plane with respect to the line l. ■

In view of the theorem above, we give the following:

Definition 8. *Let l be a fixed line in a plane π and a point $A \in \pi - l$. The equivalence class of A with respect to the line l is defined to be the half-plane determined by A and l. The line l is called the border of this half-plane.*

Then we have the following.

Theorem 20. *Let l be a fixed line, and let $A \notin l$. Then the set of points A' with the property that the segment $[AA']$ intersects the line l forms a half-plane of border l. This half-plane is called the complementary half-plane of the half-plane determined by l and A.*

Note that every line l in a plane, divides the plane in two half-planes, both with border l.

3.5. Angles

Definition 9. *An angle is defined to be a pair of two half-lines h and k with the same origin O, denoted by $\sphericalangle(hk)$. The point O is called the vertex of the angle, and the half-lines h and k are called the sides of the angle.*

If $h = (OA$ and $k = (OB$ are two half-lines defined by three non-collinear points O, A and B (O is the vertex of the angle), then we will also denote the angle $\sphericalangle(hk)$ by $\sphericalangle AOB$.

Figure 12: An angle $\angle(hk) = \angle AOB$

Let us consider an angle $\sphericalangle(hk)$ in a plane π. Then there are two distinguished half-planes: one is determined by the underlying line of the half-line h and the points of the half-line k, and, similarly, the other one is determined by the underlying line of the half-line k and the points of the half-line h.

Definition 10. *We call the interior of the angle $\sphericalangle(hk)$, the intersection of the two half-planes above. The exterior of the angle $\sphericalangle(hk)$ consists of all the points in the plane which are neither in the interior, nor on the sides of the angle $\sphericalangle(hk)$.*

In a similar fashion, one can define the interior of a triangle as follows.

Definition 11. *We call the interior of the triangle ΔABC, the intersection of the interiors of its angles.*

Remark 2. *Let us consider n half-lines with common vertex O and assume that there exists a line $l \not\ni O$ which intersects all of them. According to theorem 18, we can order all the intersection points ($\overline{A_1A_2A_3}$, etc.). This gives us the notion of a half-line being between two other half-lines, and implicitly an order on the set of half-lines.*

The following theorem is usually known as the crossbar theorem, or, sometimes, as the transversal theorem. In the present approach, the proof relies on axiom O_4, *Pasch*'s axiom.

Theorem 21. [Crossbar Theorem] *Let $\sphericalangle(hk)$ be an angle of vertex O. Let $A \in h$ and $B \in k$ two points different than O, and T a point in the interior of the angle $\sphericalangle(hk)$. Then the half-line $(OT$ intersects the segments $[AB]$.*

Proof. Denote by H_A the half-plane determined by OB and the point A. Consider a point A' on the complementary half-line of $(OA$, and $H_{A'}$ the half-plane determined by OB and the point A'.

Figure 13: The crossbar theorem

We apply *Pasch*'s axiom $\mathbf{O}_4$ for the triangle $\Delta AA'B$ and the half-line $(OT$, which intersects AA' in O. Then $(OT$ should intersect either $[AB]$ or $[A'B]$. By contradiction, we assume it intersects $[A'B]$ in a point denoted by L. It follows that

$$L \in H_{A'}. \tag{1}$$

In the same time, $(OT$ is included in the interior of $\sphericalangle(hk)$. Therefore

$$L \in (OT \subset H_A. \tag{2}$$

The relations (1) and (2) are contradictory. As a final remark, we can observe that the complementary half-line of $(OT$, say $(OT'$ is included in the interior of the opposite angle of $\sphericalangle AOB$, say $\sphericalangle A'OB'$, therefore it cannot intersect neither $[A'B]$ nor $[AB]$, because they empty intersection with the interior of $\sphericalangle A'OB'$. ■

4. Axioms of congruence

We introduce below the axioms of congruence and we study their immediate consequences. The congruence notion we introduce below is actually an equality notion, but it is called different just to make distinction between equality of real numbers and equality of geometric objects. The relationship between the set of real numbers and geometry is addressed later on.

The formulation of these axioms is after *A. Rosenthal* [40, 41], which has considerably simplified the original *Hilbert*'s formulation of Axiom E_4, by omitting the symmetry and transitivity properties of the congruence of angles. These properties can be actually proved from the axioms below (see Corollary 3).

4.1. Presenting the axioms of congruence

The following axioms introduce the concept of *congruence* (equality) of segments and angles. The notion of congruence is written using the special symbol $\equiv$, in order to elliminate any confusion between this geometric notion with the equality notion from set or number theories. We will reserve the equality symbol $=$ for when we define the *values* of segments and angles.

Axiom E$_1$. *If A and B are two points on a line l, and A' is a point on a line l', where l' is not necessarily distinct from l, then there exists a point B' on l' such that $[AB] \equiv [A'B']$. For every segment $[AB] \equiv [BA]$.*

As we can see from the previous axiom, the congruence $[AB] \equiv [A'B']$ is provided by the ability to construct the point B' on the line l' with the requested property.

Axiom E$_2$. *If $[A'B'] \equiv [AB]$ and $[A''B''] \equiv [AB]$, then $[A'B'] \equiv [A''B'']$.*

Note that this axiom is not the transitivity property of congruence of segments. Transitivity will be proved in theorem 22. The next axiom establishes the additivity of the congruence of segments.

Axiom E$_3$. *Let $[AB]$ and $[BC]$ be two segments of a line l, without common interior points, and let $[A'B']$ and $[B'C']$ be two segments without common interior points on a line l', where l' is not necessarily distinct from l. If $[AB] \equiv [A'B']$ and $[BC] \equiv [B'C']$, then $[AC] \equiv [A'C']$.*

The next axiom defines the congruence of angles in a plane.

Axiom E$_4$. *Let $\sphericalangle(hk)$ be an angle in a plane π, and let l' be a line in a plane π', where π' is not necessarily distinct from π. Let h' be a half-line of l', where h' is not necessarily distinct from h. Then in one of the half-planes determined by l', there uniquely exists a half-line k', such that $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$. For every angle, $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(hk)$ (reflexivity), and $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(kh)$ (symmetry).*

As above, the congruence $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$ is provided by the ability to construct the angle $\sphericalangle(h'k')$ in one of the half-planes of π'.

The next axiom is establishing conditions for congruences of angles of triangles. For an angle of a triangle $\triangle ABC$, say $\sphericalangle ABC$, we understand the angle determined by the half-lines $(BA$ and $(BC$.

Axiom E$_5$. *Let $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$ be two triangles. If $[AB] \equiv [A'B']$,*

$[AC] \equiv [A'C']$, *and* $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$, *then*

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \textit{and} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'.$$

The first two congruence axioms give the following result

Theorem 22. *The congruence relation for segments is an equivalence relation.*

Proof. We prove first the following statement: if we have two segments $[AB] \equiv [A'B']$, then $[AB] \equiv [B'A']$. Indeed, we have $[B'A'] \equiv [A'B']$ (axiom $\mathbf{E}_1$). Therefore $[AB] \equiv [A'B']$ and $[B'A'] \equiv [A'B']$, so, using axiom $\mathbf{E}_2$, it follows $[AB] \equiv [B'A']$.

Reflexivity now follows from axiom $\mathbf{E}_1$ ($[AB] \equiv [BA]$) and, from the statement above, it follows $[AB] \equiv [AB]$.

Let us prove the symmetry. We have $[A'B'] \equiv [A'B']$, via the reflexivity proved above. Moreover, if $[AB] \equiv [A'B']$ it follows that $[A'B'] \equiv [AB]$, via axiom $\mathbf{E}_2$. It is very important to notice that only from this point on, we have the right to assert that $[AB] \equiv [CD]$ is the same as $[CD] \equiv [AB]$.

For transitivity, let us consider $[AB] \equiv [A'B']$, and $[A'B'] \equiv [A''B'']$. But the congruence $[A'B'] \equiv [A''B'']$ implies the congruence $[A''B''] \equiv [A'B']$ (symmetry). Then, from $[AB] \equiv [A'B']$ and $[A''B''] \equiv [A'B']$, it follows the congruence $[AB] \equiv [A''B'']$ (axiom $\mathbf{E}_2$). ■

The congruence relation, being an equivalence relation, gives rise to a partition of the set of all segments in disjoint equivalence classes. This fact allows us to define all segments in an equivalence class to have the same *value*. We denote the value of a segment $[AB]$ by simply AB. Note that the same notation AB is also used for the line which passed through the points A and B. In general it is clear from the context if we refer to the line AB or to the value of the segment $[AB]$. Moreover, the congruence $[AB] \equiv [CD]$ can be also written as an equality of values, $AB = CD$, when there is no danger of confusion between equivalence classes and their representatives. In what follows, going back and forth between congruence of segments (or angles) and equality of their values, technically requires one to prove the independence of chosen representatives in a given equivalence class. For the simplicity of geometric arguments, we will omit these technical details.

Theorem 23. *Let* $(OA$ *be a half-line with origin* O. *If* C *and* C' *are two points on* $(OA$ *such that* $[OC] \equiv [OC']$, *then the points* C *and* C' *coincide.*

Proof. Without loss of generality, we can assume the order $\overline{OCC'}$. Let I be a point which does not belong to the half line $(OA$ (axiom $\mathbf{I}_3$). Then, in the triangles ΔOCI and $\Delta OC'I$, we have: $[OC] \equiv [OC']$, $[OI] \equiv [OI]$ and $\sphericalangle IOC \equiv \sphericalangle IOC'$.

Figure 14: If $OC \equiv OC'$, then $C = C'$

From axiom $\mathbf{E}_5$ it follows $\sphericalangle OIC \equiv \sphericalangle OIC'$, therefore the half lines $(IC$ and $(IC'$ coincide as sets (axiom $\mathbf{E}_4$). This implies $(IC \cap (OA = (IC' \cap (OA$, so C and C' coincides. ■

Sometimes we write $C = C'$ whenever C and C' coincide. Let us notice that the equal sign which expresses the coincidence is not the same as the usual symbol $=$ of equality of numbers.

Note that axiom $\mathbf{E}_3$ guarantees the additivity of the values of segments on same same line. Indeed, if A, B, C and A', B', C' are points on the lines l and l', respectively, with orders $\overline{ABC}$ and $\overline{A'B'C'}$, respectively, such that $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$, then if follows directly from axiom $\mathbf{E}_3$ that $[AC] \equiv [A'C']$. We can formally write the following equalities in terms of values of segments: $AC = AB + BC$ and $A'C' = A'B' + B'C'$.

Theorem 24. *The congruence relation for segments preserves the order relation.*

Proof. Consider the points A, B, C on a line l, with the property that B is an interior point of the segment $[AC]$, i.e. we have the order $\overline{ABC}$. Moreover, let us consider the points A', B', C' on another line l', such that $[AB] \equiv [A'B']$. $[AC] \equiv [A'C']$, and $B'C'$ are on the same half-line of vertex A'.

Figure 15: Congruence of segments preserves the order

If we show that B' is interior to $[A'C']$, and $[B'C'] \equiv [BC]$, then it will follow the order $\overline{A'B'C'}$, which is the conclusion of our theorem. Indeed, let us assume the existence of another point $C'' \in l'$ with order $\overline{A'B'C''}$, such that $[B'C''] \equiv [BC]$. But $[A'B'] \equiv [AB]$ and $[B'C''] \equiv [BC]$, so, by additivity, it follows $[A'C''] \equiv [AC]$. But $[A'C'] \equiv [AC]$, thus $[A'C''] \equiv [A'C']$, and then, according to theorem 23, it follows that $C' = C''$. Thus we have the desired order $\overline{A'B'C'}$. ■

In view of the results above, one can define the *difference* operation among segments. Indeed, if $[AB]$ and $[AC]$ are two segments on a line l, such that the have order $\overline{ABC}$, then the difference of the values of $[AC]$ and $[AB]$ is the value of the segment $[BC]$, respecting the additivity property $AB + BC = AC$. Therefore we can write $AC - AB = BC$.

4.2. Congruence of triangles

Definition 12. *Two triangles $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$ are called congruent, and we denote by $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, if they have congruent sides and congruent angles, respectively.*

Concretely, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ if the following six congruences are respected:

$$[AB] \equiv [A'B'], \quad [BC] \equiv [B'C'], \quad [CA] \equiv [C'A'],$$

$$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C', \quad \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C', \quad \sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle B'C'A'.$$

When there is no danger of confusion, we denote by $\sphericalangle A$ the angle $\sphericalangle BAC$.

The first result about congruence of triangles is the following.

Theorem 25. *If a triangle $\triangle ABC$ has two congruent sides, then it has two congruent angles, too. In this case, we call the triangle $\triangle ABC$ to be isocelles.*

Proof. Without loss of generality, we can assume $[AB] \equiv [AC]$. Then the triangles $\triangle BAC$ and $\triangle CAB$ are in the conditions of axiom E_5, thus$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$. ■

The next theorem is the first important congruence case of triangles.

Theorem 26. [SAS] *Let $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$ be two triangles, such that $[AB] \equiv [A'B']$, $[AC] \equiv [A'C']$, and $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$. Then $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. This congruence case is called Side-Angle-Side* (SAS).

Proof. Using axiom $\mathbf{E}_5$, we have $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ and $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$. The only congruence left to show is $[BC] \equiv [B'C']$. Consider a point C'' on the half-line $(B'C'$ such that $[BC] \equiv [B'C'']$ (axiom $\mathbf{E}_1$). Consider now the triangles $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C''$. From $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C'']$, and $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AB'C''$, it follows from axiom $\mathbf{E}_5$ that $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C''$. From the hypothesis, we have $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$. Then we have C' and C'' such that the angles $\sphericalangle C'A'B'$ and $\sphericalangle C''A'B'$ are congruent. Since C' and C'' are in the same half-plane with respect to the line $A'B'$, it follows from axiom $\mathbf{E}_4$ that $(A'C'$ and $(A'C''$ coincide, thus $C' = C''$. ■

The next theorem establishes the second case of triangle congruence.

Theorem 27. [ASA] *Let $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$ be two triangles, such that $[BC]\equiv[B'C']$, $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle A'B'C'$ and $\sphericalangle ACB\equiv\sphericalangle A'C'B'$. Then $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$. This congruence case is called Angle-Side-Angle* (ASA).

Proof. Let $A'' \in (B'A'$ such that $[BA] \equiv [B'A'']$. Consider the triangles $\triangle BAC$ and $\triangle B'A''C'$. Axiom $\mathbf{E}_5$ guarantees that $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle B'C'A''$. Since A' and A'' are in the same half-plane with respect to $B'C'$, it follows that $(C'A'$ and $(C'A''$ coincide. Therefore, $A' = A''$. We apply theorem 26 for the triangles $\triangle ABC$ and $\triangle A'B'C'$, where we now have $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$ and $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$. ■

Theorem 28. [Additivity of Angles] *If $(hl) \equiv (h'l')$, and $(lk) \equiv (l'k')$, where l and l' are half-lines interior to the angles $\sphericalangle(hk)$ and $(h'k')$, then $(hk) \equiv (h'k')$.*

Proof. Let H and K be two points such that $H \in h$ and $K \in k$. Using theorem 21 from the previous section, it follows that $l \cap [HK] \neq \emptyset$. Let $\{L\} = = l \cap [HK]$. Now take $H' \in h'$ and $L' \in l'$ such that $[OH] \equiv [O'H']$ and $[OL] \equiv [O'L']$, and take K' on the half-line complement to $(L'H'$ such that $[L'K'] \equiv [LK]$.

Figure 16: Additivity of angles

Notice that the congruence $\triangle OHL \equiv \triangle O'H'L'$ (case SAS) implies $[HL] \equiv [H'L']$ and $\sphericalangle OHL \equiv \sphericalangle O'H'L'$. But the segments $[HL], [LK]; [H'L'], [L'K']$ satisfy the conditions of axiom $\mathbf{E}_3$, thus the triangles $\triangle OHK$ and $\triangle O'H'K'$ are congruent (case SAS). It follows that $\sphericalangle HOK \equiv \sphericalangle H'O'K'$, thus using axiom $\mathbf{E}_4$, it follows that the half-lines $(O'K'$ and k' coincide. ■

Corollary 1. *In the same hypothesis as in Theorem* 28, *if $\sphericalangle(hk) \equiv \sphericalangle(h'k')$, and $\sphericalangle(hl) \equiv \sphericalangle(h'l')$, then $\sphericalangle(lk) \equiv \sphericalangle(l'k')$.*

Theorem 29. *Consider the triangles $\triangle ABC$ and $\triangle A'BC$ such that A and A' are in different half-planes with respect to the line BC. If $[AB] \equiv [A'B]$ and $[AC] \equiv [A'C]$, then triangles $\triangle ABC$ and $\triangle A'BC$ have congruent angles, respectively.*

Proof. Considering the segments $[AA']$ and $[BC]$, we distinguish two cases: $[AA'] \cap [BC] \neq \emptyset$ or $[AA'] \cap [BC] = \emptyset$ (see Figure 17).

Figure 17: The triangles $\triangle ABC$ and $\triangle A'BC$ have congruent angles

In each one of these cases, we apply Theorem 25 for the triangles $\triangle ABA'$, and $\triangle ABA'$, respectively. The conclusion of the theorem follows then immediately from Theorems 28 and 1. ■

Now we are in the right context to prove the following side-side-side (SSS) congruence theorem of triangles. Note that in the proof we do not use neither the symmetry, nor the transitivity of the equality relation for angles! These properties are an immediate corrolary to the following theorem.

Theorem 30. [SSS] *Let* $\triangle ABC$ *and* $\triangle A'B'C'$ *be two triangles, such that* $[AB] \equiv [A'B']$, $[BC] \equiv [B'C']$, *and* $[CA] \equiv [C'A']$. *Then* $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. *This congruence case is called Side-Side-Side* (SSS).

Proof. By contradiction, we assume $\sphericalangle ABC \not\equiv \sphericalangle A'B'C'$. Consider the half-line $(B'D'$ such that $[B'D'] \equiv [AB]$ and $\sphericalangle D'B'C' \equiv \sphericalangle ABC$. But $[BC] \equiv [B'C']$,

Figure 18: The congruence case SSS

$[BA] \equiv [B'D']$, and $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle D'B'C'$, thus $\triangle ABC \equiv \triangle D'B'C'$ (case SAS). It follows that $[AC] \equiv [D'C']$.

Let us construct a point E' in the complementary half-plane defined by the line $B'C'$ and the point A', such that $[B'E'] \equiv [B'D']$ and $\sphericalangle E'B'C' \equiv \sphericalangle C'B'D'$. It follows that $\triangle D'B'C' \equiv \triangle E'B'C'$ (case SAS), thus $[E'C'] \equiv [D'C'] \equiv [AC] \equiv$ $\equiv [A'C']$. Similarly, $[E'B'] \equiv [B'D'] \equiv [AB] \equiv [A'B']$.

Then the triangles $\Delta A'B'C'$ and $\Delta E'B'C'$ are congruent, according to theorem 29. Then $\sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle E'B'C'$, so in the half-plane determined by $B'C'$ and A' we have two distinct half-lines $(B'D'$ and $(B'A'$, such that they determine $\sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle D'B'C'$, in contradiction with axiom $\mathbf{E}_4$. ■

Corollary 2. *The congruence relation for triangles is an equivalence relation.*

Corollary 3. *The congruence relation for angles is an equivalence relation.*

The fact that we have proved these corollaries shows that the axioms in *Hilbert*'s axiomatic system have been weakened, which was the goal of our analysis. More precisely, we have seen that part of axiom $\mathbf{I_7}$ from [18] can be proved as we did in Theorem 5. We have seen that *Hilbert*'s 1899 axiom $\mathbf{II_3}$ is proved in Theorem 8. Also, *Hilbert*'s axiom $\mathbf{II_4}$ is obtained from *Moore*'s theorems from section 5. *Hilbert* corrected this redundancy in his axiomatic system, by eliminating this axiom in his 1902 version (see [19], p.544). Another interesting result of our analysis is that the first axiom of congruence in [18] can be actually proved in Theorem 22. Furthermore, we have seen that the weakened form of the axioms of equality $\mathbf{E_1} - \mathbf{E_5}$ are sufficient to prove the SSS congruence case in Theorem 30.

We express our hope that our presentation has met the reader's expectations for an exploration of *David Hilbert*'s framework and ideas. As *M. J. Greenberg* points out in [15], p.xi, *Albert Einstein* stated that without this new conception of geometry, as it was raised at the beginning of the XX-th century, he would not have been able to develop the theory of relativity. Thus, we can say that the overall impact of *Hilbert*'s work on the developments from the last century was meaningful in many areas.

References

[1] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea,* Gior. Mat. Bataglini, **6**, 1868, pp. 84–312.

[2] G. D. Birkhoff, *A set of postulates for plane geometry,* Annals of Math., **33**, 1932, pp. 329–345.

[3] G. D. Birkhoff and R. Beatley, *Basic Geometry,* Third edition, Amer. Math. Soc., 2000 (originally published in 1940).

[4] H. I. Blau, *Foundations of Plane Geometry,* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2003.

[5] I. Bolyai, *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unqual decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica,* Marosvásárhely, 1832.

[6] W. G. Boskoff, *Hyperbolic geometry and Barbilian spaces,* Istituto per la Ricerca di Base. Series of Monographs in Advanced Mathematics, Hadronic Press, Inc., Palm Harbor, FL, 1996.

[7] H. Busemann, *The Geometry of Geodesics*, Dover Publ. Inc., Mineola New York, 2005 (first edition at Academic Press, 1955).

[8] W. S. Contro, *Von Pasch zu Hilbert*, Arch. History Exact Sci., **15** (3), 1975/76, pp. 283–295.

[9] H. S. M. Coxeter - *The Real Projective Plane*, Third Edition, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1992.

[10] H. S. M. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry*, Sixth Edition, Math. Assoc. Amer., 1998.

[11] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Math. Assoc. Amer., 1967.

[12] Euclid, *The Elements*, Editor: D. Densmore, Translation by T. L. Heath, Green Lion Press, 2002.

[13] A.D. Gottlier and J. Lipman, *Group-theoretic axioms for projective geometry,* Canad. J. Math. **43**, 1991, pp. 89–107.

[14] M. J. Greenberg, *Aristotle's axiom in the foundations of geometry,* J. Geom., **33**, 1988, pp. 53-57.

[15] M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Freeman & Co., Third Edition, 1993.

[16] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[17] R. Hartshorne, *Non-Euclidean III.36*, Amer. Math. Monthly, **110**, 2003, pp. 495-502.

[18] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry,* Authorized translation by E. J. Townsend, The Open Court Publ. Co., La Salle, Illinois, 1902. On the web:
http://www.gutenberg.org/files/17384/17384-pdf.pdf

[19] D. Hilbert, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*, 1891-1902, (M. Hallett, U. Majer, editors) Springer-Verlag, 2004.

[20] H. C. Kennedy, *The origins of modern axiomatics: Pasch to Peano*, Amer. Math. Monthly, **79**, 1972, pp. 133–136.

[21] J. Lipman, *Definition of affine geometry by a group of transformations,* Canad. Math. Bull., **4**, 1961, pp. 265–278.

[22] N. I. Lobachevsky, *Geometrical Researches on the Theory of Parallels*, English version by G. B. Halsted, Austin, Texas, 1891.

[23] S. MacLane, *Metric Postulates for Plane Geometry*, Amer. Math. Monthly, **66**, 1959, pp. 543–555.

[24] N. N. Mihăileanu, *Complementary Lessons of Geometry* (in Romanian), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucharest, 1976.

[25] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: The first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), **6**, 1982, pp. 9–24.

[26] R. Miron and D. Brânzei, *The Foundations of Arithmetics and Geometry* (in Romanian), Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest, 1983.

[27] E. H. Moore, *On the Projective Axioms of Geometry*, Trans. Amer. Math. Soc., **3**, 1902, 142–158. Erratum in Trans. Amer. Math. Soc., **3**, 1902, p. 501.

[28] R. L. Moore, *A Note Concerning Veblen's Axioms for Geometry*, Trans. Amer. Math. Soc., **13**, 1912, pp. 74–76.

[29] M. H. Noronha, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.

[30] L. Ornea and A. Turtoi, *An Introduction to Geometry* (in Romanian), Fundaţia Theta, Bucharest, 2000.

[31] M. Pasch, *Die Begriffswelt des Mathematikers in der Vorhalle der Geometrie*, F. Meiner, Leipzig, 1922.

[32] M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, J. Springer, Berlin, 1926.

[33] V. Pambuccian, *Zum Stufenaufbau des Parallelenaxioms*, J. Geom., **51**, 1994, pp. 79-88.

[34] V. Pambuccian, *Constructive axiomatizations of plane absolute, Euclidean and hyperbolic geometry*, Math. Log. Q., **47**, 2001, pp. 129-135.

[35] V. Pambuccian, *Euclidean geometry problems rephrased in terms of midpoints and point-reflections*, Elem. Math. **60**, 2005, pp. 19–24.

[36] G. Peano, *I principii di geometria*, Torino, 1889.

[37] G. Peano, *Sui fondamenti della geometria,* Rivista di Matematica, **4**, 1894, pp. 51–59.

[38] G. Pickert, *Habilitation und VorlesungstŠtigkeit von M Pasch,* Mitt. Math. Sem. Giessen, **146**, 1980, pp. 46–57.

[39] G. Pickert, *Inzidenz, Anordnung und Kongruenz in Paschs Grundlegung der Geometrie*, Mitt. Math. Sem. Giessen, **146**, 1980, pp. 58–81.

[40] A. Rosenthal, *Über das dritte Hilbertsche Axiom der Verknüpfung,* Math. Ann., **69**, 1910, no. 2, pp. 223–226.

[41] A. Rosenthal, *Vereinfachungen des Hilbertschen Systems der Kongruenzaxiome*, Math. Ann., **71**, 1911, no. 2, pp. 257–274.

[42] P J. Ryan, *Euclidean and Non-Euclidean geometry, an analytic approach*, Cambridge Univ. Press, 1986.

[43] B. Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry*, Routledge, London and New York, 1996.

[44] R. W. Sharpe, *Differential Geometry. Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program,* Second corrected printing, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2000.

[45] E. Snapper, *An affine generalization of the Euler line*, Amer. Math. Monthly, **88**, 1981, pp. 196–198.

[46] S. Stahl, *The Poincaré Half-Plane, A gateway to modern geometry*, Jones and Bartlett Publ., Sudbury, 1993.

[47] J. Stillwell, *Mathematics and Its History*, Fifth corrected printing, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1999.

[48] M. Toepell, *On the origins of David Hilbert's Grundlagen der Geometrie*, Archive for History of Exact Science, **35** (4), 1986, pp. 329–344.

[49] R. J. Trudeau, *The Non-Euclidean Revolution*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[50] O. Veblen, *A System of Axioms for Geometry*, Trans. Amer. Math. Soc., **5**, 1904, pp. 343–384.

[51] G. Venema, *The Foundations of Geometry*, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2006.

[52] H. Weyl, *David Hilbert and his mathematical work*, Bull. Amer. Math. Soc., **50**, 1944, pp. 612–654.

[53] H. E. Wolfe, *Introduction to Non-Euclidean Geometry*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1945.

[54] R. Zach, *Hilbert's Program Then and Now*, http://xxx.lanl.gov, 0508572, 25 Aug. 2005.

Dep. of Mathematics
and Computer Science,
Univ. Ovidius
Constanţa, Romania.
boskoff@univ-ovidius.ro

Dep. of Mathematics,
California State Univ.
at Fullerton, Fullerton,
CA, 92834-6850, U.S.A.
bsuceava@fullerton.edu

Dep. of Mathematics
and Computer Science,
Chapman University,
One University Drive,
Orange,
CA 92866, U.S.A.
avajiac@chapman.edu

Aproximarea polinomială uniformă a funcţiilor continue [2]

DE ANDREI VERNESCU

(continuare din nr. 4/2007)

Abstract

In this introductory expository survey we present the principal problems of the uniform polynomial approximation of the continuous functions.

Key words: Interpolation, polynomial, convergence, theorem of Weierstrass.
M.S.C.: 41A10, 41A25, 41A36, 41A50, 41A80

Partea a doua

4. Alţi operatori de aproximare

Introducerea, de către *S. N. Bernstein*, a polinoamelor care îi poartă astăzi numele a însemnat totodată şi introducerea unui şir de operatori $(B_n)_n$, anume operatorii $B_n : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$,[1)] definiţi de egalitatea (3.1). Aceşti operatori sunt liniari, adică

$$B_n(\alpha f + \beta g) = \alpha B_n f + \beta B_n g,$$

[1)] Utilizarea intervalului $[0,1]$ în locul unui interval oarecare $[a,b]$ nu duce la o micşorare a generalităţii deoarece funcţia $\varphi : [0,1] \to [a,b]$, $\varphi(t) = (b-a)t + a$, $t \in [0,1]$ constituie o bijecţie strict crescătoare, în plus, chiar de clasă C^∞, între cele două intervale. (N.A.)

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ şi pozitivi, adică, dacă $f \geq 0$ (i.e. $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0,1]$), atunci $B_n f \geq 0$. Din liniaritate şi pozitivitate rezultă imediat şi proprietatea de monotonie: dacă $f \leq g$, atunci $B_n f \leq B_n g$. Polinoamele lui *Bernstein* au fost intens studiate; există monografii dedicate acestora, ca, de exemplu, cea a lui *G. G. Lorentz* [10], cât şi articole, din care menţionăm în special pe cele ale acad. *D. D. Stancu* [24], [29], cât şi [4].

După apariţia operatorului de aproximare al lui *Bernstein*, au fost definiţi şi alţi operatori de aproximare. Menţionăm câţiva dintre cei mai importanţi.

(a) *Operatorii Mirakyan-Favard-Szasz.* Fie $k \in \mathbb{N}$; notăm cu $\mathcal{C}_k([0,\infty))$ clasa tuturor funcţiilor $f \in \mathcal{C}([0,\infty))$ cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{1+x^k}$ există şi este finită. Operatorii $S_n : \mathcal{C}_2([0,\infty)) \to \mathcal{C}([0,\infty))$:

$$(S_n f)(x) = \mathrm{e}^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{4.1}$$

au fost introduşi de către *G. M. Mirakyan* [16] în 1941 şi aprofundaţi apoi de *J. Favard* [6] în 1944 şi *O. Szász* [31] în 1950.

(b) *Operatorii lui V. A. Baskakov* [2], introduşi în 1957,

$$V_n : \mathcal{C}_2([0,\infty)) \to \mathcal{C}([0,\infty))$$

sunt definiţi de egalitatea

$$(V_n f)(x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{4.2}$$

(c) *Operatorii lui Meyer-König şi Zeller* [15], 1960, după o uşoară modificare făcută de *E. W Cheney* şi *A. Sharma* [4], în 1964, sunt $Z_n : \mathcal{B}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$:

$$(Z_n f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (1-x)^{n+1} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right), \tag{4.3}$$

unde s-a notat cu $\mathcal{B}([0,1])$ clasa funcţiilor mărginite pe intervalul $[0,1]$.

(d) *Operatorii lui Cheney-Sharma* [4] (numiţi uneori şi *Bernstein-Cheney-Sharma*). Fie $(t_n)_n$ un şir de numere reale pozitive. Operatorii *Cheney-Sharma*, $G_n : \mathcal{C}([0,\infty)) \to \mathcal{C}([0,\infty))$, sunt definiţi de egalitatea

$$(G_n f)(x) = \frac{1}{(1+nt_n)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x(x+kt_n)^{k-1}(1-x+(n-k)t_n)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{4.4}$$

e) *Un operator al lui Stancu.* În lucrarea [25] din 1968, utilizând repartiţia *Markov-Pólya*, acad. *D. D. Stancu* a definit, pe cale probabilistică, operatorii $S_n^{<\alpha>} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$:

$$(S_n^{<\alpha>} f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x(x+\alpha)(x+2\alpha)\cdot\ldots\cdot(x+(n-1)\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\cdot\ldots\cdot(1+(n-1)\alpha)} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{4.5}$$

unde $\alpha \geq 0$ (parametrul α putând depinde eventual de n). Dacă $\alpha = 0$, atunci se regăseşte operatorul lui *Bernstein*. Deci acest operator *Stancu* este o generalizare a operatorului *Bernstein*.

f) *Alt operator al lui Stancu.* O generalizare în alt sens a operatorului *Bernstein* a fost dată de acad. *D. D. Stancu* în lucrarea [26] din 1969, anume $P_n^{<\alpha,\beta>} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$:

$$\left(P_n^{<\alpha,\beta>} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), \tag{4.6}$$

unde $0 \leq \alpha \leq \beta$. Acest operator constituie o nouă generalizare a operatorului lui *Bernstein*, care se regăseşte pentru $\alpha = \beta = 0$.

În lucrarea [27], acad. *D. D. Stancu* a efectuat o sinteză a utilizării metodelor probabilistice pentru construirea operatorilor de aproximare uniformă a funcţiilor continue.

Ulterior, câţiva operatori de aproximare au fost construiţi şi de alţi reprezentanţi ai şcolii româneşti de teoria aproximării, conduse de către acad. *D. D. Stancu*.

5. Teorema Bohman-Popoviciu-Korovkin

Un moment foarte important în dezvoltarea teoriei operatorilor de aproximare l-a constituit descoperirea de către *T. Popoviciu* [20] în 1950 şi *H. Bohman* [3] în 1952 a unui criteriu deosebit de util, de stabilire a convergenţei uniforme

$$L_n f \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{(unif)}} f$$

a imaginilor unui şir de operatori $L_n : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ asupra unei funcţii oarecare $f \in \mathcal{C}([a,b])$ către funcţia f (altfel spus, a şirului de operatori $(L_n)_n$ către operatorul identic). Dar *T. Popoviciu* nu a mai revenit asupra descoperirii din 1950, iar această problematică a fost aprofundată de către *P. P. Korovkin* [7] în 1952 şi [8] în 1959. Astfel, teorema respectivă este denumită teorema lui *Korovkin* sau, mai rar, teorema lui *Bohman-Korovkin*. Spre regret, ea este denumită foarte rar teorema lui *Popoviciu-Bohman-Korovkin*.

Se notează cu e_j funcţiile $e_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $e_j(x) = x^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ (aceste funcţii fiind numite şi monoamele fundamentale). Iată enunţul teoremei:

Teoremă. *Dacă $(L_n)_n$ este un şir de operatori pe $\mathcal{C}([a,b])$ astfel încât $L_n e_j$ converge uniform către e_j, pentru $j = 0, 1, 2$, atunci $L_n f$ converge uniform către f, pentru orice $f \in \mathcal{C}([a,b])$.*

Pentru demonstraţie a se vedea [28], [30], [1], [12].

Funcţiile e_0, e_1 şi e_2 se numesc funcţii-test sau funcţii de probă.

În cazul că se are în vedere aproximarea funcţiilor continue periodice de perioadă 2π, funcţiile-test sunt 1, $\cos x$ şi $\sin x$, iar teorema menţionată capătă o adaptare corespunzătoare.

Într-un articol recent ([9]) se face o trecere în revistă actualizată a teoriei generate de teorema lui *Korovkin* (*Bohman-Popoviciu-Korovkin*). O încadrare mai generală a acestor teorii în contextul absolut continuităţii este efectuată în [17].

Utilitatea deosebită a teoremei lui *Korovkin* (*Bohman-Popoviciu-Korovkin*) constă în faptul că, fiind dat un şir de operatori $(L_n)_n$, $L_n : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$, ea permite să se dea decizia în problema convergenţei $L_n f \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{unif}} f$, stabilind doar convergenţele $L_n e_j \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{unif}} e_j$ $(j = 0, 1, 2)$. Deci trebuie calculate doar imaginile $L_n e_j$ $(j = 0, 1, 2)$ şi trebuie decis asupra convergenţei acestora. Analog, în cazul aproximării funcţiilor periodice de perioadă 2π, trebuie calculate doar imaginile funcţiilor 1, $\cos x$, $\sin x$ prin operatorul L_n şi stabilită convergenţa lor.

Astfel, avem, de exemplu:

• pentru operatorul *Bernstein* (3.1):

$$\begin{cases} B_n e_0 = e_0 \\ B_n e_1 = e_1 \\ B_n e_2 = x^2 + \dfrac{x(1-x)}{n}, \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

• pentru operatorul *Stancu* (4.5):

$$\begin{cases} S_n^{<\alpha>} e_0 = e_0 \\ S_n^{<\alpha>} e_1 = e_1 \\ S_n^{<\alpha>} e_2 = x^2 + \dfrac{x(1-x)(1+n\alpha)}{n(1+\alpha)}, \quad x \in [0,1], \end{cases}$$

deci, conform teoremei lui *Korovkin*, operatorii menţionaţi au proprietatea că aproximează uniform orice funcţie $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

Menţionăm că o altă direcţie modernă de construire a operatorilor de aproximare este dată de utilizarea calculului operatorial finit, numit şi *calcul umbral* (a se vedea [21], [22], [23]). Şi aici *T. Popoviciu* are o lucrare de pionierat ([19]).

În afara stabilirii convergenţei operatorilor către operatorul identic, se studiază şi „viteza“ de convergenţă prin evaluări ale ordinelor de aproximare cu ajutorul modulelor de continuitate, cât şi prin stabilirea unor formule asimptotice.

În sfârşit, se mai studiază modul cum se transmit unele proprietăţi de la funcţiile aproximate la imaginile prin operatori, cel mai frecvent proprietăţile de monotonie şi convexitate ale funcţiilor aproximate.

6. Modulul de continuitate

Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită (unde I este un interval). Atunci aplicaţia $\omega_f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită de egalitatea:

$$\omega_f(\delta) = \sup\left\{ |f(x') - f(x'')| \,\middle|\, x', x'' \in I,\ |x' - x''| < \delta \right\}$$

se numeşte modulul de continuitate al funcţiei f (se mai notează $\omega(f;\delta)$).

Denumirea provine de la definiţia „în limbaj $\varepsilon - \delta$" a continuităţii unei funcţii.

În teoria aproximării modulul de continuitate este utilizat pentru a decide „viteza“ de convergenţă a operatorilor către funcţia aproximată, prin intermediul unor inegalităţi de majorare. Astfel, de exemplu, printre cele mai cunoscute inegalităţi menţionăm:

$$|(B_n f)(x) - f(x)| \le \frac{3}{2}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad f \in \mathcal{C}([a,b]),$$

$$|(B_nf)(x)-f(x)|\le\frac{3}{4n}\omega\left(f',\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\quad f\in\mathcal{C}^1([a,b]).$$

Există multe astfel de inegalităţi. Se mai utilizează diferite generalizări ale modulului de continuitate, ordine de netezime şi altele (v.[1]). A se vedea şi [18].

7. Teorema lui Voronovskaya

În 1932 matematiciana *E. Voronovskaya* a stabilit [32] următorul rezultat de tip asimptotic, privitor la operatorul *Bernstein*: Dacă $f\in\mathcal{C}([a,b])$ este de două ori derivabilă într-un punct $x\in[0,1]$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}((B_nf)(x)-f(x))=\frac{x(1-x)}{x}f''(x).$$

Ulterior, teoreme de acest fel au fost stabilite şi pentru alţi operatori; ele au primit denumirea de teoreme de tip *Voronovskaya*.

*

* *

Am redat, în cele prezentate, doar o perspectivă sumară a problematicii vaste, profunde şi bogate în rezultate a teoriei aproximării uniforme a funcţiilor continue prin polinoame. Această problematică, în care şcoala clujeană de teoria aproximării, condusă de către acad. *D. D. Stancu*, aduce noi şi valoroase contribuţii, este de mare actualitate, cercetările în domeniu continuând neîncetat, cu noi rezultate importante şi elegante.

Bibliografie

[1] O. Agratini, *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Universitară Clujeană, Cluj, 2000.

[2] V.A. Baskakov, *An example of sequence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., **119**, 1957, pp. 249-251.

[3] H. Bohman, *On approximation of continuous and analytic functions*, Ask. Mat. (2) **3**, 1951, pp. 43-51.

[4] E. W. Cheney, A. Sharma, *On a generalization of Bernstein polynomials*, Riv. Mat. Univ. Parma (2), **5**, 1964, pp. 77-84.

[5] E. W. Cheney, A. Sharma, *Bernstein power series*, Canadian J. Math., **16**, 1964, 2, pp. 241-252.

[6] J. Favard, *Sur les multiplicateurs d'interpolation*, J. Math. Series Appl. **29** (9), 1944, pp. 219-247.

[7] P. P. Korovkin, *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions* (Russian), Dokl. Acad. Nauk S.S.S.R. (N.S.), **90**, 1953, pp. 961-964.

[8] P. P. Korovkin, *Linear operators and approximation theory*, Delhi, 1960 (sau ediţia în limba rusă, Editura de Stat pentru literatura fizico-matematică, 1959).

[9] H. E. Lomelí, C. L. Garsia, *Variations on a theorem of Korovkin*, Amer. Math. Monthly, **113**, 2006, No. 8, pp. 744-750.

[10] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Toronto, Univ. of Toronto Press, 1953.

[11] A. Lupaş, *Approximation operators of binomial type*, Proc. of IDOMAT, Birkhäuser Verlag, Witten, 1998.

[12] L. Lupaş, *Teoria constructivă a funcţiilor*, Editura Universităţii din Sibiu, 1994.

[13] L. Lupaş, A. Lupaş, *Polynomials of binomial type and approximation*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Cluj, Mathematica, **32**, 1987, pp. 61-69.

[14] C. Manole, *Dezvoltări în serii de polinoame Appell generalizate cu aplicaţii la aproximarea funcţiilor*, teză de doctorat, Cluj, 1984.

[15] W. M. Meyer-König, K. Zeller, *Bernsteinsche Potenzenreichen*, Studia Math., **19**, 1990, pp. 89-94.

[16] G. M. Mirakyan, *Approximation des fonctions continues au moyen des polynômes*, Dokl. Akad. Nauk., S.S.S.R., **31**, 1941, pp. 201-205.

[17] C. P. Niculescu, *An overview of absolute continuity and its applications.* În volumul *Inequalities and Applications* (Proc. of the Conferences in Ineq. and Appl '07). To appear in the International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser-Verlag, 2008.

[18] R. Păltănea, *Approximation theory using positive linear operators*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[19] T. Popoviciu, *Remarques sur les polynômes binomiaux*, Bull. Soc. Math. Cluj (Roumanie), **6**, 1932, pp. 146-148.

[20] T. Popoviciu, *Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare*, Lucr. Sesiunii Generale Ştiinţifice, Acad. R.P.R., 1950, pp. 1664-1667.

[21] S. Roman, *The umbral calculus*, Advances in Math., **27**, 1978, pp. 95-188.

[22] G. C. Rota, *Finite operator calculus*, Academic Press, New York, 1975.

[23] G. C. Rota, D. Kahaner, A. Odlyzko, *On the foundation of combinatorial theory. Finite operator calculus*, J. of. Math. Analysis and Appl., **42**, 1978, pp. 685-750.

[24] D. D. Stancu, *On the monotonicity of the sequence formed by the first order derivatives of the Bernstein polynomials*, Math. Zeitsch., **98**, 1967, pp. 46-51.

[25] D. D. Stancu, *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators*, Rev. Roum. Math. Pures. et Appl. **13**, 1968, No. 8, pp. 1173-1194.

[26] D. D. Stancu, *Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai, **14**, 1969, No. 2, pp. 31-45.

[27] D. D. Stancu, *Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous functions*, Rev. Roum. Math. Pures. et. Appl. **14**, 1969, No. 5, pp. 673-691.

[28] D. D. Stancu, *Curs şi Culegere de probleme de Analiză Numerică*, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1977.

[29] D. D. Stancu, *Application of divided differences to the study of montonicity of the derivatives of the sequence of Bernstein polynomials*, Calcolo, **16**, 1979, f. IV, pp. 431-445.

[30] D. D. Stancu şi colectiv, *Analiză numerică şi teoria aproximării*, vol. I, II, III, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2001, 2002.

[31] O. Szász, *Generalization of Bernstein's polynomials to the infinite interval*, J. Research, National Bureau of Standards **45**, 1950, pp. 239-245.

[32] E. Voronovskaya, *Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de S. Bernstein*, C. R. Acad. Sci. URSS, 1932, pp. 79-85.

Universitatea Valahia, Catedra de Matematică
Bulevardul Unirii, nr. 18
130082 Târgovişte
avernescu@clicknet.ro

Rafinări ale unor inegalităţi geometrice în tetraedru

de Mihai Miculiţa şi Marius Olteanu

Abstract

The aim of this paper is the present some refinements of certain inequalities involving the elements of a tetrahedron.

Key words: inequalities in tetrahedron
M.S.C.: 51M04

Scopul principal al prezentului articol este acela de a stabili câteva rafinări ale unor inegalităţi geometrice în tetraedru precum şi extinderea, generalizarea şi completarea unora dintre rezultatele prezentate în [1], [2], [5] şi [7].

În cele ce urmează, referitor la un tetraedru oarecare $[ABCD]$, vom utiliza următoarele notaţii: $r-$ raza sferei înscrisă acestuia, $R-$ raza sferei circumscrisă, r_A- raza sferei circumscrisă de speţa întâi, care este tangentă feţei (BCD) (analog r_B, r_C, r_D), h_A şi m_A- lungimea înălţimii, respectiv medianei, tetraedrului ce conţine vârful A (analog h_B, h_C, h_D, m_B, m_C, m_D), S_X- aria feţei opuse vârfului $X(A, B, C, D)$, $S-$ aria totală, $V-$ volumul tetraedrului.

Lema 1. *Dacă $x, y, z, t \in (0, \infty)$, atunci are loc dubla inegalitate*

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{t^2}+\frac{t^2}{x^2} \geq \frac{x+y+z+t}{\sqrt[4]{xyzt}} \geq 4. \tag{1}$$

Demonstraţie. Folosind inegalitatea mediilor avem

$$3\frac{x^2}{y^2}+2\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{t^2}+2 \geq 8\sqrt[8]{\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{y^2}{z^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{z^2}{t^2}\right) \cdot 1 \cdot 1} = 8\frac{x}{\sqrt[4]{xyzt}}.$$

Adunând această inegalitate cu încă trei inegalităţi similare, obţinute prin permutări circulare, după simplificarea cu 2, avem (pentru inegalitatea din partea stângă)

$$3\left(\frac{x^2}{y^2}+2\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{t^2}+\frac{t^2}{z^2}\right)+4 \geq 4 \cdot \frac{x+y+z+t}{\sqrt[4]{xyzt}}. \tag{2}$$

Însă

$$\frac{x^2}{y^2}+2\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{t^2}+\frac{t^2}{z^2} \geq 4,$$

de unde

$$4\left(\frac{x^2}{y^2}+2\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{t^2}+\frac{t^2}{z^2}\right) \geq 3\left(\frac{x^2}{y^2}+2\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{t^2}+\frac{t^2}{z^2}\right). \tag{3}$$

Ţinând seama de relaţiile (2) şi (3), rezultă că

$$\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{t^2} + \frac{t^2}{z^2} \geq \frac{x+y+z+t}{\sqrt[4]{xyzt}}. \tag{4}$$

Cum $x+y+z+t \geq 4\sqrt[4]{xyzt}$ (conform inegalităţii mediilor), atunci, ţinând cont de relaţia (4), rezulă imediat relaţia (1). Egalitate se obţine atunci şi numai atunci când $x = y = z = 1$.

Lema 2. *Dacă* $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, *atunci are loc inegalitatea*

$$\begin{aligned}(x+y+z-t)(x+y+t-z)(x+z+t-y)(y+z+t-x) \leq \\ \leq (x+y)(y+z)(z+t)(t+x).\end{aligned} \tag{5}$$

Demonstraţie. Se va consulta soluţia problemei **17871*** soluţie publicată în G. M.-B, nr. 4/1980, p. 157.

Lema 3. *Dacă* $x, y, z, t \in [0, \infty)$, *atunci are loc inegalitatea*

$$x+y+z+t \geq \sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{yzt} + \sqrt[3]{ztx} + \sqrt[3]{txy}. \tag{6}$$

Demonstraţie. Avem, conform inegalităţii mediilor, relaţiile următoare:

$x+y+z+t \geq 3\sqrt[3]{xyz}$; $y+z+t \geq 3\sqrt[3]{yzt}$; $z+t+x \geq 3\sqrt[3]{ztx}$ şi $t+x+y \geq 3\sqrt[3]{txy}$,

care, prin sumare parte cu parte, conduc la obţinerea inegalităţii (6). Egalitatea se obţine dacă şi numai dacă $x = y = z = t$.

Se ştie că, într-un tetraedru oarecare $[ABCD]$, au loc următoarele relaţii ([3], p. 39):

$$\frac{r}{r_A} + \frac{r}{r_B} + \frac{r}{r_C} + \frac{r}{r_D} = 2\left(\frac{r}{h_A} + \frac{r}{h_B} + \frac{r}{h_C} + \frac{r}{h_D}\right) = 2, \tag{7}$$

$$\frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D} - \frac{1}{h_A} = \frac{1}{r_A} \text{ (şi analoagele);} \tag{8}$$

$$r_A + r_B + r_C + r_D \geq 8r; \tag{9}$$

$$h_A + h_B + h_C + h_D \geq 16r; \tag{10}$$

$$r_A \cdot r_B \cdot r_C \cdot r_D \geq 16r^2; \tag{11}$$

$$h_A \cdot h_B \cdot h_C \cdot h_D \geq 256r^4; \tag{12}$$

$$\frac{x}{h_A} + \frac{y}{h_B} + \frac{z}{h_C} + \frac{t}{h_D} = 1, \tag{13}$$

unde x, y, z, t reprezintă distanţele de la punctul $M \in \operatorname{int}(ABCD)$ la feţele (BCD), (ACD), (ABD) şi respectiv (ABC) (coordonatele normale ale punctului M).

Identitatea (13) mai este cunoscută sub denumirea de identitatea lui *Gergonne* în tetraedru.

Propoziţia 1. *În tetraedrul oarecare* $[ABCD]$, *fie* M *în interiorul acestuia, iar* x, y, z, t *distanţele de la* M *la feţele* (BCD), (ACD), (ABD) *şi respectiv* (ABC). *Atunci au loc inegalităţile următoare*:

a) $$\left(\frac{h_B}{h_C}\cdot\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{h_C}{h_B}\cdot\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{h_D}{h_C}\cdot\frac{z}{t}\right)^2+\left(\frac{h_A}{h_D}\cdot\frac{t}{z}\right)^2\geq\sqrt[4]{\frac{h_A\cdot h_B\cdot h_C\cdot h_D}{x\cdot y\cdot z\cdot t}}\geq 4;$$

b) $$\left(\frac{h_B}{h_C}\right)^2+\left(\frac{h_C}{h_B}\right)^2+\left(\frac{h_D}{h_C}\right)^2+\left(\frac{h_A}{h_D}\right)^2\geq\frac{1}{r}\cdot\sqrt[4]{h_A\cdot h_B\cdot h_C\cdot h_D}\geq 4;$$

c) $$\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2+\left(\frac{r_B}{r_C}\right)^2+\left(\frac{r_C}{r_D}\right)^2+\left(\frac{r_D}{r_A}\right)^2\geq\frac{2}{r}\cdot\sqrt[4]{r_A\cdot r_B\cdot r_C\cdot r_D}\geq 4.$$

Demonstraţie. a) În inegalitatea (1) alegem $X=\dfrac{x}{h_A}$, $Y=\dfrac{y}{h_B}$, $Z=\dfrac{z}{h_C}$ şi $T=\dfrac{t}{h_D}$; ţinem apoi seama de identitatea (13).

b) La punctul a) particularizăm $x=y=z=t=r$.

c) În inegalitatea (1), considerăm $x=\dfrac{r}{r_B}$, $y=\dfrac{r}{r_A}$, $z=\dfrac{r}{r_D}$ şi $t=\dfrac{r}{r_C}$ şi apoi ţinem seama de relaţia (7).

Propoziţia 2. *Într-un tetraedru oarecare* $[ABCD]$ *au loc următoarele rafinări ale inegalităţilor* (9), (10), (11), (12):

a) $$r_A+r_B+r_C+r_D\geq 4\cdot\frac{\sqrt{h_Ah_Bh_Ch_D}}{\sqrt[4]{(h_A+h_C)(h_B+h_C)(h_C+h_D)(h_D+h_A)}}\geq 8r;$$

b) $$r_A+r_B+r_C+r_D\geq\sqrt[3]{r_Ar_Br_C}+\sqrt[3]{r_Br_Cr_D}+\sqrt[3]{r_CrDr_A}+\sqrt[3]{r_Dr_Ar_B}\geq 8r;$$

c) $$r_Ar_Br_Cr_D\geq\frac{(h_Ah_Bh_Ch_D)^2}{(h_A+h_B)(h_B+h_C)(h_C+h_D)(h_D+h_A)}\geq 16r^2;$$

d) $$r_Ar_Br_Cr_D\geq$$
$$\geq\left(\frac{h_Ah_Bh_Ch_D}{\sqrt[3]{(h_A+h_B)(h_A+h_C)(h_A+h_D)(h_B+h_C)(h_B+h_D)(h_C+h_D)}}\right)^2\geq 16r^4;$$

e) $$h_A+h_B+h_C+h_D\geq$$
$$\geq\sqrt[3]{h_Ah_Bh_C}+\sqrt[3]{h_Bh_Ch_D}+\sqrt[3]{h_Ch_Dh_A}+\sqrt[3]{h_Dh_Ah_B}\geq 16r.$$

Demonstraţie. a) + c) Deoarece $r_A+r_B+r_C+r_D\geq\sqrt[4]{r_Ar_Br_Cr_D}$ (conform inegalităţii mediilor) este suficient să arătăm doar inegalitatea din dreapta a punctului c). Într-adevăr, inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{1}{r_A}\cdot\frac{1}{r_B}\cdot\frac{1}{r_C}\cdot\frac{1}{r_D}\leq\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}\right)\left(\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}\right)\left(\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}\right)+\left(\frac{1}{h_D}+\frac{1}{h_A}\right)\leq\frac{1}{16r^2}.\quad(14)$$

Utilizând relaţiile (8), partea stângă a inegalităţii (14) devine:

$$\left(\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}+\frac{1}{h_A}\right)\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}+\frac{1}{h_B}\right)\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_D}+\frac{1}{h_C}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}\right)\leq\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}\right)\left(\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}\right)\left(\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}\right)+\left(\frac{1}{h_D}+\frac{1}{h_A}\right),$$

inegalitate adevărată conform lemei 2, în care alegem $x=\dfrac{1}{h_A}$, $y=\dfrac{1}{h_B}$, $z=\dfrac{1}{h_C}$, $t=\dfrac{1}{h_D}$. Partea dreaptă a inegalităţii (14) rezultă din aplicarea inegalităţii mediilor şi a relaţiei (7), după cum urmează:

$$\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}\right)\left(\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}\right)\left(\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}\right)\left(\frac{1}{h_D}+\frac{1}{h_A}\right)\leq$$

$$\leq\left[\frac{2\left(\dfrac{1}{h_A}+\dfrac{1}{h_B}+\dfrac{1}{h_C}+\dfrac{1}{h_D}\right)}{4}\right]^4=\frac{1}{16r^4}.$$

b) Partea stângă a inegalităţii se obţine din lema 3, în care se consideră $x=r_A$, $y=r_B$, $z=r_C$, $t=r_D$.

În baza lemei 3 mai avem:

$$\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}+\frac{1}{r_D}\geq\frac{1}{\sqrt[3]{r_Ar_Br_C}}+\frac{1}{\sqrt[3]{r_Br_Cr_D}}+\frac{1}{\sqrt[3]{r_Cr_Dr_A}}+\frac{1}{\sqrt[3]{r_Dr_Ar_B}}\overset{(7)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(7)}{\Leftrightarrow}\frac{2}{r}\geq\sum\frac{1}{\sqrt[3]{r_Ar_Br_C}}. \tag{15}$$

Dar

$$\sum\sqrt[3]{r_Ar_Br_C}\geq\frac{16}{\sum\sqrt[3]{\dfrac{1}{r_Ar_Br_C}}} \tag{16}$$

(conform inegalităţii mediilor).

Din (15) şi (16) rezultă imediat concluzia.

e) Se foloseşte aceeaşi metodă ca la punctul b).

d) Conform relaţiilor (8), avem

$$\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}=\left(\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}-\frac{1}{h_A}\right)+\left(\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}-\frac{1}{h_B}\right)=2\left(\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}\right),$$

de unde

$$\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{r_A\cdot r_B}}. \tag{17}$$

În mod analog avem

$$\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} \geq \frac{1}{\sqrt{r_C \cdot r_D}}. \tag{18}$$

Din înmulţirea relaţiilor (17) şi (18), membru cu membru, obţinem că

$$\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B}\right)\left(\frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{r_A \cdot r_B \cdot r_C \cdot r_D}}. \tag{19}$$

Pe de altă parte, avem (conform relaţiilor (7))

$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B}\right) + \left(\frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)\right] \geq \sqrt{\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B}\right)\left(\frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)},$$

de unde

$$\frac{1}{4r^2} \geq \left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B}\right)\left(\frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right). \tag{20}$$

Din relaţiile (19) şi (20), rezultă că

$$4r^2 \leq \frac{h_A h_B h_C h_D}{(h_A + h_B)(h_C + h_D)} \leq \sqrt{r_A r_B r_C r_D}. \tag{21}$$

Înmulţind acum inegalitatea (21) cu celelalte două inegalităţi care se obţin din aceasta prin permutarea circulară a indicilor (A, B, C, D), obţinem inegalitatea

$$64r^6 \leq \frac{(h_A h_B h_C h_D)^3}{(h_A + h_B)(h_A + h_C)(h_A + h_D)(h_B + h_C)(h_B + h_D)(h_C + h_D)} \leq$$

$$\leq \left(\sqrt{r_A r_B r_C r_D}\right)^3,$$

ceea ce este echivalent cu

$$r_A r_B r_C r_D \geq \left(\frac{h_A h_B h_C h_D}{\sqrt[3]{(h_A + h_B)(h_A + h_C)(h_A + h_D)(h_B + h_C)(h_B + h_D)(h_C + h_D)}}\right)^2 \geq 16r^4.$$

Observaţii. a) Prin permutarea circulară a indicilor (A, B, C, D) din relaţia (21), obţinem

$$4r^2 \leq \frac{h_A h_B h_C h_D}{(h_B + h_C)(h_D + h_A)} \leq \sqrt{r_A r_B r_C r_D}. \tag{22}$$

Înmulţind acum relaţiile (21) şi (22) membru cu membru, se obţine inegalitatea de la punctul c).

b) Deoarece $h_A + h_B \geq 2\sqrt{h_A h_B}$ şi $h_C + h_D \geq 2\sqrt{h_C h_D}$, avem şi inegalităţile

$$4r^2 \leq \frac{h_A h_B h_C h_D}{(h_A + h_B)(h_C + h_D)} \leq \frac{1}{4}\sqrt{h_A h_B h_C h_D} \tag{21*}$$

(şi analoagele).

Similar avem

$$4r^2 \leq \frac{h_A h_B h_C h_D}{(h_B + h_C)(h_D + h_A)} \leq \frac{1}{4}\sqrt{h_A h_B h_C h_D}. \tag{22*}$$

c) În propoziţiile 1 şi 2 egalităţile au loc numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru echifacial.

În continuare, ca aplicaţie directă a celor prezentate până acum, propunem cititorilor să arate că în orice tetraedru $[ABCD]$ au loc următoarele rafinări ale inegalităţilor (12), (10) şi (9):

$$h_A h_B h_C h_D \geq 16 \frac{(h_A h_B h_C h_D)^2}{(h_A + h_B)(h_B + h_C)(h_C + h_D)(h_D + h_A)} \geq 256r^4; \tag{23}$$

$$h_A h_B h_C h_D \geq$$
$$\geq 16 \frac{(h_A h_B h_C h_D)^2}{\left(\sqrt[3]{(h_A + h_B)(h_A + h_C)(h_A + h_D)(h_B + h_C)(h_B + h_D)(h_C + h_D)}\right)^2} \geq 256r^4; \tag{24}$$

$$h_A + h_B + h_C + h_D \geq 8 \frac{\sqrt{h_A h_B h_C h_D}}{\sqrt[4]{(h_A + h_B)(h_B + h_C)(h_C + h_D)(h_D + h_A)}} \geq 16r; \tag{25}$$

$$h_A + h_B + h_C + h_D \geq$$
$$\geq 8 \frac{\sqrt{h_A h_B h_C h_D}}{\sqrt[6]{(h_A + h_B)(h_A + h_C)(h_A + h_D)(h_B + h_C)(h_B + h_D)(h_C + h_D)}} \geq 16r; \tag{26}$$

$$r_A + r_B + r_C + r_D \geq$$
$$\geq 4 \frac{\sqrt{h_A h_B h_C h_D}}{\sqrt[6]{(h_A + h_B)(h_A + h_C)(h_A + h_D)(h_B + h_C)(h_B + h_D)(h_C + h_D)}} \geq 8r. \tag{27}$$

Dacă între ariile feţelor tetraedului $[ABCD]$ există relaţia de ordine $S_A \geq$ $\geq S_B \geq S_C \geq S_D$, atunci, având în vedere rezultatele stabilite în problema **87**, pagina 25, din [2], precum şi propoziţiile 1, 2, obţinem următoarele şiruri de inegalităţi:

$$\left(\frac{h_A}{h_B}\right)^2 + \left(\frac{h_B}{h_C}\right)^2 + \left(\frac{h_C}{h_D}\right)^2 + \left(\frac{h_D}{h_A}\right)^2 \geq$$
$$\geq \left(\frac{h_B}{h_A}\right)^2 + \left(\frac{h_C}{h_B}\right)^2 + \left(\frac{h_D}{h_C}\right)^2 + \left(\frac{h_A}{h_D}\right)^2 \geq \frac{1}{r}\sqrt[4]{h_A h_B h_C h_D} \geq 4 \tag{28}$$

şi

$$\left(\frac{r_B}{r_A}\right)^2 + \left(\frac{r_C}{r_B}\right)^2 + \left(\frac{r_D}{r_C}\right)^2 + \left(\frac{r_A}{r_D}\right)^2 \geq$$
$$\geq \left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 + \left(\frac{r_B}{r_C}\right)^2 + \left(\frac{r_C}{r_D}\right)^2 + \left(\frac{r_D}{r_A}\right)^2 \geq \frac{2}{r}\sqrt[4]{r_A r_B r_C r_D} \geq 4. \tag{29}$$

Este clar faptul că, partea dreaptă a inegalităţilor (28) şi (29) se rafinează imediat în baza rezultatelor propoziţiei 2-b), c) şi a inegalităţilor (23) şi (24). Egalităţile se ating numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru echifacial. Mai mult, dacă tetraedrul $[ABCD]$ este ortocentric, având ortocentrul $H \in \mathrm{int}(ABCD)$ şi $S_A \geq S_B \geq S_C \geq \geq S_D$, atunci, ţinând seama de rezultatul problemei **130**, pagina 33, din [2] şi de lema 1, avem relaţiile

$$\left(\frac{m_A}{m_B}\right)^2 + \left(\frac{m_B}{m_C}\right)^2 + \left(\frac{m_C}{m_D}\right)^2 + \left(\frac{m_D}{m_A}\right)^2 \geq$$
$$\geq \left(\frac{m_B}{m_A}\right)^2 + \left(\frac{m_C}{m_B}\right)^2 + \left(\frac{m_D}{m_C}\right)^2 + \left(\frac{m_A}{m_D}\right)^2 \geq \frac{m_A + m_B + m_C + m_D}{\sqrt[4]{m_A m_B m_C m_D}} \geq 4, \quad (30)$$

cu egalitate numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru regulat.

Propoziţia 3. *În orice tetraedru* $[ABCD]$ *au loc următoarele inegalităţi*:

a) $\dfrac{r_A^m}{m_A^n} + \dfrac{r_B^m}{m_B^n} + \dfrac{r_C^m}{m_C^n} + \dfrac{r_D^m}{m_D^n} \geq 2^{2+m-2n} \cdot r^m \cdot \left(\dfrac{3}{R}\right)^n,$

pentru orice $m \in \{0\} \cup [1, \infty)$ *şi* $n \in \{0, 1, 2\}$;

b) $\dfrac{h_A^m}{m_A^n} + \dfrac{h_B^m}{m_B^n} + \dfrac{h_C^m}{m_C^n} + \dfrac{h_D^m}{m_D^n} \geq 4^{1+m-n} \cdot r^m \cdot \left(\dfrac{3}{R}\right)^n,$

pentru orice $m \in \{0\} \cup [1, \infty)$ *şi* $n \in \{0, 1, 2\}$;

c) $\dfrac{m_A^m}{r_A^n} + \dfrac{m_B^m}{r_B^n} + \dfrac{m_C^m}{r_C^n} + \dfrac{m_D^m}{r_D^n} \geq 2^{2+2m-n} \cdot r^{m-n} \cdot \left(\dfrac{3}{R}\right),$

pentru orice $m, n \in \{0\} \cup [1, \infty)$.

Demnostraţie. Este cunoscută inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{p} x_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i}, \quad (31)$$

unde $\alpha_i > 0$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,p}$, $p \in \mathbb{N}^*$ (a se consulta [4]).

a) + b) Considerând, în relaţia (31), $p = 4$, $z_1 = \sqrt{r_A^m}$; $z_2 = \sqrt{r_B^m}$; $z_3 = \sqrt{r_C^m}$; $z_4 = \sqrt{r_D^m}$, $\alpha_1 = m_A^n$, $\alpha_2 = m_B^n$, $\alpha_3 = m_C^n$, $\alpha_4 = m_D^n$, obţinem

$$\sum \frac{r_A^m}{m_A^n} = \sum \frac{\left(\sqrt{r_A^m}\right)^2}{m_A^n} \geq \frac{\left[\sum \left(\sqrt{r_A}\right)^m\right]^2}{\sum m_A^n}; \quad (32)$$

analog găsim că

$$\sum \frac{h_A^m}{m_A^n} \geq \frac{\left[\sum \left(\sqrt{h_A}\right)^m\right]^2}{\sum m_A^n}. \quad (32^*)$$

Aplicând inegalitatea *Jensen* funcţiei convexe $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x^q$, $q \in \{0\} \cup [1, \infty)$, apoi inegalitatea mediilor şi inegalităţile (11) şi (12) avem, pe rând

$$\sum (\sqrt{r_A})^m \geq 4 \cdot \left(\frac{\sum r_A}{4} \right)^m \geq 4 \left(\frac{4 \sqrt[8]{r_A r_B r_C r_D}}{4} \right)^m \geq 4 \cdot \left(\sqrt{2r} \right)^m ,$$

de unde

$$\left[\sum (\sqrt{r_A})^m \right]^2 \geq 16 \cdot (2r)^m \tag{33}$$

şi

$$\left[\sum \left(\sqrt{h_A} \right)^m \right]^2 \geq 16 \cdot (4r)^m . \tag{33*}$$

De asemenea, sunt cunoscute şi următoarele inegalităţi ([2], problema **80** sau [5], pag. 471):

$$m_A + m_B + m_C + m_D \leq \frac{16}{3} R,$$

şi

$$m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2 \leq \frac{64}{9} R^2,$$

de unde rezultă

$$m_A^n + m_B^n + m_C^n + m_D^n \leq 4 \left(\frac{4R}{3} \right)^n , \tag{34}$$

pentru orice $n \in \{0, 1, 2\}$.

În fine, din relaţiile (32), (32*), (33), (32*) şi (34), după câteva calcule imediate, se obţin inegalităţile căutate. Egalităţile au loc numai dacă $m = n = 0$ sau $[ABCD]$ este tetraedru echifacial.

c) Avem $m_A \geq h_A$ (şi analoagele) ceea ce implică

$$m_A^n \geq h_A^n , \tag{35}$$

pentru orice $m \in \{0\} \cup [1, \infty)$ (şi analoagele).

Presupunem că $S_A \geq S_B \geq S_C \geq S_D$; cum $r_A = \dfrac{3V}{S - S_A}$; $h_A = \dfrac{3V}{S_A}$ (şi analoagele) rezultă că

$$\begin{cases} r_A \geq r_B \geq r_C \geq r_D \quad \text{şi} \\ h_A \leq h_B \leq h_C \leq h_D , \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r_A^n} \leq \dfrac{1}{r_B^n} \leq \dfrac{1}{r_C^n} \leq \dfrac{1}{r_D^n}, & \text{pentru orice} \quad n \in \{0\} \cup [1, \infty) \\ h_A^m \leq h_B^m \leq h_C^m \leq h_D^m, & \text{pentru orice} \quad m \in \{0\} \cup [1, \infty). \end{cases} \tag{36}$$

Din relaţiile (35), rezultă

$$\sum \frac{m_A^m}{r_A^n} \geq \sum \frac{h_A^m}{r_A^n} , \tag{37}$$

pentru orice $m, n \in \{0\} \cup [1, \infty)$.

Aplicând – în baza relaţiilor (36) – inegalitatea lui *Cebâşev*, avem

$$\sum \frac{h_A^m}{r_A^n} \geq \frac{1}{4}\left(\sum h_A^m\right)\left(\sum \frac{1}{r_A^n}\right). \tag{38}$$

Aplicând, din nou, inegalitatea lui Jensen funcţiei convexe $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x) = x^q$, $q \in \{0\} \cup [1, \infty)$ şi ţinând seama de identităţile (7) şi inegalitatea (10), obţinem

$$\begin{cases} \sum h_A^m \geq 4 \cdot \left(\dfrac{\sum h_A}{4}\right)^m \geq 4\left(\dfrac{16r}{4}\right)^m = 4^{m+1} \cdot r^m, \\ \qquad\qquad\qquad \text{pentru orice } m \in \{0\} \cup [1, \infty), \\ \sum \dfrac{1}{r_A^n} \geq 4 \cdot \left(\dfrac{\sum \frac{1}{r_A}}{4}\right)^n = 4\left(\dfrac{1}{2r}\right)^n, \text{ pentru orice } n \in \{0\} \cup [1, \infty). \end{cases} \tag{39}$$

În final, din relaţiile (37), (38) şi (39), obţinem

$$\sum \frac{m_A^m}{r_A^n} \geq 2^{2+2m-n} \cdot r^{m-n},$$

pentru orice $m, n \in \{0\} \cup [1, \infty)$.

Egalitatea se obţine atunci şi numai atunci când $m = n = 0$ sau dacă $[ABCD]$ este tetraedru echifacial.

Observaţii. a) Inegalitatea a) extinde la un tetraedru oarecare propoziţia 2, h), pagina 22 din [1], iar inegalitatea b) extinde la un tetraedru oarecare rezultatul problemei 129, i), pagina 32 din [2].

b) Inegalitatea c) generalizează punctele b), f) şi g) ale propoziţiei 1, pagina 19, din [1].

Observaţii finale. a) Din modul de demonstraţie al propoziţiei 3, se observă că aceasta poate fi rafinată având în vedere rezultatele propoziţiei 2 şi a inegalităţilor (23) – (27).

b) Aceleaşi rezultate, menţionate mai înainte, permit, de exemplu, rafinarea tuturor inegalităţilor demonstrate în [1] (cu excepţia punctului g$''$)), precum şi a unora dintre inegalităţile stabilite în [5] şi [7].

În încheiere, invităm cititorul interesat să stabilească forma finală a acestor rafinări precum şi identificarea altor inegalităţi apărute în literatura de specialitate ce pot fi rafinate pe baza materialului prezentat în acest articol.

Bibliografie

[1] T. Andreescu, M. Lascu, *Asupra unor inegalităţi*, G. M. - B, nr. 9-10/2001.

[2] M. Miculiţa, D. Brânzei, *Analogii triunghi - tetraedru*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2000.

[3] M. Olteanu, *Asupra unor inegalităţi în tetraedru*, G. M. - B, nr. 1/2006.

[4] M. Olteanu, *Inegalităţi în tetraedru – culegere de probleme*, Editura Conspress, Bucureşti, 2003.

[5] M. Olteanu, *Rafinări ale inegalităţii Durande în tetraedru – partea I*, G. M. - B, nr. 8/2006.

[6] M. Olteanu, *Asupra unor inegalităţi în tetraedru*, G. M. - A, nr. 3/2006.

[7] M. Olteanu, *Rafinări ale inegalităţii Durande în tetraedru – partea a II-a*, G. M. - B, nr. 12/2006.

Profesor,
Şcoala Doamna Oltea,
Oradea, Bihor

Inginer,
S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti,
sucursala „Olt-Superior"
Râmnicu-Vâlcea

Aplicaţii ale statisticii matematice în sport

DE CRISTINA-DIANA COSTANDACHE [1)]

Motto: *Nu exista întâmplare... există o invizibilă mână a destinului care redă fiecăruia ceea ce a dat...*

Abstract

The paper presents some applications of the mathematical statistics in sport.

Key words: mathematical statistics, sport.
M.S.C.: 62P99

Printre ştiinţele care studiază aspectele cantitativ numerice ale fenomenelor şi proceselor din natură se află şi statistica. Ea studiază fenomenele dintr-o viziune sistemică la nivel micro, mezo, macroeconomic şi social, ţinând seama de demersul structurilor existente şi de factorii care acţionează variabil în timp şi spaţiu.

Denumirea de „statistici" derivă din cuvântul latin „status" care avea înţelesul de „stare politică".

Ca rădăcini ale statisticii moderne amintim: statistica practică (ce se referă la înregistrări sistematice sau izolate asemănătoare observărilor statistice folosite şi astăzi), statistica descriptivă (disciplina de învăţământ şi de concepere a statisticii practice necesare conducerii de stat), aritmetica şi calculul probabilităţilor ca fundamentare conceptuală şi mod de interpretare a fenomenelor în statistica modernă.

Statistica practică datează de patru milenii. Din antichitate se întâlnesc forme de evidenţă de tip recensământ în China, Egipt, Grecia, Imperiul Roman; la romani, recensămintele populaţiei se făceau din 5 în 5 ani, începând din 550 î.Cr. Şi în Dacia

[1)] Lucrarea a fost prezentată în cadrul simpozionului „Matematica şi sportul", desfăşurat la Roman în 9 iunie 2007. (N.R.)

administraţia romană a introdus o statistică privind evidenţa populaţiei, producţiei şi consumului, organizând servicii speciale de evidenţă numite „tabularium“ .

Odată cu trecerea timpului metodele practicii statisticii s-au diversificat. Se desprinde din această activitate contabilitatea cu rolul de a ţine gestiunea în interesul proprietarilor particulari, iar statistica ajută conducerea de stat prin culegerea de date şi obţinerea de informaţii numerice.

Statistica descriptivă a apărut şi s-a dezvoltat în cadrul universităţilor şi se ocupă cu descrierea situaţiei geografice, economice şi politice a unui stat. Amintim câteva lucrari: în Franţa lucrarea „Republica“ lui *J. Bodin*, în Germania lucrarea lui *S. Münster* „Cosmografia“, în Rusia lucrarea lui *Kirilov* „Situaţia înfloritoare a statului rus“, iar la noi lucrarea lui *Dimitrie Cantemir* „Descriptio Moldavie“ (1716).

Trăsătura caracteristică a statisticii descriptive este aceea că s-a rezumat numai la descrierea statelor fără a se ocupa de formularea legilor care guvernează fenomenele sociale. Interesul pentru statistica descriptivă a scăzut treptat. Şcoala aritmeticii politice apare odată cu lucrarea „Aritmetica politică“ (1690) a lui *William Petty* şi are ca trăsătură faptul că, prin analogie cu ştiinţele naturii se tinde spre exactitate şi în cunoaşterea socială, având ca obiectiv găsirea unor regularităţi ce se produc în manifestările sociale şi economice. Astfel statistica începe să-şi contureze etapele procesului său de cunoaştere: înregistrarea datelor empirice, sistematizarea şi prelucrarea datelor individuale, în vederea generalizării rezultatelor statistice, pentru ca în final să se efectueze analiza şi interpretarea statistică a fenomenelor sociale.

La noi în ţară, după *Dimitrie Cantemir*, printre cei care au avut ca preocupare principală statistica, s-a remarcat *N. Şuţu* cu lucrarea de referinţă „Notaţii statistice asupra Moldovei“ (1849). Statistica tratată ca un capitol al matematicii se studiază, începând din 1835, la Academia Mihăileană şi, începând din 1850, în gimnaziile din Moldova. Un moment important în dezvoltarea statisticii la noi în ţară a fost înfiinţarea la 12 iulie 1859, din ordinul domnitorului *Al. I. Cuza*, a Oficiului Central de Statistică Administrativă sub conducerea lui *Dionisie Pop Marţian*. În 1936 a fost înfiinţat în România Institutul Central de Statistică, care îşi desfăşoară activitatea şi astăzi.

Astăzi, statistica se ocupă cu culegerea, înregistrarea, gruparea, analiza şi interpretarea datelor referitoare la un anumit fenomen precum şi cu formularea unor previziuni privind producerea viitoare a fenomenului. Activitatea de culegere şi înregistrare a datelor legate de un fenomen face obiectul statisticii descriptive sau statisticii formale. Activitatea de grupare a datelor, analiza şi interpretarea acestora, precum şi formularea unor previziuni privind comportarea viitoare a unui fenomen reprezinta preocuparea statisticii matematice.

Elemente de limbaj în statistică:

– Mulţimea pe care se realizează un studiu statistic se numeşte **populaţie statistică**.

– Elementele componente ale unei populaţii statistice se numesc **unităţi statistice** sau **indivizi**.

– Numărul total al unităţilor statistice ale unei populaţii statistice se numeşte **efectivul total al populaţiei**.

– O parte a unei populaţii statistice, aleasă în mod special pentru a se cerceta, se numeşte **eşantion**.

– Proprietatea sau indicatorul în funcţie de care se cercetează unităţile statistice ale unei populaţii se numeşte **caracteristică** sau **variabilă statistică**.

– O caracteristică se numeşte **calitativă** dacă nu poate fi măsurată (valoarea ei nu se exprimă numeric).

– O caracteristică se numeşte **cantitativă** dacă poate fi exprimată numeric.

– O caracteristică cantitativă poate fi **discontinuă** sau **discretă** (dacă ea nu poate lua decât valori izolate) şi continuă (dacă poate lua toate valorile dintr-un interval).

– Valorile pe care le ia o caracteristică se numesc **date statistice**.

Analiza unui fenomen în raport cu o caracteristică ne conduce la o serie de perechi de valori, numită **serie statistică** (prima valoare este valoarea caracteristicii, iar a doua este numărul de unităţi statistice corespunzatoare acelei valori a caracteristicii). Tabelul în care se reprezintă seria statistică se numeşte **tabelul de distribuţie statistică**.

Considerăm o populaţie statistică cu efectivul total N, X variabila statistică ce ia valorile $x_1, x_2, ..., x_p$, iar $n_1, n_2, ..., n_p$ numărul de unităti corespunzătoare valorilor variabilei. Mulţimea tuturor perechilor (x_i, n_i), $l \leq i \leq p$ formează o serie statistică cu o singură variabilă. Se numeşte **frecvenţă absolută** sau **frecvenţă a unei valori a caracteristicii** numărul n_i de unităţi statistice corespunzătoare acestei valori.

Suma tuturor frecvenţelor valorilor caracteristice este egală cu efectivul total al populaţiei: $n_1 + n_2 + ... + n_p = N$.

Tabelul unei serii statistice de o singură variabilă este de forma:

Valorile caracteristicii	x_1	x_2	$\dots$	x_p
frecvenţa	n_1	n_2	$\dots$	n_p

Clase de valori	$[x_1, x_2]$	$\dots$	$[x_{p-1}, x_p]$
frecvenţa	n_1	$\dots$	n_p

O caracterizare a seriilor statistice cât şi o comparare eficientă a acestora se poate face cu ajutorul câtorva **mărimi numerice**:

Se numeşte **valoarea medie** a variabilei statistice, media aritmetică a tuturor valorilor variabilei calculată pentru toate elementele populaţiei statistice:

$$x = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_p n_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$$

Se observă că valoarea medie este media aritmetică ponderată a valorilor $x_1, x_2, ..., x_p$ ale variabilei statistice cu ponderile $n_1, n_2, ..., n_p$.

Dacă variabila este de tip continuu, în formulă se iau drept valori x_i valorile centrale ale claselor.

Mediana unei serii statistice ordonate este un număr M_e cu proprietatea că există tot atâtea unităţi statistice corespunzătoare valorilor mai mici ca M_e ca şi cele corespunzătoare valorilor mai mari ca M_e.

Modulul (sau dominanta) (notat M_o) unei serii statistice de o variabilă reprezintă valoarea sau clasa de valori a caracteristicii corespunzătoare celui mai mare efectiv.

Dispersia unei serii statistice măsoara gradul de împrăştiere a valorilor individuale ale variabilei în jurul valorii medii. Ea se calculeaza cu formula

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + \ldots + (x_p - \overline{x})^2 \cdot n_p}{n_1 + \ldots + n_p}.$$

Rădăcina pătrată a dispersiei se numeşte abaterea medie pătratică şi se calculează cu formula

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + \ldots + (x_p - \overline{x})^2 \cdot n_p}{n_1 + \ldots + n_p}}.$$

Ea dă posibilitatea caracterizării dispersiei valorilor unei variabile. Astfel, o serie care este puţin dispersată, adică prezintă valori ale variabilei ce sunt strâns grupate în jurul valorii medii, conduce la o abatere medie pătratică mică.

Mărimile numerice prezentate ne oferă o modalitate de comparare şi interpretare a datelor statistice.

Exemplu. Un antrenor trebuie să aleagă între doi sportivi pe cel care va reprezenta clubul la următorul concurs de nataţie. Antrenorul analizează performanţele sportivilor la ultimele 8 antrenamente.

Sportiv 1	$30,2$	$29,7$	$29,9$	$29,3$	$29,4$	$30,1$	$30,2$	$29,6$
Sportiv 2	$30,1$	$29,8$	$29,2$	$29,8$	$30,2$	$29,9$	$29,9$	$29,5$

Calculând media performanţelor obţinute de sportivi la cele 8 antrenamente, antrenorul constată că cei doi au obţinut aceeaşi performanţă medie $\overline{x} = 29,8$ s. Pentru a putea decide, el va trebui să compare gradul de împrăştiere a rezultatelor celor doi sportivi. De aceea, antrenorul trebuie să calculeze abaterea medie pătratică pentru rezultatele fiecărui sportiv:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot n_1 + \ldots + (x_p - \overline{x})^2 \cdot n_p}{n_1 + \ldots + n_p}.$$

Pentru sportivul 1 avem:

$$s^2 = \frac{(30,2 - 29,8)^2 + (29,7 - 29,8)^2 + (29,9 - 29,8)^2 + (29,3 - 29,8)^2}{8} +$$
$$+ \frac{(29,4 - 29,8)^2 + (30,1 - 29,8)^2 + (29,6 - 29,8)^2}{8},$$

adică $s^2 = \dfrac{0,77}{8} = 0,096$ şi deci abaterea medie pătratică va fi

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{0,096} = 0,310.$$

Pentru sportivul 2 avem:

$$s^2 = \frac{(30,1 - 29,8)^2 + (29,8 - 29,8)^2 \cdot 2 + (29,2 - 29,8)^2 + (30,2 - 29,8)^2}{8} +$$

$$+\frac{(29,9-29,8)^2\cdot 2+(29,5-29,8)^2}{8},$$

adică $s^2=\frac{0,72}{8}=0,09$ şi deci abaterea medie pătratică va fi în acest caz

$$\sqrt{s^2}=\sqrt{0,09}=0,300.$$

Se constată că abaterea medie patratică este mai mică în cazul celui de-al doilea sportiv, ceea ce arată că performanţele acestuia sunt mai puţin împrăştiate faţă de medie, deci sunt şanse mai mari ca acest sportiv să obţină la concurs o performanţă mai apropiată de medie.

O altă metodă de analiză şi interpretare a datelor statistice legate de studiul statistic al unui fenomen este **reprezentarea grafică** a seriei statistice asociate acestuia, reprezentare care permite vizualizarea datelor în scopul formării unei imagini intuitive şi imediate asupra fenomenului studiat.

I. O serie statistică cu variabilă **calitativă** poate fi reprezentată folosind:

I.1. diagrama circulară: se construieşte un disc a cărui arie reprezintă efectivul total (100%).

Valorile variabilei se reprezintă prin sectoare de cerc ale căror arii sunt proporţionale cu frecvenţele calculate în procente ale acestor valori; cu ajutorul regulii de trei simplă se determină măsura unghiului la centru corespunzător fiecărei frecvenţe.

I.2. dreptunghiul de structură: se consideră un sistem de două axe perpendiculare; axa verticală va fi considerată axa frecvenţelor exprimate în procente; cu baza pe axa orizontală se construieşte un dreptunghi cu înălţimea de 100 de unităţi de lungime; se divizează dreptunghiul prin linii orizontale obţinând dreptunghiuri cu ariile proporţionale cu frecvenţele.

I.3. prezentarea prin coloane sau benzi: coloanele sunt dreptunghiuri cu bazele egale, dispuse vertical, la distanţe egale unele de altele. Înălţimea fiecărui dreptunghi este proporţională cu frecvenţa exprimată în procente a fiecărei valori a variabilei. Benzile sunt dreptunghiuri cu bazele egale dispuse orizontal, la distanţe egale unele de altele. Lungimea fiecărui dreptunghi este proporţională cu frecvenţa exprimată în procente a fiecărei valori a variabilei.

Exemplu. Secţia atletism a Liceului cu Program Sportiv Roman a obţinut, la Campionatele Naţionale, următoarele rezultate: 154 medalii de aur, 142 medalii de argint şi 146 medalii de bronz. Să se întocmească tabelul de distribuţie statistică şi să se reprezinte grafic seria statistică obţinută.

Valorile caracteristicii	Aur	Argint	Bronz
frecvenţa	154	142	146
frecvenţa relativă(%)	$34,84$	$32,13$	$33,03$

Se calcu1ează mai întâi frecvenţele relative (frecvenţele în procente): efectivul total al populaţiei studiate este de $154+142+146=442$; frecvenţele relative vor fi $\frac{154}{442}=0,3484=34,84\%$, $\frac{142}{442}=0,3213=32,13\%$, $\frac{146}{442}=0,3303=33,03\%$.

Aplicăm regula de trei simplă pentru a determina măsura unghiului la centru corespunzător fiecărei valori:

$$\begin{array}{lll} 100\% & \ldots\ldots & 360^\circ \\ 34,84\% & \ldots\ldots & x^\circ \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 100\% & \ldots\ldots & 360^\circ \\ 32,13\% & \ldots\ldots & y^\circ \end{array}$$

$$x = \frac{34,84 \cdot 360}{100} \Rightarrow x = 125^\circ; \qquad y = \frac{32,13 \cdot 360}{100} \Rightarrow y = 116^\circ;$$

$$\begin{array}{lll} 100\% & \ldots\ldots & 360^\circ \\ 33,03\% & \ldots\ldots & z^\circ \end{array}$$

$$z = \frac{33,03 \cdot 360}{100} \Rightarrow z = 119^\circ.$$

Iată deci care vor fi reprezentările:

Diagrama circulară **Dreptunghiul de structură**

Reprezentarea prin coloane **Reprezentarea prin benzi**

II. Pentru reprezentarea grafică a seriilor statistice cu variabilă cantitativă continuă se utilizează:

II.1. histograma: pe axa orizontală a unui sistem de axe se iau segmente de lungimi egale cu amplitudinea claselor de valori şi apoi se construiesc, pe aceste segmente ca baze, dreptunghiuri cu înălţimea proporţionala cu frecvenţele absolute sau frecvenţele exprimate în procente ale claselor de valori corespunzătoare.

II.2. poligonul frecvenţelor: este linia poligonală determinată de centrele claselor de valori luate pe bazele superioare ale dreptunghiurilor histogramei.

Exemplu: Un elev, care se pregăteşte pentru un concurs de aruncarea ciocanului de 4 kg, are câte trei antrenamente pe săptămână, iar la fiecare antrenament execută câte 20 de aruncări. Iată rezultatele sale dintr-o săptămână: 2 aruncări de 20 m, o aruncare de 23 m, 2 aruncări de 25 m, 8 aruncări de 27 m, 5 de 28 m, 6 de 28,5 m, 9 de 30 m, 5 de 32 m, 6 de 32,5 m, 5 de 33 m, 5 de 33,5 m, 3 de 34 m, 2 de 35 m, 1 de 36 m.

Să se alcătuiască o serie statistică cu variabila cantitativă continuă, cu amplitudinea claselor de 5m. Să se determine valoarea medie, mediana, modulul, dispersia şi abaterea medie patratică a seriei, apoi să se reprezinte grafic această serie.

Caracteristica (lungimea)	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40]$
Frecvenţa (nr. aruncări)	3	21	33	3

Avem:

$$\overline{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_p n_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p},$$

de unde:

$$\overline{x} = \frac{22,5 \cdot 3 + 27,5 \cdot 21 + 32,5 \cdot 33 + 37,5 \cdot 3}{60} =$$

$$= \frac{67,5 + 577,5 + 1072,5 + 112,5}{60} = \frac{1830}{60} = 30,5.$$

Mediana: $M_c = 32,5$ (deoarece avem 60 de unitãti statistice, mediana va fi valoarea caracteristicii corespunzătoare unităţilor 30 şi 31; aceste unităţi au caracteristica în clasa $[30,35)$).

Modulul: $M_o = 32,5$ (valoarea centrală a clasei cu cel mai mare efectiv).
Acum:

$$s^2 = \frac{(x_1 - x)^2 \cdot n_1 + \ldots + (x_p - x)^2 \cdot n_p}{n_i + \ldots + n_p},$$

de unde:

$$s^2 = \frac{2(22,5 - 30,5)^2 \cdot 3 + (27,5 - 30,5)^2 \cdot 21 + (32,5 - 30,5)^2 \cdot 33}{60} +$$

$$+\frac{(37,5 - 30,5)^2 \cdot 3}{60} = \frac{64 \cdot 3 + 9 \cdot 21 + 4 \cdot 33 + 49 \cdot 3}{60} = \frac{660}{60} = 11.$$

Histograma: **Poligonul frecvenţe1or:**

Am obţinut o valoare destul de mare a dispersiei, ceea ce indică o dispersare a valorilor faţă de valoarea medie.

În fine, $\sqrt{s^2} = \sqrt{11} \equiv 3,32$. Şi abaterea medie pătratică este mare, subliniind faptul că seria are valorile împrăştiate faţă de medie.

III. O serie statistică cu variabilă **cantitativă discretă** se reprezintă în planul raportat la un sistem de coordonate carteziene. Alegerea unităţii de măsură pe fiecare axă se face astfel încât concluziile să se obţină cât mai uşor. Unitatea de măsură pe cele două axe poate fi diferită pentru că mărimile reprezentate pe aceste axe sunt diferite (pe o axă se reprezintă valorile variabilei, iar pe cealaltă axă se reprezintă frecvenţele). În acest caz, întâlnim următoarele reprezentări:

III.1. reprezentarea prin batoane: pe axa orizontală a sistemului de axe se reprezintă valorile x_i ale variabilei, iar pe axa verticală frecvenţele absolute n_i sau frecvenţele relative corespunzătoare valorilor x_i; segmentul cu extremităţile în punctele de coordonate $(x_i, 0)$, (x_i, n_i) reprezintă batonul corespunzător valorii x_i.

III.2. reprezentarea prin coloane sau benzi: coloanele sunt dreptunghiuri cu bazele egale şi înălţimile proporţionale cu frecvenţele valorilor variabilei. Benzile sunt dreptunghiuri aşezate orizontal, cu bazele egale şi lungimile proporţionale cu frecvenţele variabilei.

III.3. poligonul frecvenţelor: Într-un sistem de axe de coordonate se reprezintă prin puncte pe axa orizontală valorile x_i ale variabilei. În aceste puncte se ridică perpendiculare pe axa orizontală pe care se iau segmente proporţionale cu frecvenţele absolute corespunzătoare valorilor variabilei. Extremităţile acestor segmente se unesc cu o linie poligonală şi se obţine astfel poligonul frecvenţelor.

Exemplu. Antrenorul unei echipe de handbal a realizat, la un meci, o statistică privind numărul de goluri înscrise de fiecare jucător. Iată ce a obţinut:

Caracteristica (nr. goluri)	0	1	2	3	4	5
Frecvenţa (nr. jucători)	2	3	4	6	4	1

Media golurilor înscrise este

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1}{20} = \frac{50}{20} = 2,5.$$

Mediana este $M_e = 3$; modulul $M_o = 3$.

Dispersia este

$$s^2 = \frac{(0-2,5)^2 \cdot 2 + (1-2,5)^2 \cdot 3 + (2-2,5)^2 \cdot 4 + (3-2,5)^2 \cdot 6 + (4-2,5)^2 \cdot 4}{20} +$$

$$+ \frac{(5-2,5)^2 \cdot 1}{20} = \frac{12,5 + 6,75 + 1 + 1,5 + 9 + 6,25}{20} = \frac{37}{20} = 1,85$$

Abaterea medie pătratică este: $\sqrt{s^2} = \sqrt{1,85} = 1,36$.

Reprezentarea prin coloane: **Reprezentarea prin batoane:**

Reprezentarea prin benzi: **Poligonul frecvenţelor:**

Bibliografie

[1] M. Burtea, G. Burtea, *Matematică, manual pentru clasa a XI-a – M3*, Editura Carminis, Piteşti, 2001.

[2] D. Săvulescu, Fl. Cîrjan, C. Cîrjan, *Matematică, manual pentru clasa a XII-a – M3*, Editura Art, Bucureşti, 2002.

[3] M. Singer, C. Voica, M. Neagu, *Statistică şi probabilităţi, curs introductiv pentru elevi, studenţi şi profesori*, Editura Sigma, Bucureşti, 2003.

Profesor
Liceul cu program sportiv din Roman

Examenul pentru obţinerea gradului didactic II sesiunea august 2007 Universitatea Transilvania din Braşov

DE EUGEN PĂLTĂNEA

Subiecte

1. Să se alcătuiască un proiect didactic, conceput pentru o oră, cu tema ***Şirul lui Rolle***.

2. Fie $\mathcal{C}$ multimea funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, convexe pe $\mathbb{R}$. Pentru $a\in(0,1)$, notăm $\mathcal{F}_a$ mulţimea funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue pe $\mathbb{R}$, cu proprietatea:

$$f(ax+(1-a)y)+f((1-a)x+ay)\le f(x)+f(y),\quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Să se arate că, pentru oricare $a\in(0,1)$, are loc incluziunea $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{F}_a$ (se admite cunoscut faptul că o funcţie convexă pe $\mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}$).

b) Fie $x,y\in\mathbb{R}$ şi $a\in(0,1)$. Considerăm şirurile $(x_n)_{n\ge0}$ şi $(y_n)_{n\ge0}$, definite prin:

$$x_0=x,\ y_0=y\ \text{ şi }\ \begin{cases} x_{n+1}=ax_n+(1-a)y_n \\ y_{n+1}=(1-a)x_n+ay_n \end{cases}\quad \forall\ n\in\mathbb{N}.$$

Să se arate că $x_n=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}(2a-1)^n$, $y_n=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{2}(2a-1)^n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Să se determine limitele celor două şiruri.

c) Cu notaţiile de la b), să se arate că, pentru $x,y\in\mathbb{R}$, $a\in(0,1)$ şi $f\in\mathcal{F}_a$, avem:

$$f(x_n)+f(y_n)\le f(x)+f(y),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Să se deducă incluziunea $\mathcal{F}_a\subseteq\mathcal{F}_{1/2}$, pentru orice $a\in(0,1)$.

d) Fie $f\in\mathcal{F}_{1/2}$, şi $x,y\in\mathbb{R}$, cu $x<y$. Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\ge2$, notăm $t_i=x+\dfrac{i}{n}(y-x)$, unde $i\in\{0,1,\cdots,n\}$. Să se demonstreze inegalităţile:

$$\frac{f(t_k)-f(x)}{k}\le f(t_k)-f(t_{k-1})\le f(t_{k+1})-f(t_k)\le\frac{f(y)-f(t_k)}{n-k},\ \forall k\in\{1,\cdots,n-1\}.$$

e) Să se demonstreze relaţiile $\mathcal{F}_{1/2}\subseteq\mathcal{C}$ şi $\mathcal{F}_a=\mathcal{C}$, pentru orice $a\in(0,1)$.

3. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A şi L mijlocul înălţimii AD. Notăm cu E şi F proiecţiile lui L pe AB şi respectiv AC.

a) Să se demonstreze relaţia:

$$\frac{LE}{AB}=\frac{LF}{AC}=\frac{LD}{BC}\ .$$

b) Să se arate că L este punctul din interiorul triunghiului ABC care realizează minimul sumei pătratelor distanţelor la laturile acestui triunghi.

c) Să se determine locul geometric al punctului L considerând că A şi B sunt fixe, iar C descrie perpendiculara în A pe segmentul AB.

Soluţii, barem, comentarii

Fiecare din cele 3 subiecte a fost punctat cu note de la 1 la 10, nota lucrării reprezentând media aritmetică a celor trei note.

Subiectul 1. (**1 punct** din oficiu)

Proiectul didactic solicitat a fost apreciat după următoarele criterii: conţinut teoretic (4 puncte), prezentare didactică (3 puncte), relevanţa exemplelor (2 puncte).

Subiectul 2. (**1 punct** din oficiu)

a) (**2 puncte**) Considerăm un număr arbitrar a din intervalul $(0,1)$.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie convexă ($f\in\mathcal{C}$). Pentru oricare numere reale x şi y avem $f(ax+(1-a)y)\le af(x)+(1-a)f(y)$ şi $f((1-a)x+ay)\le(1-a)f(x)+af(y)$. Prin adunarea celor două relaţii obţinem:

$$f(ax+(1-a)y)+f((1-a)x+ay)\le f(x)+f(y),\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Apoi f este continuă pe $\mathbb{R}$ (deoarece orice funcţie reală convexă pe un interval deschis este continuă pe acel interval). Atunci $f\in\mathcal{F}_a$.

Ca urmare, pentru oricare $a\in(0,1)$, avem $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{F}_a$.

b) (**2 puncte**) Considerăm fixate numerele $x,y\in\mathbb{R}$ şi $a\in(0,1)$. Din relaţiile de recurenţă care definesc prin enunţ cele două şiruri, deducem că şirul $(x_n)_{n\ge0}$ satisface următoarea recurenţă liniară de ordinul al doilea:

$$x_{n+2}=2ax_{n+1}+(1-2a)x_n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Ecuaţia caracteristică asociată, $z^2-2az+2a-1=0$, are soluţiile $z_1=1$ şi $z_2=2a-1$, deci există constantele reale C_1 şi C_2 astfel încât $x_n=C_1+C_2(2a-1)^n,\ n\in\mathbb{N}$. Ţinând cont de termenii iniţiali ai şirului, $x_0=x$ şi $x_1=ax+(1-a)y$, obţinem:

$$x_n=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}(2a-1)^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Analog găsim:

$$y_n=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}(2a-1)^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Dar $a\in(0,1)$ implică $2a-1\in(-1,1)$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{x+y}{2}$.

c) (**2 puncte**) Fie $x,y\in\mathbb{R},\ a\in(0,1)$ şi $f\in\mathcal{F}_a$.

Conform definiţiei şirurilor $(x_n)_{n\ge0}$ şi $(y_n)_{n\ge0}$, avem:

$$f(x_{n+1})+f(y_{n+1})\le f(x_n)+f(y_n),\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Printr-un raţionament de inducţie, obţinem:

$$f(x_n)+f(y_n)\le f(x)+f(y),\ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Dar f este continuă pe $\mathbb{R}$. Atunci, în conformitate cu b), trecerea la limită în inegalitatea de mai sus conduce la următoarea inegalitate:

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}[f(x_n)+f(y_n)]\le f(x)+f(y). \tag{2}$$

Numerele reale x şi y fiind arbitrare, deducem că f aparţine mulţimii $\mathcal{F}_{1/2}$. La rândul lor, $a \in (0,1)$ şi $f \in \mathcal{F}_a$ sunt arbitrar alese. Rezultă $\mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_{1/2}$, oricare ar fi $a \in (0,1)$.

d) (**1,5 puncte**) Observăm că $t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n$ sunt $n+1$ numere în progresie aritmetică. Atunci, pentru $f \in \mathcal{F}_{1/2}$, avem: $2f(t_i) \leq f(t_{i-1}) + f(t_{i+1})$, pentru oricare $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Se obţine şirul de inegalităţi:

$$f(t_1) - f(t_0) \leq f(t_2) - f(t_1) \leq \cdots \leq f(t_n) - f(t_{n-1}).$$

În acest caz, pentru $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, rezultă:

$$\frac{f(t_k) - f(x)}{k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} [f(t_i) - f(t_{i-1})]}{k} \leq f(t_k) - f(t_{k-1}) \leq$$

$$\leq f(t_{k+1}) - f(t_k) \leq \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})]}{n-k} = \frac{f(y) - f(t_k)}{n-k}. \tag{3}$$

e) (**1,5 puncte**) Fie $f \in \mathcal{F}_{1/2}$. Din relaţia (3) deducem că, pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y$ şi $\lambda = \dfrac{k}{n} \in (0,1)$, unde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ şi $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, are loc inegalitatea

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y). \tag{4}$$

Considerăm $\lambda \in [0,1]$ şi $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y$. Fie $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere raţionale situate in intervalul $(0,1)$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Relaţia (4) asigură

$$f((1-\lambda_n)x + \lambda_n y) \leq (1-\lambda_n) f(x) + \lambda_n f(y).$$

Prin trecere la limită, obţinem

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

Rezultă că f este o funcţie convexă pe $\mathbb{R}$. Aşadar $\mathcal{F}_{1/2} \subseteq \mathcal{C}$. Din incluziunile (demonstrate anterior) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_a$, pentru orice $a \in (0,1)$, $\mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_{1/2}$, pentru orice $a \in (0,1)$ şi $\mathcal{F}_{1/2} \subseteq \mathcal{C}$, rezultă $\mathcal{F}_a = \mathcal{C}$, pentru orice $a \in (0,1)$.

Comentarii. Enunţul subiectului 2 indică etapele unei versiuni a demonstraţiei următoarei proprietăţi:

Propoziţia 1. *Mulţimea funcţiilor reale continue care, pentru un anume $a \in (0,1)$, satisfac relaţia*

$$f(ax + (1-a)y) + f((1-a)x + ay) \leq f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

este egală cu mulţimea funcţiilor reale convexe.

Evident, un enunţ similar caracterizează concavitatea funcţiilor reale. Ideea principală a demonstraţiei este aceea de a reduce problema la următoarea bine cunoscută caracterizare a convexităţii:

Propoziţia 2. *O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval deschis, este convexă dacă şi numai dacă este continuă şi satisface condiţia:*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \quad \forall\, x, y \in I.$$

Propoziţia 1 este o extensie a următorului rezultat datorat lui *Dan Ştefan Marinescu* şi *Viorel Cornea*:

Propoziţia 3 (reformulare după problema **C:2929**, G.M. Seria B, Nr.9/2005). *O funcţie continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface condiţia*

$$f(ax + (1-a)y) + f((1-a)x + ay) = f(x) + f(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

pentru un anume $a \in (0,1)$, dacă şi numai dacă f este o funcţie constantă sau este o funcţie de gradul I.

Este clar că Propoziţia 3 este o consecinţă a Propoziţiei 1 şi a versiunii sale relativ la proprietatea de concavitate.

În sfârşit, vom menţiona faptul că există mai multe variante simple de a soluţiona punctul b) al problemei. Astfel, expresia termenilor generali ai şirurilor $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ poate fi de asemenea demonstrată prin inducţie sau poate fi uşor obţinută pornind de la proprietatea imediată $x_n + y_n = x + y$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Subiectul 3. (**1 punct** din oficiu)

a) (**3 puncte**) $AELF$ este dreptunghi, deci $AE = LF$. Din $\dfrac{LE}{LF} = \dfrac{LE}{AE} = \operatorname{tg} C = \dfrac{AB}{AC}$, rezultă

$$\frac{LE}{AB} = \frac{LF}{AC}.$$

Apoi, deoarece L este mijlocul lui (AD), avem $\dfrac{LE}{LD} = \dfrac{LE}{LA} = \sin C = \dfrac{AB}{BC}$, de unde obţinem

$$\frac{LE}{AB} = \frac{LD}{BC}.$$

b) (**3 puncte**) Fie P, Q, R, S proiecţiile unui punct M din interiorul triunghiului ABC pe dreptele AB, BC, CA şi respectiv AD. Avem:

$$MP^2 + MQ^2 + MR^2 = MA^2 + MQ^2 \geq SA^2 + SD^2 \geq \frac{(SA+SD)^2}{2} =$$

$$= \frac{AD^2}{2} = LA^2 + LD^2 = LE^2 + LF^2 + LD^2,$$

cu egalitate în cazul $M = L$.

c) (**3 puncte**) Fie O mijlocul lui (AB). Avem $LO \perp LA$, deoarece LO este linie mijlocie în triunghiul dreptunghic ABD. Cum A şi O sunt fixe, deducem că locul geometric al punctului L este cercul de diametru AO, mai puţin punctele A şi O.

Comentarii. Problema propusă (formulată de *Marius Păun*) se referă în fapt la proprietăţile *punctului lui Lemoine* – punctul de intersecţie al simedianelor unui triunghi. Asfel, în cazul particular al unui triunghi dreptunghic, simedianele sunt concurente în mijocul înălţimii din vârful drept al triunghiului. La punctul a) se particularizează proprietatea: *distanţele punctului lui Lemoine la laturile triunghiului sunt proporţionale cu lungimile acestor laturi* (prima teoremă a lui *Grebe*). La punctul b) se cere demonstrarea, în cazul particular al unui triunghi dreptunghic, a proprietăţii următoare: *punctul din interiorul unui triunghi pentru care suma pătratelor distanţelor la laturile triunghiului este minimă este punctul lui Lemoine* (a doua teoremă a lui *Grebe*). Demonstraţia clasică a proprietăţii respective se bazează pe utilizarea inegalităţii lui *Cauchy-Buniakowski-Schwarz*.

Includerea acestui subiect în lucrare a avut ca raţiune şi posibilitatea abordării lui, fără dificultate, prin geometrie analitică.

Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea Transilvania din Braşov

SUGESTII PENTRU CURSURILE OPŢIONALE

Modelarea din punct de vedere matematic a unor fenomene din natură,

Curs opţional integrat de biomatematică pentru clasa a XI-a[1)]

DE CĂTĂLINA ANCA ISOFACHE

Acest curs opţional îşi propune să asigure formarea unor competenţe de bază în modelarea matematică a unor fenomene din lumea înconjurătoare. Învăţarea unor noţiuni de modelare matematică urmăreşte conştientizarea naturii matematicii ca o activitate de rezolvare a problemelor, bazată pe un *corpus* de cunoştinte şi de proceduri, dar şi ca o disciplină dinamică, strâns legată prin relevanţa sa de cotidian şi, prin rolul său, de ştiinţele naturii, de tehnologii şi de ştiinţele sociale.

Sensul major al acestui curs este mutarea accentului de pe predarea de informaţii pe formarea de capacităţi şi aptitudini. În elaborarea acestui curs se urmăreşte racordarea la programele pentru ciclul liceal, asigurarea continuităţii de la o clasă la alta şi stabilirea unor legături între disciplinele aceleiaşi arii curriculare.

Conţinuturile acestui curs sunt organizate pe două unităţi de învăţare. În prima parte, modulul conţine noţiuni de microbiologie şi noţiuni de matematică (probabilităţi, statistica şi matrici), iar cea de-a doua parte este formată din lecţii de modelare matematică a unor fenomene din natură prin care să se poată face trecerea spre discipline ce vor fi studiate în învăţământul universitar.

[1)] Prezenta programă a fost prezentată de autoare în cadrul celei de a XXXIV-a Sesiuni de comunicări metodico-ştiinţifice a filialelor din judeţul Prahova ale S.S.M.R. (N.R.)

Competenţe specifice	Conţinuturi
1. Aplicarea operaţiilor cu matrici şi proprietăţilor lor în probleme de calcul 2. Identificarea unor situaţii practice concrete care necesită asocierea unui tabel de date cu reprezentarea matricială a unui proces	Noţiunea de matrice. Exemple – Adunarea matricilor. Proprietăţi – Înmulţirea cu scalari. Proprietăţi – Înmulţirea a două matrici
3. Rezolvarea de ecuaţii matriciale, utilizând algoritmi specifici 4. Stabilirea unor condiţii de compatibilitate a unor sisteme de ecuaţii liniare şi identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora 5. Utilizarea unor reprezentanţi de tip matricial pentru modelarea unor situaţii concrete 6. Rezolvarea unor sisteme utilizând algoritmi specifici 7. Aproximarea soluţiilor unor sisteme de ecuaţii apelând la reprezentări grafice 8. Recunoaşterea unor date de tip probabilistic sau statistic în situaţii concrete 9. Corelarea datelor statistice sau probabilistice 10. Utilizarea unor algoritmi probabilistici sau statistici pentru stabilirea parametrilor unei situaţii concrete cu aplicaţii practice 11. Interpretare datelor statistice sau probabilistice în funcţie de fenomenele studiate 12. Analiza unor situaţii practice cu ajutorul conceptelor probabilistice sau statistice 13 Utilizarea instrumentului probabilistic sau statistic pentru compararea unor tipuri de fenomene	– Proprietăţile înmulţirii matricilor – Exerciţii – Inversa unei matrici – Ecuaţii matriciale – Sisteme de ecuaţii liniare cu cel mult 4 necunoscute. Regula lui *Cramer* – Metoda lui *Gauss* de rezolvare a unui sistem de ecuaţii liniare – Interpretarea geometrică a unui sistem liniar cu cel mult 3 necunoscute – Aplicaţii cu sisteme de ecuaţii liniare – Date statistice. Gruparea datelor statistice – Reprezentarea grafică a datelor statistice: diagrame circulare, diagrame prin benzi, histograme – Frecvenţa – Medii, dispersia – Operaţii cu evenimente – Evenimente aleatoare egal probabile. Probabilitatea unui eveniment – Variabile aleatoare – Probabilităţi condiţionate – Lanţuri *Markov*

Valori şi atitudini

Acest curs opţional are în vedere formarea la elevi a următoarelor valori şi atitudini:

1. Manifestarea curiozităţii ştiinţifice în rezolvarea de probleme.
2. Manifestarea iniţiativei şi disponibilităţii de a aborda sarcini variate.

3. Formarea obişnuinţei de a utiliza concepte şi metode specifice matematicii pentru rezolvarea unor probleme practice întâlnite în viaţa cotidiană.

4. Formarea motivaţiei pentru studierea matematicii ca domeniu relevant pentru viaţa socială şi profesională.

5. Formarea obişnuinţei de a folosi deprinderile şi cunoştinţele ştiinţifice pentru luarea unor decizii personale în ceea ce priveşte unele probleme de interes global.

6. Dezvoltarea unor atitudini pozitive faţă de studiul ştiinţelor în general.

Sugestii metodologice

Acest curs opţional are drept obiectiv crearea condiţiilor favorabile fiecărui elev de a-şi forma şi dezvolta competenţele într-un ritm individual, de a-şi transfera cunoştinţele acumulate dintr-o zonă de studiu în alta. Pentru aceasta profesorul îşi orientează demersul didactic spre realizarea următoarelor tipuri de activităţi:

1. Formularea de sarcini de lucru care să vizeze:
   – reprezentarea şi analiza relaţiilor folosind tabele, diagrame sau grafice,
   – rezolvarea de probleme pentru care nu există metoda de rezolvare imediată şi evidentă,
   – constituirea de succesiuni ordonate ale elementelor studiate şi argumentarea modului de ordonare.
2. Folosirea computerelor pentru rezolvarea de exerciţii şi probleme.
3. Organizarea de acţiuni experimentale individuale şi în grup.
4. Organizarea de prezentări orale fie individuale, fie în grup restrâns.
5. Organizarea de acţiuni individuale sau în grup restrâns în proiecte pe termen lung.

Modalităţi de evaluare

1. Teste elaborate de profesor pentru verificarea cunoştinţelor şi aptitudinilor.
2. Referate şi portofolii.
3. Testare asistată pe calculator.
4. Clasificări şi reprezentări de date.
5. Observarea unor fenomene, procese şi nominalizarea unor concepte.
6. Compararea unor date, stabilirea unor relaţii.
7. Rezolvarea de probleme prin modelare şi algoritmizare.
8. Relaţionări între diverse tipuri de reprezentări.

Planificarea calendaristică

Unitatea de învăţare Conţinuturi	Competenţe specifice	Nr. ore	Săptămâna
1. Noţiuni introductive despre celule, viruşi şi microbiologie	C.13	2	Sl; S2
2. Modalităţi de multiplicare a viruşilor	C.9 C.10	2	S3;S4
3. Folosirea unor funcţii matematice în modelarea proceselor de multiplicare a viruşilor	C.8 C.9 C.10	2	S5;S6

4. Elemente de statistică matematică. Reprezentări grafice ale unor serii statistice ale diferitelor tipuri de multiplicări ale viruşilor	C.10 C.11 C.12	3	S7;S8;S9
5. Mărimi medii ale unor serii statistice	C.10	2	S10; S11
6. Indicatori de variaţie utilizaţi în serii statistice	C.10 C.11	2	S12;S13
7. Probleme de numărare. „Viruşi“ sau „Multiplicare genetică“	C.8 C.9	2	S14;S15
8. Elemente de calculul probabilităţilor. Elemente introductive	C.8 C.11	2	S16;S17
9. Noţiunea de probabilitate. Probabilitatea infestării cu virusul „Chickenpox“	C.8 C.9	2	S18;S19
10. Probabilităţi condiţionate. Evenimente independente	C.8 C.9	2	S20;S21
11. Scheme clasice de probabilitate legate de evoluţia tipurilor de viruşi modelaţi	C.11 C.12 C.13	2	S22;S23
12. Ecuaţii matriciale cu aplicaţii în meteorologie. Introducerea matricei de stare, matricei de tranziţie şi matricei stocastice în modelarea unor fenomene din natură	C.1 C.2 C.3 C.6 C.7	2	S24;S25
13. Lanţuri *Markov*. Definiţie	C.13	2	S26;S27
14. Proprietăţi ale lanţurilor *Markov* discrete şi continue	C.8 C.13	2	S28;S29
15. Modelarea unei boli infecţioase din punct de vedere epidemiologic şi matematic	C.1 C.2 C.3 C.4 C.5 C.6 C.7 C.13	2	S30;S31
16. Exerciţii pe grupuri de lucru. „Fumătorii şi cancerul pulmonar“ (Elevii pot alege orice altă temă legată de modelarea matematică a unei boli infecţioase)	C.1 – C.13	2	S32;S33;S34
17 Prezentarea materialelor realizate de elevi	C13	1	S35

Bibliografie

[1] E. Allman, I. Rhodes*Mathematical Models in Biology. An introduction*, Cambridge University Press, 2003.

[2] J. E. Freud, *Introduction in probability.*

[3] I. Cheşca, D. Constantinescu, *Statistică matematică şi calculul probabilităţilor*, Ed. Teora, 1998.

[4] M. Fogiel, *REA'S Problem Solvers „Statistics“. Guide to Any Textbook* 2004.

[5] M. Andrei, C. Voica, M. Ciho, *Biologie, manual pentru clasa a IX-a.*

[6] Website: http//en.wikipedia.org/wiki/Virus.

Liceul teoretic A. I. Cuza
din Ploieşti

NOTE MATEMATICE

Asupra comutantului unui endomorfism (unei matrice pătratice)

DE ADRIAN REISNER

Abstract

In this article, the author establishes the dimension of the commutant $f(A)$ of an endomorphism $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. The subalgebra $f(A)$ is compared to the algebra $\mathbb{C}[A]$. The dimension of the commutant of a general matrix $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ is established by using the Jordan form of this matrix.

Key words: Commutant. Cyclic endomorphism. Cyclic decomposition. Codimension of the commutant

M.S.C.: 15A27

Definiţii şi notaţii

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathbb{C}-$algebră având un element neutru şi $a \in \mathcal{A}$. Ştim că există un morfism şi unul singur de $\mathbb{C}-$algebre $\varphi_a : \mathbb{C}[X] \to \mathcal{A}$ astfel încât să avem $\varphi_a(X) = a$. Acest morfism asociază fiecărui polinom $P(X) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i X_i$ elementul $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i$. Imaginea morfismului φ_a este o subalgebră a algebrei $\mathcal{A}$ pe care o vom nota cu $\mathbb{C}[a]$ (este o algebră comutativă, algebra $\mathbb{C}[X]$ fiind comutativă).

Să aplicăm aceste consideraţii în cazul când $\mathcal{A}$ este algebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\mathbb{C}[M]$ se numeşte *algebra polinoamelor matricii* M. Dacă $\mathcal{A}$ este algebra $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ şi $u \in \mathcal{L}(C)$, atunci $\mathbb{C}[u]$ este *algebra polinoamelor endomorfismului* u.

Vom nota cu aceeaşi literă un endomorfism $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ şi matricea lui în baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbb{C}^n$.

Pentru $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ considerăm aplicaţia liniară $\rho_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $X \mapsto AX - XA$. Nucleul acestui morfism se numeşte *comutantul matricei* A şi este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (este vorba de mulţimea $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$. Avem, mai mult :

Propoziţia 1. *Mulţimea $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ este o subalgebră a algebrei $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ conţinând algebra $\mathbb{C}[A]$.*

Demonstraţia este imediată.

Cazul unei matrici diagonalizabile.

Considerăm o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalizabilă; notăm $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ valorile proprii două câte două distincte al matriciei A şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ ($\alpha_i \geq 1$) multiplicităţile lor respective. Avem, atunci :

Teorema 2. *Au loc următoarele*:

a) $\dim \mathbb{C}[A] = p$;

b) $\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2$;

c) *Următoarele patru aserţiuni sunt echivalente*:

i) $\dim \mathcal{C}(A) = n$; ii) $\dim \mathbb{C}[A] = p$; iii) $p = n$; iv) $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$

Demonstraţie. a) Matricea A fiind diagonalizabilă, polinomul minimal $\mu_A(X)$ al matriciei A (polinomul unitar P de grad minim astfel încât $P(A) = 0$, generator al idealului principal $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A) = 0\}$) este, cu notaţiile precedente, $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$. Aplicaţia liniară: $\theta : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]$, $P \mapsto P(A)$, este surjectivă şi nucleul său este $\mathrm{Ker}\theta = \mu_A(X)\mathbb{C}[X]$. Restricţia morfismului θ la $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ (spaţiul vectorial al polinoamelor complexe de grad cel mult $p-1$) este deci injectivă şi chiar surjectivă căci, dacă $P \in \mathbb{C}[X]$, avem $P(A) = R(A)$, unde R este restul lui P modulo μ_A. În final, $\dim \mathbb{C}[A] = \dim \mathbb{C}_{p-1}[X] = p$ c.c.t.d.

b) Fie $S_1, \ldots, S_p$ subspaţiile proprii al endomorfismului A asociate valorilor proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ respectiv. Endomorfismul B comutând cu A, lasă stabil fiecare subspaţiu S_i şi induce pe subspaţiu S_i un endomorfism B_i. Aplicaţia liniară definită prin $\Phi : \mathcal{C}(A) \to \mathcal{L}(S_1) \times \ldots \times \mathcal{L}(S_p)$, $B \mapsto (B_1, \ldots, B_p)$, este injectivă (căci dacă B este nul pe fiecare spaţiu S_i, atunci $B = 0$). Ea este şi surjectivă: într-adevăr fiind dat $(B_1, \ldots, B_p) \in \mathcal{L}(S_1) \times \ldots \times \mathcal{L}(S_p)$, endomorfismul B, care coincide cu B_i pe subspaţiul S_i, aparţine comutantului lui A căci B_i comută cu $A_{S_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{S_i}$. În final, $\mathcal{C}(A)$ este izomorf cu spaţiul produs $\mathcal{L}(S_1) \times \ldots \times \mathcal{L}(S_p)$ şi deci

$$\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(S_1) \times \ldots \times \mathcal{L}(S_p) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2, \text{ c.c.t.d.}$$

Observaţie. Avem

$$\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 \geq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n$$

(căci $\alpha_i^2 \geq \alpha_i$, pentru orice i).

c) Având $\mathbb{C}[A] \subseteq \mathcal{C}(A)$, avem egalitate dacă aceste spaţii vectoriale au aceeaşi dimensiune.

• Presupunând că $\dim \mathcal{C}(A) = n$, inegalitatea din observaţia precedentă devine o egalitate şi deci $\alpha_i^2 = \alpha_i$, pentru orice i. Deducem imediat că $\alpha_i = 1$, oricare ar fi i, deci $p = n$ şi $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathbb{C}[A] = n$, fie $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$ c.c.t.d.

• Presupunând că $\dim \mathbb{C}(A) = n$, i.e. $p = n$, suma $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i$ fiind egală cu n, deducem că $\alpha_i = 1$, pentru orice i ($\alpha_i \geq 1$). Prin urmare avem

$$\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{p} 1 = n = \dim \mathbb{C}(A)$$

şi în final $\mathbb{C}[A] = \mathcal{C}(A)$, c.c.t.d.

• În fine, presupunând că $\mathbb{C}[A] = \mathcal{C}(A)$, obţinem imediat (din inegalităţile următoare

$$\dim \mathbb{C}[A] = p \leq n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = \dim \mathcal{C}(A))$$

că $\dim \mathbb{C}[A] = p = n = \dim \mathcal{C}(A)$ (toate inegalităţile fiind egalităţi), c.c.t.d.

Vom nota

$$\mathcal{C}^2(A) = \{C \in \mathcal{L}(\mathbb{C}) \mid \forall\, B \in \mathcal{C}(A),\ BC = CB\};$$

centrul algebrei $\mathcal{C}(A)$ se numeşte *bicomutantul* endomorfismului A.

Are loc:

Teorema 3. *Pentru un endomorfism* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$*, diagonalizabil, avem*

$$\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}(A).$$

Demonstraţie. Cu notaţile precedente, matricea A fiind diagonalizabilă, există $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = P\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{\alpha_1}, \ldots, \lambda_p I_{\alpha_p})P^{-1}$. Pentru orice $B \in \mathcal{C}(A)$, B lăsând stabil fiecare subspaţiu S_i, avem $B = P\mathrm{diag}(B_1 \ldots, B_p)P^{-1}$, unde matricea bloc $B_j \in \mathcal{M}_{\alpha_j}(\mathbb{C})$ ($j \in \{1, \ldots, p\}$). Fie, atunci, $C \in \mathcal{C}^2(A)$. Deoarece $A \in \mathcal{C}(A)$, avem $C \in \mathcal{C}(A)$, $C = P\mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_p)P^{-1}$. Cum $CB = BC$, pentru orice $B \in \mathcal{C}(A)$, rezultă $B_j C_j = C_j B_j$ pentru orice $B_j \in \mathcal{M}_{\alpha_j}(\mathbb{C})$. Matricea C_j este deci matricea unei omotetii $C_j = \sigma_j I_{\alpha_j}$. Considerăm atunci polinomul interpolator *Lagrange* $\pi(X) \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $\pi(\lambda_j) = \sigma_j$, pentru $j \in \{1, \ldots, p\}$. Avem $P^{-1}CP = P^{-1}\pi(A)P$ şi, în final, $C = \pi(A)$ (i.e. $C \in \mathbb{C}(A)$). Deducem teorema căci $\mathbb{C}(A) \subseteq \mathcal{C}^2(A)$.

Observaţie. Teorema 8 va generaliza această teoremă în cazul unei matrici oarecare.

Endomorfisme ciclice

Fie $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ şi, pentru $x \in \mathbb{C}^n$, considerăm mulţimea $I_x = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A)(x) = 0\}$. Spaţiul $\mathbb{C}^n$ fiind de dimensiune finită, I_x este un ideal nenul al lui $\mathbb{C}[X]$. Acest ideal, fiind principal, este generat de un unic polinom unitar μ_x (*polinomul minimal punctual al vectorului* x). Notăm $\xi_A(X) = \det(XI - A)$ polinomul caracteristic al endomorfismului A.

Un endomorfism A este *ciclic* dacă există $x \in \mathbb{C}^n$, astfel încât, să avem

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}\ \{A^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Teorema următoare indică o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un endomorfism să fie ciclic (vezi capitolul VII, §4., paginile 215 - 218, în [1]).

Teorema 4. *Au loc următoarele*:

a) $\mu_A =$ c.m.m.m.c. (μ_x), $x \in \mathbb{C}^n$.

b) *Dacă* $\mu_x \wedge \mu_y = 1$, *atunci* $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$.

c) *Există* $x \in \mathbb{C}^n$ *astfel încât* $\mu_x = \mu_A$.

d) *A este ciclic dacă şi numai dacă* $\chi_A = \mu_A$.

Demonstraţie. a) Polinomul minimal μ_A are proprietatea că, pentru orice $x \in \mathbb{C}^n$, $\mu_A(A)(x) = 0$ (deci μ_x divide μ_A). Familia $\{\mu_x, x \in \mathbb{C}^n\}$ admite un c.m.m.m.c. Q şi Q divide μ. Invers, pentru orice $x \in \mathbb{C}^n$, $Q(A)(x) = 0$ şi deci μ_A divide Q, de unde deducem rezultatul.

b) Avem, evident, $\mu_x \mu_y \in I_{x+y}$, deci μ_{x+y} divide $\mu_x \mu_y$. Dacă $\mu_x \wedge \mu_y = 1$, atunci $\mathrm{Ker}[\mu_x(A)\mu_y(A)] = \mathrm{Ker}\ \mu_x(A) \oplus \mathrm{Ker}\ \mu_y(A)$ (teorema descompunerii în nuclee). Dar $\mu_{x+y}[\mathrm{Ker}\ \mu_x(A)] \subseteq \mathrm{Ker}\ \mu_x(A)$ şi $\mu_{x+y}[\mathrm{Ker}\mu_y(A)] \subseteq \mathrm{Ker}\mu_y(A)$. Prin urmare, $\mu_{x+y}(A)(x) = 0$ şi $\mu_{x+y}(A)(y) = 0$. Deducem că μ_{x+y} este divizibil cu μ_x şi cu μ_y, deci cu produsul $\mu_x \mu_y$. Cele trei polinoame μ_{x+y}, μ_x şi μ_y fiind unitare avem $\mu_{x+y} = \mu_x \mu_y$, c.c.t.d.

c) Fie $\mu_A = \prod\limits_1^r Q_i$, unde $Q_i = P_i^{\alpha_i}$, descompunerea polinomului minimal în factori primi. Notând cu $F_i = \mathrm{Ker} Q_i(A)$ şi $A_i = A_{F_i}$, avem $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{i=1}^r F_i$. Polinomul minimal μ_{A_i} al endomorfismului $A_i \in \mathcal{L}(F_i)$ divide pe $Q_i = P_i^{\alpha_i}$. Dacă există i astfel încât să avem $d^\circ \mu_{A_i} < d^\circ Q_i$, atunci $d^\circ \left(\prod\limits_1^r \mu_{A_i}\right) < d^\circ \mu_A$, ceea ce este absurd căci $\left(\prod\limits_1^r \mu_{A_i}\right)(A) = 0$; deducem că $\mu_{A_i} = Q_i$. Ne propunem să demonstrăm că există $x \in F_i$ astfel încât $\mu_x = \mu_{A_i}$. Ţinând seama de a), avem $\mu_{A_i} = P_i^{\alpha_i} =$ c.m.m.m.c. (μ_x), pentru $x \in F_i$. Fie $x \in F_i$. Avem $\mu_x = P_i^{\beta(x)}$, unde $\beta(x) \le \alpha_i$. Dacă $\beta(x) < \alpha_i$, pentru orice $x \in F_i$, atunci $P_i^{\alpha_i - 1}(A_i) = 0$, ceea ce este imposibil, căci $Q_i = P_i^{\alpha_i} = \mu_{A_i}$ este polinomul minimal al lui A_i. Deci există $x \in F_i$ astfel încât $\mu_x = P_i^{\alpha_i} = \mu_{A_i}$. Alegem un astfel de vector x_i aparţinând spaţiului F_i. Ţinând seama de rezultatul b), avem, cu $x = \sum\limits_1^r x_i$, $\mu_x = \prod\limits_1^r \mu_{A_i} = \prod\limits_1^r Q_i = \mu_A$.

d) Fie $\mu_A(X) = X^p + \sum\limits_{i=0}^{p-1} \alpha_i X_i$. A fiind un endomorfism ciclic, fie $x \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}\{A_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Avem imediat $\mu_x = \mu_A$ şi deci $\mathbb{C}^n$ este generat de sistemul liber $\{x, Ax, \ldots, A^{p-1}x\}$. Deci $p = n$ (i.e. $d^\circ \mu_A = d^\circ \chi_A$) şi, în final, $\chi_A = \mu_A$.

Invers, presupunând că $\chi_A = \mu_A$, avem, ţinând seama de c), că există $x \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $\mu_x = \mu_A = \chi_A$. Sistemul de vectori $\{x, Ax, \ldots, A^{n-1}x\}$ este liber, deci formează o bază a spaţiului $\mathbb{C}^n$, i.e. A este ciclic. Teorema 4 este astfel demonstrată.

Observaţie. Fiind dat un endomorfism ciclic A având polinomul caracteristic

$$\chi_A(X) = \mu_A(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_1 X + \alpha_0,$$

există o bază $\mathcal{B}_c = \{x, Ax, \ldots, A^{n-1}x\}$ a spaţiului $\mathbb{C}^n$. Atunci

$$\mathrm{Mat}(A, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

este matricea asociată polinomului $\chi_A(X) = \mu_A(X)$.

Descompunerea ciclică al unui endomorfism

Pentru $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$, subspaţiul V al spaţiului $\mathbb{C}^n$, este ciclic relativ la A dacă şi numai dacă V este stabil pentru endomorfismul A şi restricţia $A_{|V}$ este un endomorfism ciclic al subspaţiului V. Teorema următoare este demonstrată în [1] – vezi teorema 2.7, pagina 209, în [1] şi capitolul VII, §4, paginile 215 - 218 în [1]:

Teorema descompunerii ciclice. *Pentru orice* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$, *există* r *subspaţii vectoriale nenule ale spaţiului* $\mathbb{C}^n$ *ciclice relativ la* $A, V_1, \ldots, V_r$, *astfel încât*:

α) $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$;

β) *Pentru* $j \in \{1, \ldots, r-1\}$ *polinomul minimal* μ_j *al endomorfismului* $A_{|V_j}$ *divide polinomul* μ_{j+1}.

Definiţie. *Polinoamele* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ *se numesc factorii invarianţi ai endomorfismului* A *şi* $\mu_A = \mu_r$.

Cazul unei matrici nediagonalizabile

Presupunând aici că endomorfismul A nu este diagonalizabil, fie $\chi_A(X) = \det(XI - A)$ polinomul caracteristic al matricei A. Avem atunci:

Teorema 5. *Au loc următoarele afirmaţii*:

a) $\dim \mathbb{C}[A] \leq n$;

b) $\dim \mathcal{C}(A) \geq n$;

c) *Cele trei aserţiuni ce urmează sunt echivalente*:

i) $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$;   ii) $\chi_A(X) = \mu_A(X)$;   iii) A *este un endomorfism ciclic.*

Demonstraţie. a) Dimensiunea spaţiului vectorial $\mathbb{C}[A]$ este (şi aici) $\dim \mathbb{C}[A] = d^\circ \mu_A$. Ţinând seama de teorema lui *Cayley-Hamilton* această dimensiune este inferioară sau egală cu n.

b) Corpul $\mathbb{C}$ fiind algebric închis matricea A este triangularizabilă, adică există $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ şi T matrice triunghiular superioară astfel încât $A = PTP^{-1}$. Avem imediat, atunci, $\mathcal{C}(A) = P\mathcal{C}(T)P^{-1}$ şi deci $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(T)$. Fie S spaţiul vectorial al soluţiilor $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ale sistemului $TX = XT$. Acest spaţiu S conţine ca subspaţiu mulţimea S' a matricilor triunghiulare superior X verificând $TX = XT$. Ne propunem să arătăm că $\dim S' \geq n$. Sistemul liniar $TX = XT$ este un sistem de n^2 ecuaţii având $\dfrac{n(n+1)}{2}$ necunoscute (corespunzătoare coeficienţilor lui X situaţi în partea superioară a matricii X). Ecuaţiile corespunzătoare coeficienţilor situaţi dedesubtul diagonalei pricipale sunt triviale, produsul a două matrici triunghiulare superior fiind o matrice triunghiulară superior. Ecuaţiile corespunzătoare coeficienţilor situaţi pe diagonala principală sunt şi ele triviale căci avem, cu notaţii evidente, $(XT)_{ii} = X_{ii}T_{ii} = T_{ii}X_{ii} = (TX)_{ii}$. În final, sistemul liniar

$TX = XT$ este echivalent cu un sistem având $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ecuaţii şi $\dfrac{n(n+1)}{2}$ necunoscute. Deducem imediat că $\dim S' \geq \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = n$. Dacă $\dim S' \geq n$, avem cu atât mai mult $\dim S \geq n$, c.c.t.d.

c) Presupunând că $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$, avem atunci (ţinând seama de a) şi b)) că $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathbb{C}[A] = n$. În particular, $\dim \mathbb{C}[A] = d^\circ \mu_A = n$. Polinomul minimal μ_A fiind un divizor al polinomului caracteristic χ_A, avem $\chi_A = \mu_A$. Invers, să presupunem că $\chi_A = \mu_A$. Am demonstrat – teorema 4 d) – că, în acest caz, A este un endomorfism ciclic şi deci există $x \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $\mathbb{C}^n = \operatorname{Vect}\{A^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Aplicaţia liniară $\mathcal{C}(A) \to \mathbb{C}^n$, $B \mapsto Bx$, este injectivă căci dacă avem $Bx = 0$, atunci $BA^k x = A^k Bx = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Endomorfismul B se anulează pe baza $\{x, Ax, \ldots, A_{n-1}x\}$ a spaţiului $\mathbb{C}^n$, deci $B = 0$. Deducem că $\dim \mathcal{C}(A) \leq \dim \mathbb{C}^n = n$ şi, ţinând seama de b), $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathbb{C}[A] = d^\circ \mu_A = n$. Având $\mathbb{C}[A] \subseteq \mathcal{C}(A)$, deducem egalitatea $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$, c.c.t.d.

Observaţie. Pentru a demonstra aserţiunea c) se poate utiliza şi teorema descompunerii în subspaţii ciclice folosind factorii invarianţi $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ ai endomorfismului A (vezi teorema citată anterior).

Ne propunem să calculăm dimensiunea spaţiului $\mathcal{C}(A)$ în cazul în care matricea A nu este diagonalizabilă. Corpul $\mathbb{C}$ fiind algebric închis, polinomul caracteristic al endomorfismului A este scindat adică $\chi A(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Există o bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{C}^n$, astfel încât $\operatorname{Mat}(A, \mathcal{B}) = \operatorname{diag}(S_1, S_2, \ldots, S_p)$ unde $S_i = \operatorname{diag}(J_{\lambda_i}(r_{i1}) \ldots J_{\lambda_i}(r_{ik_i}))$, matricea $J_{\lambda_i}(r_{ij})$ fiind matricea bloc de forma următoare ([1], p. 219)

$$J_{\lambda_i}(r_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \ \ldots & 0 \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ 0 & & \ldots\ldots\ldots & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

adică matrice pătrată $r_{ij} \times r_{ij}$ cu $r_{i1} \geq r_{i2} \geq \ldots \geq r_{ik_i} \geq 1$ şi $\sum_{j=1}^{k_i} r_{ij} = \alpha_i$, α_i fiind multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ_i. Pentru $i \in \{1, \ldots, p\}$, r_{i1} este indicele valorii proprii λ_i; polinomul minimal al matriciei A este, atunci,

$$\mu_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{r_{i1}}.$$

Din punct de vedere matricial există o matrice inversibilă P astfel încât $A = PJP^{-1}$, unde matricea J este de forma $J = \operatorname{diag}(J_1, J_2 \ldots J_m)$, fiecare matrice J_i fiind o matrice *Jordan*.

Notând cu $d_i = r_{i2} + 2r_{i3} + \ldots + (k_i - 1)r_{iki}$, avem:

Teorema 6. *Pentru orice endomorfism $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$, avem*

$$\dim \mathcal{C}(A) = n + 2 \sum_{i=1}^{p} d_i.$$

Demonstraţie. Avem echivalenţele următoare

$$Y \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow YA = AY \Leftrightarrow XJ = JX,$$

unde $Y = PJP^{-1}$. Descompunem matricea X în matrici bloc corespunzând dimensiunilor matricilor *Jordan* J_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ şi obţinem, cu $X = [X_{ij}]$, pentru $i, j \in \{1, \ldots, m\}$:

$$XJ = JX \Leftrightarrow J_i X_{ij} = X_{ij} J_j. \tag{1}$$

Acest sistem conduce la următoarele:

1) dacă $SpJ_i \neq SpJ_j$, atunci $X_{ij} = 0$;

2) dacă $SpJ_i = SpJ_j$ (i.e. $J_i \in \mathcal{M}_u(\mathbb{C})$ şi $J_j \in \mathcal{M}_v(\mathbb{C})$ au aceeaşi valoare proprie), atunci toate soluţiile X_{ij} ale sistemului (1) sunt de forma:

$X_{ij} = Z$ dacă $u = v$; $X_{ij} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$, dacă $u > v$ şi $X_{ij} = (Z\,0)$ dacă $u < v$,

unde Z este o matrice pătrată triunghiulară superior de dimensiunea $t = \min(u, v)$ de forma

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots\ldots\ldots & z_t \\ 0 & z_1 & z_2 \quad \ldots & z_{t-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & z_1 \end{pmatrix}.$$

Dimensiunea spaţiului vectorial generat de o astfel de matrice este $t = \min(u, v)$. Avem, deci, cu notaţiile precedente:

$$\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{u,v=1}^{k_i} \min(r_{iu}, r_{iv}).$$

Inegalităţile $r_{i1} \geq r_{i2} \geq \ldots \geq r_{ik_i} \geq 1$ conduc, atunci, pentru $i \in \{1, \ldots, p\}$, la egalitatea următoare

$$\sum_{u,v=1}^{k_i} \min(r_{iu}, r_{iv}) = r_{i1} + 3r_{i2} + \ldots + (2k_i - 1)r_{ik_i} = (r_{i1} + r_{i2} + \ldots + r_{ik_i}) + 2d_i,$$

unde am notat cu $d_i = r_{i2} + 2r_{i3} + \ldots + (k_i - 1)r_{ik_i}$.

Având $\sum\limits_{j=1}^{k_i} r_{ij} = \alpha_i$, deducem imediat că

$$\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + 2d_i) = n + 2\sum_{i=1}^{p} d_i,$$

c.c.t.d.

Observaţii. 1) Această teoremă conduce la o altă demonstraţie a teoremei 5. Într-adevăr, avem $\dim \mathcal{C}(A) = n + 2\sum\limits_{i=1}^{p} d_i \geq n$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\sum\limits_{i=1}^{p} d_i = 0$, i.e. dacă şi numai dacă $d_i = 0$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, p\}$ (pentru fiecare valoare proprie λ_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$, există un singur bloc *Jordan* de dimensiune $r_{i1} \times r_{i1}$). În acest caz, pentru $i \in \{1, \ldots, p\}$, $r_{i1} = \alpha_i$ este indicele valorii proprii λ_i (i.e. polinomul minimal al endomorfismului A este $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i} =$ $= \chi_A(X)$.)

2) În cazul când matricea A este diagonalizabilă, pentru $i \in \{1, \ldots, p\}$, avem egalităţile $r_{i1} = r_{i2} = \ldots = r_{i}\alpha_i = 1$ şi deci $\sum_{u,v=1}^{\alpha_i} \min(r_{iu}, r_{iv}) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\alpha_i^2}$, deci $\sum_{u,v=1}^{\alpha_i} \min(r_{iu}, r_{iv}) = \alpha_i^2$ şi $\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2$, rezultat obţinut în teorema 2 b).

Corolarul 7. *Pentru orice endomorfism $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ codimensiunea comutantului $\mathcal{C}(A)$ este un număr par.*

Demonstraţie. Ţinând seama de teorema precedentă, avem

$$\operatorname{codim} \mathcal{C}(A) = n^2 - \dim \mathcal{C}(A) = n^2 - n - 2\sum_{j=1}^{p} d_i \equiv 0 \,(\bmod\ 2),$$

deoarece $n^2 - n \equiv 0 \,(\bmod\ 2)$ şi corolarul este demonstrat.

Utilizând teorema descompunerii ciclice ne propunem să demonstrăm teorema 3 în cazul unei matrici oarecare. Fie $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{r} V_j$ o descompunere a spaţiului $\mathbb{C}^n$ în subspaţii ciclice pentru A. $A|_{V_j}$ fiind ciclic, notăm cu e_j un vector $e_j \in V_j$ astfel încât $V_j = \text{Vect}\,\{e_j, Ae_j \ldots\}$ şi cu μ_j polinomul minimal al endomorfismului $A|_{V_j}$ (egal cu polinomul său caracteristic). Pentru orice vector $y \in \mathbb{C}^n$ există r polinoame $Q_1, \ldots, Q_r$ astfel încât $y = Q_1(A)e_1 + \ldots + Q_r(A)e_r$.

Teorema 8. *Pentru un endomorfism oarecare $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$, avem $\mathcal{C}^2(A) = \mathbb{C}(A)$.*

Demonstraţie. Avem imediat, cu notaţiile precedente, $A(y) = AQ_1(A)e_1 +$ $+ \ldots + AQ_r(A)e_r$ şi $P_jA(y) = AQ_j(A)e_j = AP_j(y)$, fiindcă $AV_j \subseteq V_j$, i.e. $P_j \in \mathcal{C}(A)$. Deducem că oricare ar fi $B \in \mathcal{C}^2(A)$, $P_jB = BP_j$. Fiind dat $B \in \mathcal{C}(A)$, avem, pentru $j \in \{1, \ldots, r\}$, $B(e_j) = B[Pj(e_j)] = Pj[B(e_j)] \in V_j$. Deoarece V_j este ciclic pentru A, există $S_j \in \mathbb{C}[X]$ verificând $B(e_j) = S_j(A)(e_j)$. Deducem că, pentru orice vector $v_j = R(A)e_j \in V_j$, unde $R \in \mathbb{C}[X]$, avem

$$B(v_j) = B[R(A)e_j] = R(A)B(e_j) = R(A)[S_j(A)(e_j)] = S_j(A)[R(A)(e_j)] = S_j(A)vj.$$

Ne propunem să demonstrăm că, oricare ar fi $v_j \in V_j$, avem $S_j(A)v_j = S_r(A)v_j$, pentru orice $j \in \{1, \ldots, r\}$. Pentru $j \in \{1, \ldots, r\}$, considerăm aplicaţia liniară $\theta_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ astfel definită astfel

$$\theta_j : v_j = R(A)e_j \in V_j \mapsto (Rm_j)(A)e_r,$$

unde $m_j = \mu_r \mu_j^{-1}$ este un polinom, căci μ_j divide $\mu_r = \mu_A$, şi $v_i \in V_i \mapsto v_i$ dacă $i \neq j$.

Vom arăta că θj este bine definită. Dacă $v_j = R(A)e_j = 0$, i.e. polinomul μ_j divide polinomul R, atunci $\theta_j(vj) = (Rm_j)(A)e_r = 0$, căci polinomul Rm_j este divizibil cu polinomul μ_r. Se verifică imediat că pentru $j \in \{1, \ldots, r\}$, $\theta_j A = A\theta_j$, i.e. $\theta_j \in \mathcal{C}(A)$ şi, prin urmare, $\theta_j B = B\theta_j$.

Pe de altă parte, $\theta_j B e_j = (S_j m_j)(A) e_r$ şi $B\theta_j e_j = (S_r m_j)(A) e_r$; deducem $(m_j)(A)[S_j(A) - S_r(A)]e_r = 0$. Polinomul $m_j(S_j - S_r)$ este, deci, divizibil cu polinomul $\mu_r = m_j \mu_j$, i. e. polinomul μ_j divide polinomul $S_j - S_r$. Avem deci că $(S_j - S_r)(A)v_j = 0$, pentru orice $v_j \in V_j$, $j \in \{1, \ldots, r\}$. În final, rezultă că oricare ar fi $v_j \in V_j$, $S_j(A)v_j = S_r(A)v_j$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, adică, pentru orice $v_j \in V_j$, $B(v_j) = S_r(A)(v_j)$, $j \in \{1, \ldots, r\}$, fie $B = S_r(A) \in \mathbb{C}[A]$, de unde rezultă teorema, având incluziunea evidentă $\mathbb{C}(A) \subseteq \mathcal{C}^2(A)$.

Bibliografie

[1] I. D. Ion şi R. Nicolae, *Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, diferite ediţii.

Centrul de calcul E.N.ST.
PARIS, Franţa
Adrien.Reisner@enst.fr

PROBLEME PROPUSE

253. Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă şi strict pozitivă, iar $\varphi : \mathbb{R} \to (a, b)$ o aplicaţie derivabilă astfel încât
$$\varphi'(x) = f(\varphi(x)),$$
pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că aplicaţia φ este inversabilă.

Dan Radu

254. Să se arate că, pentru orice numere naturale $p \geq q \geq 1$, avem
$$\sum_{j=1}^{p-q+1} \frac{2^{j-1}}{j} \binom{p-j}{q-1} = \sum_{k=0}^{[(p-q)/2]} \frac{1}{2k+1} \binom{p}{q+2k}.$$

Marian Tetiva

255. Să se calculeze
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{n^2 + 8k^2 - 8k + 4}}.$$

Gheorghe Szöllösy

256. Să se arate că, în orice tetraedru, are loc inegalitatea
$$2R^\alpha + 3^\alpha r^\alpha \geq 2^{-\alpha} \cdot 3^{1+\frac{5\alpha}{6}} V^{\frac{\alpha}{3}},$$
unde notaţiile sunt cele uzuale din tetraedru, iar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$.

Nicuşor Minculete

257. Să se arate că
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{k^2(k+1)^2 + 1}}{k(k+1)}\right) \leq \frac{n}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k^2+k}{k^2+k-1}\right)$$

Mihály Bencze

258. Fie

$$I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi să se afle limita sa.

Laurenţiu Modan

SOLUŢIILE PROBLEMELOR PROPUSE

233. *Să se arate că primitiva funcţiei* $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^p x$, *cu* $p \in \mathbb{R}_+$, *poate fi redusă la primitiva unei funcţii raţionale în* $\sin x$ *dacă şi numai dacă* $p \in \mathbb{N}$. *Mai mult, în acest caz, primitiva nu poate conţine decât o combinaţie liniară de monoame în puteri naturale ale lui* $\sin x$ *şi* $\cos x$, *precum şi un termen în* x.

Constantin P. Niculescu şi **Andrei Vernescu**

Soluţia autorilor. Prin schimbarea de variabilă $t = \sin x$ (unde funcţia $\varphi : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to$ $\to (0,1)$, $\varphi(x) = \sin x$ este derivabilă) se obţine egalitatea formală

$$\int \sin^p x \mathrm{d}x = \int \frac{t^p}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t = \int t^p(-t^2+1)^{-1/2} \mathrm{d}t,$$

în care ultima primitivă este o primitivă binomă $\int t^\alpha (at^\beta + b)^\gamma \mathrm{d}t$ [cu $\alpha = p$, $\beta = 2$, $\gamma = -1/2$, $a = -1$ şi $b = 1$]. În baza unei cunoscute teoreme a lui *Cebâşev*, aceasta se poate reduce la primitiva unei funcţii raţionale în t dacă şi numai dacă are loc unul din următoarele trei cazuri:

(i) $\gamma \in \mathbb{Z}$, adică $-1/2 \in \mathbb{Z}$, fals;

(ii) $\dfrac{\alpha+1}{\beta} \in \mathbb{Z}$, adică $\dfrac{p+1}{2} \in \mathbb{Z}$, deci $p = 2k-1$ $(k \in \mathbb{Z})$, de unde, cum $p \geq 0$, $p = 2k-1$, cu $k \in \mathbb{N}^*$;

(iii) $\dfrac{\alpha+1}{\beta} + \gamma \in \mathbb{Z}$, adică $\dfrac{p+1}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{p}{2} \in \mathbb{Z}$, deci $p = 2k$ $(k \in \mathbb{Z})$, de unde, cum $p \geq 0$, $p = 2k$, cu $k \in \mathbb{N}$.

Aşadar, din (ii) şi (iii), rezultă $p \in \mathbb{N}$. Pentru teorema menţionată, a lui *Cebâşev*, a se vedea articolul acad. *M. Iosifescu* „Teorema lui Cebâşev asupra integralelor binome", Gazeta Matematică şi Fizică, Seria A, 1959, Nr. 12, pp. 705-718.

Fie acum $p \in \mathbb{N}$; cazurile $p = 0$ şi $p = 1$ sunt triviale. Notând, pentru $p \geq 2$, $F_p(x) =$ $= \int \sin^p x \mathrm{d}x$, se obţine, printr-o integrare prin părţi, relaţia de recurenţă:

$$F_p(x) = -\frac{\sin^{p-1} x \cos x}{p} + \frac{p-1}{p} F_{p-2}(x),$$

care, prin iterare, dă pe $F_p(x)$ ca o combinaţie finită de puteri naturale ale lui $\sin x$ şi $\cos x$ (vezi *I. M. Rîjik*, *I. S. Gradştein* „Tabele de integrale, sume, serii şi produse", Editura Tehnică, Bucureşti, 1955, pagina 107, formulele 2. 412). Aceste formule sunt:

$$\int \sin^{2n} x \mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{2n}\left(\sin^{2n-1} x + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \sin^{2n-2k-1} x\right) + \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} x,$$

unde $a_k = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot (2n-2k+1)}{2^k (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)}$, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, respectiv:

$$\int \sin^{2n+1} x \mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{2n+1}\left(\sin^{2n} x + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin^{2n-2k-2} x\right),$$

unde $b_k = \dfrac{2^{k+1}n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k)}{(2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot (2n-2k-1)}$, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

234. *Fie G un grup aditiv abelian, iar $f : G \to \mathbb{R}$ o aplicaţie cu proprietatea că*

$$f(x+y) + f(x-y) \le 2f(x) + 2f(y),$$

pentru orice $x, y \in G$.

Să se arate că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, are loc inegalitatea

$$f(nx) \le n^2 f(x),$$

pentru orice $x \in G$.

În plus, dacă orice element al lui G are ordin finit, atunci f este o funcţie pozitivă.

Dan Radu

Soluţia autorului. Pentru $x = y = 0$, rezultă $2f(0) \le 4f(0)$, şi deci $f(0) \ge 0$. În inegalitatea din enunţ, făcând $x = y$, obţinem

$$f(2x) + f(0) \le 4f(x)$$

şi, cum $f(0) \ge 0$, rezultă

$$f(2x) \le 2^2 f(x), \tag{1}$$

pentru orice $x \in G$.

Vom proceda prin inducţie după n. Pentru $n = 1$ este chiar o egalitate. Vom presupune inegalitatea adevărată pentru numerele naturale $k \le n$ şi vom arăta că este adevărată şi pentru $n+1$.

Dacă $n = 2p$, atunci $(n+1)x = (p+1)x + px$, iar $x = (p+1)x - px$. Atunci, folosind inegalitatea din enunţ şi ipoteza de inducţie, avem

$$f((n+1)x) + f(x) = f((p+1)x + px) + f((p+1)x - px) \le 2f((p+1)x) + 2f(px) \le$$

$$\le 2(p+1)^2 f(x) + 2p^2 f(x) = (4p^2 + 4p + 2)f(x) = (2p+1)^2 f(x) + f(x) = (n+1)^2 f(x) + f(x),$$

de unde rezultă inegalitatea cerută.

Acum, dacă $n = 2p+1$, atunci $n+1 = 2(p+1)$ şi, folosind inegalitatea (1) şi ipoteza de inducţie, rezultă

$$f((n+1)x) = f(2(p+1)x) \le 4f((p+1)x) \le 4(p+1)^2 f(x) = (n+1)^2 f(x).$$

Fie $x \in G$ un element de ordinul n $(nx = 0)$; atunci:

$$0 \le f(0) = f(nx) \le n^2 f(x),$$

de unde rezultă a doua aserţiune.

Nota redacţiei. Soluţii corecte ale problemei au mai dat *Marian Tetiva* de la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad, *Nicuşor Minculete* de la Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir din Braşov, *Georghe B. G. Niculescu*, de la Colegiul de Poştă şi Telecomunicaţii Gh. Airinei din Bucureşti. Ultimul dintre rezolvitori face şi observaţia pertinentă că ipoteza comutativităţii grupului nu este neapărat necesară. Menţionăm, de asemenea, că o soluţie parţială a problemei a dat domnul inginer *Marius Olteanu* de la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior“ din Râmnicu-Vâlcea.

235. *Să se demonstreze că:*

a) *Polinomul minimal al lui* $\cos\dfrac{\pi}{7}$ *peste* $\mathbb{Q}$ *este*

$$f = X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{8}.$$

b) *Polinomul minimal al lui* $\cos\dfrac{2\pi}{7}$ *peste* $\mathbb{Q}$ *este*

$$g = X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}.$$

c) *Polinomul minimal al lui* $\cos\dfrac{3\pi}{7}$ *coincide cu* f.

d) *Există egalităţile*:

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2};\qquad \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}.$$

Marcel Ţena

Soluţia autorului. Rădăcinile primitive de ordinul 7 ale unităţii verifică relaţia

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0 \tag{1}$$

şi sunt numerele complexe ζ, ζ^2, ζ^3, ζ^4, ζ^5, ζ^6, unde $\zeta=\cos\frac{2\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{7}$.

Împărţind în (1) prin x^3 şi notând $x+\frac{1}{x}=y$, rezultă $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, $x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$ şi atunci (1) devine

$$y^3+y^2-2y-1=0. \tag{2}$$

a) Luând $x=\zeta^3=\cos\frac{6\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{7}$, rezultă $y=\zeta^3+\frac{1}{\zeta^3}=2\cos\frac{6\pi}{7}=-2\cos\frac{\pi}{7}$ şi introducând în (2) obţinem

$$-8\cos^3\frac{\pi}{7}+4\cos^2\frac{\pi}{7}+4\cos\frac{\pi}{7}-1=0,$$

sau

$$\cos^3\frac{\pi}{7}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{7}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7}+\frac{1}{8}=0.$$

Aşadar $\cos\frac{\pi}{7}$ verifică polinomul monic $f=X^3-\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}X+\frac{1}{8}\in\mathbb{Q}[X]$, care este ireductibil (neavând rădăcini în $\mathbb{Q}$). Aceasta înseamnă că f este tocmai polinomul minimal al lui $\cos\frac{\pi}{7}$ peste $\mathbb{Q}$.

b) Luând $x=\zeta=\cos\frac{2\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{7}$, rezultă $y=\zeta+\frac{1}{\zeta}=2\cos\frac{2\pi}{7}$ şi înlocuind în (2) se obţine $8\cos^3\frac{2\pi}{7}+4\cos^2\frac{2\pi}{7}-4\cos\frac{2\pi}{7}-1=0$, adică, în definitiv, $\cos^3\frac{2\pi}{7}+\frac{1}{2}\cos^2\frac{2\pi}{7}-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7}-\frac{1}{8}=0$. Cu aceleaşi argumente ca la a), rezultă că polinomul $g=X^3+\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}\in\mathbb{Q}[X]$, este tocmai polinomul minimal al lui $\cos\frac{2\pi}{7}$ peste $\mathbb{Q}$.

c) Luând $x=\zeta^2=\cos\frac{4\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{7}$, rezultă $y=\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}=2\cos\frac{4\pi}{7}=-2\cos\frac{3\pi}{7}$ şi procedând exact ca la a), deducem că polinomul f, este tocmai polinomul minimal al lui $\cos\frac{3\pi}{7}$ peste $\mathbb{Q}$.

d) Observând că $f(-X)=-g(X)$, rezultă $f\left(-\cos\frac{2\pi}{7}\right)=-g\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right)=0$. Prin urmare polinomul f are rădăcinile $x_1=\cos\frac{\pi}{7}$, $x_2=-\cos\frac{2\pi}{7}$, $x_3=\cos\frac{3\pi}{7}$ şi, din formulele lui *Viète*, obţinem egalităţile din enunţ.

Soluţie dată de *Gheorghe B. G. Niculescu*, profesor la Colegiul de Poştă şi Telecomunicaţii Gh. Airinei din Bucureşti. a) Mai întâi, vom demonstra prima egalitate de la punctul d):

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}. \tag{1}$$

Notăm membrul stâng cu E şi transformăm produsele în sume:

$$2E\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{7}-\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}\right)=-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}.$$

Rezultă $E=\frac{1}{2}$ şi relaţia (1) este demonstrată.

Conform teoriei aferente polinomului minimal al unui număr algebric, trebuie ca f să fie polinom monic (ceea ce este evident), să fie ireductibil peste $\mathbb{Q}$ şi să aibă ca rădăcină pe $\cos\frac{\pi}{7}$. Mai ştim că un polinom $h \in K[X]$ (K corp comutativ) de grad 2 sau 3, care nu admite rădăcini în K, este ireductibil peste K.

Pentru polinomul $8f = 8X^3 - 4X^2 - 4X + 1$, singurele rădăcini raţionale ar putea fi ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$. Dar se constată rapid (prin schema lui *Horner*, de pildă) că niciunul dintre numerele de mai sus nu anulează pe $8f$. Adică $8f$ nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$. Atunci nici f nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$. Cum $\operatorname{grad} f = 3$, deducem că f este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

Rămâne să arătăm că f admite ca rădăcină pe $\cos\frac{\pi}{7}$. Folosind formulele

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos\alpha) \quad \text{şi} \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

avem

$$f\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \cos^3\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7} + \frac{1}{8} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{7} + 3\cos\frac{\pi}{7}\right) - \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}\right) - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{7} + \frac{1}{8} =$$
$$= \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{7} + \frac{1}{4}\cos\frac{3\pi}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Am ţinut cont de relaţia (1). Deci $f\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = 0$, de unde concluzia că f este polinomul minimal al lui $\cos\frac{\pi}{7}$ peste $\mathbb{Q}$.

b) Polinomul g este monic. Pentru polinomul $8g = 8X^3+4X^2-4X-1$ „candidaţii raţionali" sunt ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$. Dar niciunul dintre ei nu convine. Astfel că $8g$ nu are rădăcini raţionale. Implicit g nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$, dar $\operatorname{grad} g = 3$ şi deducem că g este ireductibil peste $\mathbb{Q}$.

Să probăm că g are ca rădăcină pe $\cos\frac{2\pi}{7}$. Într-adevăr

$$g\left(\cos\frac{2\pi}{7}\right) = \cos^3\frac{2\pi}{7} + \frac{1}{2}\cos^2\frac{2\pi}{7} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7} - \frac{1}{8} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{6\pi}{7} + 3\cos\frac{2\pi}{7}\right) + \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{4\pi}{7}\right) - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\cos\frac{6\pi}{7} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{7} + \frac{1}{4}\cos\frac{4\pi}{7} + \frac{1}{8} =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{7} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{7} - \frac{1}{4}\cos\frac{3\pi}{7} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

conform relaţiei (1). Conchidem că polinomul minimal al lui $\cos\frac{2\pi}{7}$ peste $\mathbb{Q}$ este g.

c) Luând în considerare cele de la punctul a), trebuie dovedit că f admite ca rădăcină şi pe $\cos\frac{3\pi}{7}$. Avem

$$f\left(\cos\frac{3\pi}{7}\right) = \cos^3\frac{3\pi}{7} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{3\pi}{7} - \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{7} + \frac{1}{8} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{9\pi}{7} + 3\cos\frac{3\pi}{7}\right) - \frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{6\pi}{7}\right) - \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{7} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\cos\frac{9\pi}{7} + \frac{1}{4}\cos\frac{3\pi}{7} - \frac{1}{4}\cos\frac{6\pi}{7} - \frac{1}{8} =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{7} + \frac{1}{4}\cos\frac{3\pi}{7} + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Deci $f\left(\cos\frac{3\pi}{7}\right) = 0$ şi cerinţa din enunţ este stabilită.

d) La începutul rezolvării am demonstrat prima egalitate. Ne ocupăm de a doua:

$$8\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = 4\cos\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right) =$$
$$= 4\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 4\cos^2\frac{2\pi}{7} = 2\left(\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right) + 2\left(1+\cos\frac{4\pi}{7}\right) =$$
$$= -2\cos\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2 - 2\cos\frac{3\pi}{7} = -2\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} - \frac{1}{2}\right) + 1 = 1,$$

unde am ţinut seama încă o dată de relaţia (1).

Aşadar
$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$$
şi problema este complet rezolvată.

Nota redacţiei. Soluţii corecte ale problemei au mai dat *Marian Tetiva* – profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad, *Ioan Ghiţă* – profesor la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj şi *Marius Olteanu* – inginer la S. C. Hidroconstrucţia S.A. Bucureşti, sucursala „Olt-Superior" din Râmnicu-Vâlcea.

236. *Fie A un inel cu unitate în care pentru orice două elemente x şi y egalitatea binomială:*
$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\ldots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$$
este adevărată pentru trei valori consecutive ale numărului natural nenul n (nu neapărat acelaşi pentru orice x şi y din A). Să se arate că A este comutativ.

Rămâne concluzia adevărată dacă A nu are element unitate?

Marian Tetiva

Soluţia autorului. Scriem egalitatea din enunţ şi în forma
$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j.$$
.

Fie p, $p+1$ şi $p+2$ cele trei valori pentru care egalitatea din enunţ este valabilă pentru elementele $x,y\in A$. Deoarece avem
$$\left[(x+y)^{p+1}-\sum_{j=0}^{p+1}\binom{p+1}{j}x^{p+1-j}y^j\right]-\left[(x+y)^p-\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^{p-j}y^j\right]y=$$
$$=(x+y)^p(x+y-y)-x^{p+1}-\sum_{j=1}^{p}\left(\binom{p+1}{j}-\binom{p}{j-1}\right)x^{p+1-j}y^j=$$
.
$$=(x+y)^px-x\left[\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^{p-j}y^j\right]=(x+y)^px-x(x+y)^p,$$
rezultă $(x+y)^px-x(x+y)^p=0$ şi apoi (deoarece p poate fi înlocuit cu $p+1$, conform ipotezei) $(x+y)^{p+1}x-x(x+y)^{p+1}=0$. Aşadar, pentru orice $x,y\in A$, există un număr natural nenul p astfel încât
$$(x+y)^px-x(x+y)^p=(x+y)^{p+1}x-x(x+y)^{p+1}=0;$$
pentru y şi $x-y$ în loc de x şi y, obţinem că oricare ar fi $x,y\in A$, există $p\in\mathbb{N}^*$, astfel încât
$$x^py-yx^p=x^{p+1}y-yx^{p+1}=0.$$

La rândul lor, aceste inegalităţi implică
$$x^p(xy-yx)=x^{p+1}y-yx^{p+1}-(x^py-yx^p)x=0,$$
deci, în cele din urmă, am obţinut că, pentru orice x şi y din A, există $p\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $x^p(xy-yx)=0$. De aici mai departe mergem pe o cale bătătorită.

Anume, fiind date $x,y\in A$ (arbitrare, dar pentru moment fixate), considerăm numerele naturale p şi q, pentru care avem
$$x^p(xy-yx)=0,$$
respectiv
$$(x+1)^q((x+1)y-y(x+1))=0\Leftrightarrow(x+1)^q(xy-yx)=0$$
(1 fiind elementul unitate al inelului). Înmulţim la stânga cu x^{p-1} în ultima egalitate pentru a obţine
$$\left(x^{q+p-1}+\binom{q}{1}x^{q+p-2}+\ldots+\binom{q}{q-1}x^p+x^{p-1}\right)(xy-yx)=0$$

şi ţinând seama de $x^p(xy - yx) = 0 \Rightarrow x^s(xy - yx) = 0$, pentru orice $s \geq p$, deducem că $x^{p-1}(xy - yx) = 0$. Repetăm acest procedeu de p ori pentru a ajunge în final la $xy - yx = 0$, ceea ce se întâmplă pentru orice x şi y din A şi soluţia se încheie aici.

Răspunsul la a doua întrebare este nu. Concluzia referitoare la comutativitate nu rămâne adevărată în absenţa elementului unitate. Avem la dispoziţie exemplul (bine cunoscut) al inelului matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cu a, b, c numere reale (sau întregi, sau complexe etc). Cum produsul oricăror trei matrici de acest tip este matricea nulă, este clar că egalitatea din enunţ este valabilă pentru orice două matrici din acest inel şi orice $n \geq 3$. Bineînţeles, acest inel nu este comutativ (şi nu are, categoric, nici un element unitate).

237. *În tetraedrul ortocentric $[ABCD]$ se notează cu h_A şi m_A lungimea înălţimii, respectiv a medianei tetraedrului duse din vârful A pe faţa BCD (şi analoagele), iar cu r şi R razele sferelor înscrisă, respectiv circumscrisă tetraedrului.*

Să se arate că au loc următoarele rafinări ale inegalităţii lui Durrande în tetraedru ($R \geq 3r$):

a) $\dfrac{1}{4r^2} \leq \dfrac{1}{h_A^2} + \dfrac{1}{h_B^2} + \dfrac{1}{h_C^2} + \dfrac{1}{h_D^2} \leq \dfrac{1}{324} \cdot \dfrac{R^4}{r^6}$;

b) $\dfrac{9}{4R^2} \leq \dfrac{1}{m_A^2} + \dfrac{1}{m_B^2} + \dfrac{1}{m_C^2} + \dfrac{1}{m_D^2} \leq \dfrac{1}{324} \cdot \dfrac{R^4}{r^6}$.

Marius Olteanu

Soluţia autorului. b) Demonstrăm partea stângă a inegalităţii. În orice tetraedru avem relaţia

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}. \tag{1}$$

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică, avem

$$\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{h_A^2} + \frac{1}{h_B^2} + \frac{1}{h_C^2} + \frac{1}{h_D^2}\right)} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4r},$$

de unde

$$\frac{1}{h_A^2} + \frac{1}{h_B^2} + \frac{1}{h_C^2} + \frac{1}{h_D^2} \geq \frac{1}{4r^2}.$$

În continuare, vom demonstra partea dreaptă a inegalităţii.

Vom folosi următoarele notaţii: $a = BC$, $l = AD$, $b = AC$, $m = BD$, $c = AB$ şi $n = CD$, S_X- aria opusă vârfului $X \in \{A, B, C, D\}$, $S-$ aria totală, $V-$ volumul tetraedrului. Avem

$$\frac{1}{h_A^2} + \frac{1}{h_B^2} + \frac{1}{h_C^2} + \frac{1}{h_D^2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{V^2}\left(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2\right). \tag{2}$$

Cum tetraedrul $[ABCD]$ este ortocentric, avem egalitatea

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2 = \frac{1}{4}\left(a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2\right) \tag{3}$$

([3], pagina 37, ex. 156 sau [1], pagina 41, ex. 11), precum şi relaţiile $a^2 + l^2 = b^2 + m^2 = c^2 + n^2$.

Fără a se afecta generalitatea problemei, putem considera că, între laturile triunghiului ABC (baza ABC) există relaţia de ordine

$$a \geq b \geq c. \tag{4}$$

Atunci, din (4) şi (3), rezultă că

$$l \leq m \leq n. \tag{5}$$

În baza relaţiilor (4) şi (5), se poate aplica inegalitatea lui *Cebâşev* şi obţinem

$$a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 \leq \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(l^2 + m^2 + n^2\right). \tag{6}$$

Însă $4xy \le (x+y)^2$, pentru orice $x, y > 0$, deci

$$4\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(l^2+m^2+n^2\right) \le \left(a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2\right)^2. \tag{7}$$

Dar

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \le 16R^2, \tag{8}$$

conform problemei 79, pagina 23 din [3].

Aşadar, din (6), (7) şi (8), rezultă

$$a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2 \le \frac{64}{3}R^4. \tag{9}$$

Totodată

$$S \ge 24\sqrt{3}r^2,$$

conform aplicaţiei 5.1, pag 499 din [2].

Cum

$$3V = rS,$$

rezultă imediat că

$$rS \ge 24\sqrt{3}r^3,$$

ceea ce este echivalent cu

$$3v \ge 24\sqrt{3}R^2,$$

adică cu

$$\frac{1}{V} \le \frac{1}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{r^3}. \tag{10}$$

În fine, din relaţiile (2), (3), (9) şi (10), rezultă că

$$\frac{1}{h_A^2}+\frac{1}{h_B^2}+\frac{1}{h_C^2}+\frac{1}{h_D^2} \le \frac{1}{324}\cdot\frac{R^4}{r^6},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $[ABCD]$ este regulat.

b) Deoarece $m_A \ge h_A$ (şi analoagele), rezultă $\frac{1}{m_A^2} \le \frac{1}{h_A^2}$ (şi analoagele), deci

$$\frac{1}{m_A^2}+\frac{1}{m_B^2}+\frac{1}{m_C^2}+\frac{1}{m_D^2} \le \frac{1}{h_A^2}+\frac{1}{h_B^2}+\frac{1}{h_C^2}+\frac{1}{h_D^2} \le \frac{1}{324}\cdot\frac{R^4}{r^6},$$

conform punctului a).

Mai departe, din inegalitatea mediilor, avem

$$\frac{1}{m_A^2}+\frac{1}{m_B^2}+\frac{1}{m_C^2}+\frac{1}{m_D^2} \ge \frac{16}{m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_D^2}. \tag{11}$$

Dar

$$m_A^2+m_B^2+m_C^2+m_D^2 = \frac{4}{9}\left(a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2\right) \le \frac{4}{9}\cdot 16R^2 = \frac{64}{9}R^2; \tag{12}$$

(am ţinut seama de (8)).

Din (11) şi (12) rezultă

$$\frac{1}{m_A^2}+\frac{1}{m_B^2}+\frac{1}{m_C^2}+\frac{1}{m_D^2} \ge \frac{9}{4R^2}.$$

Egalităţile au loc dacă şi numai dacă $[ABCD]$ este tetraedru regulat.

Bibliografie

[1] M. Miculiţa, D. Brânzei, *Analogii triunghi - tetraedru*, Editura Paralela 45, Piteşti, 2000.

[2] M. Dincă, M. Bencze, *About inequalities*, Octogon Mathematica Magazine, vol. 12, nr. 2A, october 2004.

[3] M. Olteanu, *Inegalităţi în tetraedru – culegere de probleme*, Editura Conspress, Bucureşti, 2003.

Soluţie dată de *Nicuşor Minculete* de la Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir din Braşov. Pe lângă notaţiile din enunţul problemei mai introducem notaţiile $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|AD| = l$, $|BD| = m$, $|CD| = n$; $V-$ volumul tetraedrului, S_A- aria feţei BCD (analog S_B, S_C, S_D, $S-$ aria totală a tetraedrului. Avem

$$\sum \frac{1}{h_A} = \sum \frac{S_A}{S_A h_A} = \frac{\sum S_A}{3V} = \frac{S}{3V} = \frac{1}{r}. \tag{1}$$

Prin utilizarea inegalităţii lui *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, obţinem

$$4 \sum \frac{1}{h_A^2} \geq \left(\sum \frac{1}{h_A} \right)^2 = \frac{1}{r^2}$$

(din (1)), aşadar

$$\sum \frac{1}{h_A^2} \geq \frac{1}{4r^2}. \tag{2}$$

Datorită faptului că tetraedrul $[ABCD]$ este ortocentric, din lucrarea [1], avem egalităţile

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_C^2 + S_D^2 = \frac{1}{4} \left(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 \right)$$

şi

$$a^2 + l^2 = b^2 + m^2 = c^2 + n^2. \tag{3}$$

Prin urmare

$$\sum \frac{1}{h_A^2} = \frac{1}{9V^2} \sum S_A^2 = \frac{1}{36V^2} \left(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 \right). \tag{4}$$

Fără a micşora generalitatea, presupunem că $a \geq b \geq c$, ceea ce înseamnă că $l \leq m \leq n$, deci, prin aplicarea inegalităţii lui *Cebâşev*, avem

$$3 \left(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 \right) \leq \left(a^2 + b^2 + c^2 \right) \left(l^2 + m^2 + n^2 \right) \leq \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \right)^2}{4}. \tag{5}$$

În inegalitatea lui *Leibniz*, $\sum MA^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2$, pentru orice punct M din spaţiu, luăm $M = O$, centrul sferei circumscrise tetraedrului $[ABCD]$, şi obţinem

$$16R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2. \tag{6}$$

Din inegalităţile (5) şi (6), deducem inegalitatea

$$a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 \leq \frac{64}{3} R^4. \tag{7}$$

Tot în [1] regăsim inegalitatea

$$V \geq 8\sqrt{3} r^3,$$

de unde

$$\frac{1}{V} \leq \frac{1}{8\sqrt{3} r^3}. \tag{8}$$

Din inegalităţile (7), (8) şi egalitatea (4), obţinem

$$\sum \frac{1}{h_A^2} \leq \frac{R^4}{324 r^6}. \tag{9}$$

Cumulând inegalităţile (2) şi (9) se observă că inegalităţile de la punctul a) au fost demonstrate.

Se observă uşor că $m_A \geq h_A$, $m_B \geq h_B$, $m_C \geq h_C$ şi $m_D \geq h_D$, deci $\sum \frac{1}{m_A^2} \leq \sum \frac{1}{h_A^2}$, iar prin utilizarea inegalităţii (9) se deduce inegalitatea

$$\sum \frac{1}{m_A^2} \leq \frac{R^4}{324 r^6}. \tag{10}$$

De asemenea, se deduce uşor că:

$$m_A^2 = \frac{1}{9}\left[3\left(b^2 + c^2 + l^2\right) - a^2 - m^2 - n^2\right],$$

deci

$$\sum m_A^2 = \frac{4}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2\right].$$

Utilizând inegalitatea (6), obţinem următoarea inegalitate

$$\sum m_A^2 \leq \frac{64R^2}{9}. \tag{11}$$

Acum, prin întrebuinţarea inegalităţii *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, avem

$$\sum m_A^2 \cdot \sum \frac{1}{m_A^2} \geq 16. \tag{12}$$

Din inegalităţile (11) şi (12), deducem inegalitatea

$$\frac{64R^2}{9} \cdot \sum \frac{1}{m_A^2} \geq 16,$$

adică

$$\sum \frac{1}{m_A^2} \geq \frac{9}{4R^2}.$$

Prin urmare, din inegalităţile (10) şi (13), punctul b) este demonstrat.

Bibliografie

[1] M. Olteanu, *Rafinări ale inegalităţii lui Durrande în tetraedru* (II), Gazeta Matematică, Seria B, nr. 12/2006.

Nota redacţiei. O soluţie asemănătoare cu cea de mai sus a dat *Ioan Ghiţă*, profesor la Colegiul Naţional I. M. Clain din Blaj.

ISTORIA MATEMATICII

Kurt Gödel (1906-1978)

de Ralf Schindler

Kurt Gödel este, cu siguranţă, cel mai însemnat logician al primei jumătăţi a secolului XX. În decadele 1920 şi 1930, perioadă în care logica şi teoria mulţimilor se aflau încă într-un stadiu incipient, *Gödel* a obţinut rezultate deschizătoare de noi orizonturi în aceste domenii şi a căror influenţă s-a resimţit cu multă intensitate pentru o lungă perioadă de timp: Teorema de Completitudine, Teoremele de Incompletitudine, Teoremele de Consistenţă a Axiomei Alegerii şi a Ipotezei Continuului a lui *Cantor*. El a dezvoltat metode care, deşi într-o manieră rafinată şi consistent extinsă, sunt şi astăzi folosite în logică şi în teoria mulţimilor.

Kurt Gödel s-a născut acum 100 de ani, pe 28 aprilie 1906, în oraşul ceh Brno (situat la 75 de mile în nordul Vienei), pe atunci capitala margrafiatului Moraviei, aflat sub stăpânire austro-ungară. „Compromisul Morav“, făcut în acel timp, avea drept ţel reducerea tensiunilor dintre cehii şi germanii din Parlamentul Moraviei, însă, în 1907, Parlamentul Cisleithaniei[1] devine totalmente nefuncţional din cauza exacerbării naţionalismului, aşa că, începând cu 1909, se instalează, prin decrete, o guvernare autoritară. Familia lui *Gödel*, care aparţinea minorităţii germane, era înstărită. Tatăl lui *Kurt* era directorul unei fabrici de textile şi primul locuitor al oraşului Brno posesor al unui Crysler. În 1918, după prăbuşirea coruptului regim Habsburgic, s-a întemeiat Republica Cehă, iar membrii familiei *Gödel* devin cetăţeni cehi. Partidele „germanilor sudeţi“ îşi continuă activitatea într-un mod agresiv şi vor găsi ulterior un suport neprecupeţit din partea naţional-socialiştilor.

După terminarea liceului german din Brno, *Kurt Gödel* merge la Viena, pentru a studia fizica, matematica şi filozofia. Din 1926, începe să participe la întrunirile de joi seara ale Cercului de la Viena, organizate de către *Moritz Schlick*. Printre participanţi se numărau *Rudolf Carnap*, *Herbert Feigl*, *Hans Hahn* şi *Otto Neurath*. Probabil că atmosfera Cercului de la Viena a stimulat interesul lui *Gödel* pentru problemele privind fundamentele matematicii. Principalele întrebări puse în aceea vreme erau exact de tipul celor asupra cărora îşi va fixa atenţia *Gödel* şi care vor primi răspunsuri complete în teza sa de doctorat şi în al său Habilitationsschrift[2].

În 1928 o întâlneşte pentru prima dată pe *Adele Nimbursky*, născută Porkert, care lucra ca dansatoare într-un club vienez de noapte numit „Nachtfalter". Se pare că relaţia lor a generat unele nemulţumiri în familia *Gödel*. Vor trece zece ani până când *Adele* şi *Kurt* se vor căsători. În 1929 *Gödel* primeşte cetăţenia austriacă, iar pe 6 iulie 1929 obţine titlul de doctor în matematici cu teza "Über die Vollständigkeit des Logikkalküls" (i.e. "Asupra completitudinii calculului logic"), sub conducerea lui *Hans Hahn*, deşi cel care probabil a stârnit interesul lui *Gödel* pentru problema completitudinii a fost *Carnap*, un student al lui *Frege*. O demonstraţie a unei propoziţii j în cadrul unui sistem dat de axiome G (i.e. o mulţime de propoziţii) este un şir finit de propoziţii având pe j ca element final astfel încât orice element al şirului este, fie un element al lui G, fie rezultă din precedentele propoziţii din şir, prin aplicarea regulilor unui sistem fixat de calcul logic. Toate calculele logice standard ale logicii de ordinul întâi demonstrează exact aceleaşi propoziţii. Teorema de Completitudine a lui *Gödel* afirmă că există un motiv pentru acest fenomen şi că nu există necesitatea de a extinde astfel de calcule ale logicii: dacă φ este adevărată în toate modelele lui Γ, atunci există o demonstraţie a lui φ din Γ. Deoarece demonstraţiile sunt finite, un corolar imediat este Teorema de Compacitate: dacă Γ este un sistem de axiome astfel încât orice submulţime finită a lui Γ are un model, atunci Γ însuşi are un model. Folosind teorema de compacitate, este foarte uşor să se construiască modele non-standard ale Aritmeticii lui *Peano*, ale Analizei sau modele numărabile ale Teoriei Mulţimilor.

Hilbert şi *Ackermann* au formulat foarte clar problema completitudinii calculului de ordinul întâi. Argumentele lui *Skolem* (din anii 20) aproape că au produs o demonstraţie pentru Teorema de Completitudine, dar au arătat o anumită lipsă de curaj Platonic şi nu au construit modelul necesar. *Gödel* însuşi menţionează un manuscris nepublicat al lui *Carnap* care prezintă o Teoremă de Completitudine pentru un alt sistem, dar cel care merită credit pentru demonstraţia a ceea ce numim acum Teorema de Completitudine este chiar *Gödel*. *Gödel* a prezentat rezultatul său la o întrunire care a avut loc la Königsberg (acum Kaliningrad) în data de 6 septembrie 1929, însă semnificaţia acestuia nu a fost clară imediat. Demonstraţia originală a lui *Gödel* a fost simplificată ulterior, printre alţii, de către *Leon Henkin* şi *G. Hasenjäger*, care şi-au scris dizertaţiile în 1947 şi respectiv în 1950 (la douăzeci de ani după descoperirea lui *Gödel*).

Teoria modelelor din zilele noastre a rafinat într-un mod spectaculos metodele construcţiei modelelor apărute iniţial în cadrul Teoremei de Completitudine. Astfel de instrumente l-au condus pe *E. Hrushovski* la o demonstraţie a conjecturii geometrice a lui *Mordell-Lang*.

Tatăl lui *Gödel* a murit în 1929. *Kurt Gödel* va trăi acum din moştenirea acestuia. În 1932, îşi susţine lucrarea de abilitare şi devine Privatdozent la data de 11 martie 1933. *Gödel* nu a deţinut niciodată o poziţie superioară acesteia la Universitatea din Viena; el predă şi primeşte onorariul plătit de către studenţi pentru frecventarea cursurilor predate de el. Prima (şi unica) poziţie permanentă a lui *Gödel* va fi cea pe care o va obţine la Institute for Advanced Studies.

David Hilbert a ridicat problema unei demonstraţii „finitiste" a consistenţei axiomelor teoriei numerelor (unde termenul de „finitist" nu a fost niciodată definit în mod formal). Această temă, i.e. a doua problemă a lui *Hilbert*, este de asemenea cunoscută sub denumirea de „Programul lui Hilbert". *Gödel* a arătat în cadrul lucrării sale de abilitare că o astfel de demonstraţie a consistenţei este imposibilă în principiu: fie Γ un sistem de axiome consistent şi recursiv enumerabil care este suficient de puternic, în sensul că el conţine un anumit segment al teoriei numerelor (segment care este mai slab decât sistemul uzual al aritmeticii lui Peano). Prima Teoremă de Incompletitudine a lui *Gödel* afirmă că există o propoziţie φ astfel încât nici φ, nici negaţia sa $\neg\varphi$ nu sunt demonstrabile din Γ. Cea de a doua teoremă a sa de incompletitudine furnizează un exemplu de astfel de propoziţie. Demonstraţia face uz de argumentul diagonal pe care Cantor l-a folosit pentru a arăta că numerele reale sunt mai multe decât cele întregi. Cu ajutorul a ceea ce azi numim „Gödelizare", i.e. o simplă identificare calculabilă a expresiilor limbajului formal cu numere întregi, *Gödel* construieşte o propoziţie φ în limbajul teoriei numerelor, ce exprimă "Nu sunt demonstrabilă din Γ", care nu poate fi atunci demonstrabilă din Γ, dar care urmează că este adevărată. De fapt $\varphi =$"Nu sunt demonstrabilă din Γ" nu este demonstrabilă din Γ dacă şi numai dacă φ este adevărată, dacă şi numai dacă Γ este consistent. Ca atare consistenţa lui Γ nu este demonstrabilă din Γ.

Ca un corolar, demonstraţia lui *Gödel* ne asigură că predicatul de adevăr nu poate fi definit în limbaj formal, pentru că, în caz contrar, putem considera propoziţia „Nu sunt adevărată". Deoarece aceste fapte au devenit cu atât mai „palpitante" cu cât au fost mai puţin înţelese, *Gödel* este omniprezent în literatura matematică de popularizare, unde realizările sale nu sunt întotdeauna prezentate într-o manieră exactă.

Gödel şi-a prezentat rezultatele de incompletitudine la o întrunire a Societăţii Germane de Matematică, care a avut loc la Bad Elster în septembrie 1931. *Ernst Zermelo* (părintele a ceea ce este astăzi axiomatizarea standard a teoriei mulţimilor), pe care *Gödel* l-a întâlnit acolo pentru prima data, nu a fost capabil să cuprindă pe deplin conţinutul noii teoreme a lui Gödel. Şi alţii au avut probleme de acest tip. *Hilbert* a aflat despre Teorema de Incompletitudine a lui *Gödel* în 1931 şi şi-a dat seama imediat de impactul acesteia asupra programului său. De fapt, în lumina rezultatelor lui *Gödel*, sarcina de a proba consistenţa axiomelor teoriei numerelor prin mijloace finitiste devine total lipsită de conţinut. Prima prezentare didactică a Teoremei de Incompletitudine va fi făcută de către *Hilbert* şi *P. Bernays* în 1939.

Teoria modernă a demonstraţiei studiază în detaliu prin ce mijloace putem arăta consistenţa sistemului Teoriei Numerelor sau a Analizei. Folosind rezultatele cruciale ale lui *Gentzen* din anii 30, ştim că este suficient să dispunem de inducţia transfinită până la ε_0 (şi că demonstraţia consistenţei nu poate fi asigurată prin mijloace mai slabe).

Gödel şi-a petrecut anul academic 1933-34 la Institute for Advanced Studies din Princeton, New Jersey. A trebuit să primească tratament psihiatric în toamna anului 1934: a petrecut cel puţin o săptămână într-un spital din Purkersdorf, lângă Viena. Nu avea să fie ultima sa internare.

Un rezultat similar Teoremei de Incompletitudine este teorema lui *Church* asupra nedecidabilităţii mulţimii tuturor propoziţiilor care pot fi demonstrate într-un sistem de axiome G, suficient de tare. *Gödel* a fost mereu interesat de probleme de calculabilitate. În anii 30, *Alan Turing* a început cercetările asupra a ceea ce urmau să devină fundamentele teoretice ale ştiinţei calculatoarelor. Articolul lui *Gödel*, „Despre lungimea demonstraţiilor", din 1936, se ocupa cu problema teoriei complexităţii, anticipând din nou alte direcţii de cercetare.

În 1934, guvernul austriac declară ilegale toate partidele politice, cu excepţia Frontului Patriotic. *Dollfuß* năzuia la o alianţă cu Italia fascistă împotriva Reichului german. În timpul puciului reuşit al Partidului Naţional-Socialist, din 25 iulie 1934, *Dollfuß* este ucis. Germania îşi sistează susţinerea când trupele italiene se desfăşoară în Brenner.

În timpul acestor vremuri tulburi, *Gödel* devine interesat de teoria mulţimilor şi de prima problemă a lui *Hilbert*. În 1934 reuşeşte să arate consistenţa relativă a Axiomei Alegerii cu restul axiomelor sistemului standard al teoriei mulţimilor, ZF. Aceasta demonstrează că, în ciuda faptului că AC are aparent consecinţe paradoxale, precum descompunerea lui Hausdorff a bilei unitate, adăugarea lui AC la ZF nu produce inconsistenţă. În timpul nopţii de 14 iulie 1937, *Gödel* îşi încheie demonstraţia conform căreia Ipoteza Continuului generalizată, GCH, este de asemenea consistentă cu $ZDF = ZF + AC$. Acest rezultat este publicat, în 1938, în Proceedings of the National Academy of Sciences, USA.

Ambele rezultate de consistenţă sunt obţinute cu ajutorul modelului interior L, al tuturor mulţimilor constructibile, pe care l-a introdus în scopul acestor demonstraţii. L este închiderea clasei tuturor numerelor ordinale relativ la o clasă finită de operaţii fundamentale ale teoriei mulţimilor (anume generatorii funcţiilor uzuale). Aceasta implică faptul că L este cel mai mic model (tranzitiv) al lui ZF care conţine toate numerele ordinale. L poate fi stratificat într-o ierarhie uniform modelată, fapt care i-a permis lui *Gödel* să demonstreze nu numai axiomele ZF, ci şi AC, în L. Lema de condensare pentru L conduce în final la o demonstraţie elegantă pentru validitatea în L (chiar a unei versiuni puternice) a Ipotezei Continuului generalizată.

Aşa cum teoremele de completitudine şi de incompletitudine ale lui *Gödel* au marcat sfârşitul perioadei naive a logicii, descoperirea lui L, datorată lui *Gödel*, a transformat teoria mulţimilor într-un subiect cu un grad ridicat de elaborare. În anii 70, *Ronald Jensen* a început munca de perfecţionare a investigaţiilor lui Gödel asupra constructibilităţii. Ceea ce a rezultat, anume „Teoria structurii fine"[3] a lui *Jensen*, demonstrează câteva teoreme spectaculoase. Această teorie, ca şi „Teoria modelelor interioare"[4], ambele fiind domenii active în teoria modernă a mulţimilor, au generat importante şi surprinzătoare clarificări asupra structurii locale şi globale a universului matematic.

Între anii 1935-38, *Gödel* a vizitat adesea USA. Problemele de fobie devin tot mai grave.

Dezvoltă o puternică temere de a nu fi otrăvit, mai ales prin intermediul mâncării. Nu se va mai reface din boala mentală care se va dovedi a-i fi fatală.

În 1938, *Schuschnigg* îl vizitează pe *Hitler* în Berchtesgaden, unde ambii cad de acord asupra instalării lui *Seyß-Inquard* ca nou ministru de interne austriac. La 12 martie 1939 Austria este anexată Germaniei, iar pe 2 aprilie 1939 *Hitler* organizează o celebrare pe Heldenplatz, în Viena. *Gödel* devine automat german.

Kurt Gödel este naiv din punct de vedere politic. În 1939 este atacat de un grup de tineri naţional-socialişti lângă Strudlhofstiege în Viena. Conform zvonurilor, *Adele* reuşeşte să-l salveze cu ajutorul umbrelei. În martie 1939 se renunţă la vechiul „Privatdozent" şi este stabilită titulatura „Dozent neuer Ordnung". Începe, aparent fără speranţă, un război al hârtiilor, care ar aranja emigrarea lui *Gödel* în S.U.A. *Adele* şi *Kurt* părăsesc, în sfârşit, Viena pe data de 18 ianuarie 1940. Pleacă cu trenul la Vladivostok, via Berlin şi Moscova. Pornesc de la Yokohama cu vaporul spre San Francisco, unde ajung pe data de 4 martie 1940. De aici continuă călătoria spre Princeton, New Jersey. *Kurt Gödel* nu se va mai întoarce niciodată în Europa.

Gödel devine cetăţean al USA în 1948. Acum lucrează la Institute for Advanced Studies, dar devine profesor plin abia în 1953. Încercările sale de a demonstra independenţa Ipotezei Continuului în raport cu ZFC dau greş. Devine interesat atât de teoria relativităţii generale (*Einstein* e colegul său la IAS), cât şi de filozofie. Ca adept al lui *Platon*, *Gödel* nu îşi imagina că Problema Continuului ar putea fi rezolvată, dacă s-ar dovedi că Ipoteza Continuului este independentă de ZFC.

Exact acest lucru este realizat de către *Paul Cohen*, care lucrase în domeniul analizei armonice. El inventează metoda „forcing", conform căreia numerele reale pot fi adjuncţionate unor modele numărabile ale ZFC, astfel încât modelele extinse să satisfacă în continuare ZCF, dar şi negaţia Ipotezei Continuului. Există astfel, în sfârşit, o propoziţie semnificativă din punct de vedere matematic, care reflectă legătura primei teoreme de incompletitudine a lui *Gödel* cu *ZFC*. Teoria modernă a mulţimilor oferă o varietate surprinzătoare de asemenea propoziţii. *Cohen* a primit „ştampila de aprobare" de la *Gödel* personal. În 1966, *Cohen* a primit singura medalie Fields care se acordase până atunci pentru a onora rezultate din domeniul logicii matematice. Mai târziu, *Cohen* şi-a pierdut interesul pentru teoria mulţimilor. Oricum, realizările sale şi dezvoltările ulterioare ale lui *R. Solovay* şi ale altora au transformat teoria mulţimilor într-un domeniu dificil şi activ de cercetare. Teoria mulţimilor, aşa cum se prezintă astăzi, nu are decât 40 de ani!

Gödel se aştepta ca, într-o zi, să se poată izola nişte axiome convingătoare, care să respingă Ipoteza Continuului. În anii 70, el a speculat pe tema candidaţilor pentru aceste axiome în lucrarea sa privind „scalele". „Axiomele pătratului"[5] afirmă, printre altele, că pentru fiecare întreg n, cofinalitatea mulţimii tuturor funcţiilor de la ω_n la ω_n, modulo filtrul Fréchet, este egală cu ω_{n+1}. Din păcate, experimentele lui *Gödel* nu au avut succes. Se pare că *Gödel* şi-a păstrat opinia (cel puţin în anumite perioade), cum că ar trebui să fie $\aleph_2$ numere reale.

Problema privind mărimea continuului este încă una dintre cele mai puternice, deşi uneori ascunse, forţe directoare ale cercetării contemporane privind teoria mulţimilor. „Axioma forcingului absolut"[6], care generalizează axioma lui *Martin* şi care este foarte folositoare în topologia teoriei mulţimilor, implică faptul că există $\aleph_2$ numere reale. Argumentele care stabilesc această implicaţie sunt oarecum similare cu argumentele pe care *Gödel* a încercat să le exploateze în lucrarea sa despre „scale". *W. Hugh Woodin* a prezentat de curând un sistem elaborat de raţionamente, care încearcă să respingă Ipoteza Continuului, bazându-se pe rezultate ce decurg din proprietatea „absolută" a forcingului şi pe argumente profunde din teoria descriptivă a mulţimilor, care în parte sunt obţinute prin metode de constructibilitate. Argumentele lui *Woodin* au fost combătute de *M. Foreman* şi *J. Steel*, dar sunt cu siguranţă un stimul pentru cercetarea modernă.

Gödel nu a mai reuşit să producă rezultate matematice în S.U.A., la acelaşi nivel ca în Viena. A primit o mulţime de distincţii, de exemplu „Medalia naţională pentru ştiinţă", dar, în iunie 1977, *Adele Gödel* este supusă unei operaţii şi, fără soţia sa care să-l hrănească, *Gödel* refuză să mai mănânce. Moare pe 14 ianuarie 1978 de „malnutriţie şi inaniţie cauzate de tulburări de personalitate". Soţia sa moare trei ani mai târziu.

Oskar Morgenstern scrie în jurnalul său: „El [*Gödel*] era foarte amuzant datorită amestecului său de profunzime şi de candoare". Moştenirea remarcabilă a lui *Gödel* este omniprezentă în teoria mulţimilor şi în logică. Lucrările sale complete au apărut sub titlul:

Gödel, Kurt, *Collected works*, 5 volume, S. Feferman et al, eds, Oxford University Press, 1986ff.

Traducerea în limba română de **Radu Miculescu**

Note

I. *Acest articol a apărut pentru prima dată în limba germană, în DMV-Mitteilungen 14-1 (2006), pp. 42-45. El a fost tradus în engleză de către autor. Autorul îi mulţumeşte lui Gunter Fuchs pentru comentariile sale.* (N. R. N.)

II. *Versiunea în limba română a fost realizată după cea engleză apărută în Newsletter, No. 62, decembrie 2006, pp 29-31. Mulţumim, pe această cale, celor două redacţii – ca şi autorului – pentru permisiunea de a publica textul în limba română.*

III. *Ralf Schindler [rds@math.uni-muenster.de] a studiat filozofia, logica şi filozofia ştiinţei la München. A obţinut titlul de doctor, în 1996, la Universitatea din Bonn şi abilitarea la Universitatea Humbold din Berlin, în 2001. A lucrat succesiv, ca asistent la Bonn, ca cercetător la UC Berkley, ca asistent universitar si ca profesor universitar la Viena. Din 2003 este profesor la Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung, Universitatea din Münster.* (N. R. N.)

Următoarele note aparţin redacţiei G. M. - A:
1. *Cisleithania* – parte a Imperiului Austro-Ungar care, conform sistemului dualist, era supusă direct Austriei
2. *Habilitationsschrift* – lucrare de abilitare (în germană, în original)
3. *"Fine Structure Theory"* în original
4. *"Theory of Inner Models"* în original
5. *"Square axioms"* în original
6. *"Proper Forcing Axiom"* în original

Redacţia mulţumeşte, de asemenea, domnilor *George Georgescu* şi *Mihai Iosif*, care au contribuit la îmbunătăţirea traducerii acestui articol. (N. R. G. M. - A).

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

A IX-a Conferinţă Naţională de Matematică şi Aplicaţii (CAMA'07) Iaşi, 26-27 octombrie 2007

A IX-a Conferinţă naţională de analiză matematică şi aplicaţii a fost organizată de către Facultatea de Matematică a Universităţii Al. I. Cuza din Iaşi, cu prilejul aniversării a 100 de ani de la naşterea profesorului *Ilie Popa*. Ea a beneficiat de sprijinul financiar al Autorităţii Naţionale a Cercetării Ştiinţifice, prin contractul nr. 235M/4.09.2007.

Programul ştiinţific a fost extrem de bogat, fiind prezentate peste cincizeci de conferinţe şi comunicări ştinţifice, care au atins cele mai variate aspecte ale cercetării in domeniul analizei matematice. Amintim aici conferinţele şi autorii lor (în ordinea prezentării):

- Cabiria Andreian Cazacu: *Contribuţii româneşti la teoria suprafeţelor Riemann neorientabile*;
- Mihail Megan, Adina Luminiţa Sasu, Bogdan Sasu: *Dichotomie şi admisibilitate pentru familii de evoluţie pe semiaxă*;
- Radu Miculescu: *Generalizări ale sistemelor iterative de funcţii*;
- Nicolae Suciu, Laurian Suciu: *Ordonare Harnack pentru perechi de contracţii comutative*;
- Marcelina Mocanu: *Aplicaţii ale teoremei lui Stepanov în spaţii metrice cu măsură*;
- Constantin Buşe: *O teoremă a lui Rolewicz în spaţii Hilbert cu aplicaţii la EDP*;
- Constantin Niculescu: *Proprietatea de absolut continuitate în analiza reală*;
- Petru Jebelean: *Soluţii periodice pentru ecuaţii singulare cu p-Laplacian*;
- Apreutesei Narcisa: *Proprietăţi topologice ale unor operatori cu diferenţe infinit dimensionale*;
- Rodica Luca-Tudorache: *Probleme neliniare pentru operatorii cu diferenţe finite de ordinul doi*;
- Lucian Beznea: *Operatori de subordonare pentru rezolvante - omagiu lui Gabriel Mokobodzki* (1937-2007)

Comitetul de organizare (format din profesorii *Ovidiu Cârjă*, *Liviu Florescu*, *Eugen Popa*, *Constantin Zălinescu*, *Cătălin Lefter*, lectorul *Marius Durea* şi asistentul universitar *Marius Apetrei*) a asigurat o atmosferă deosebit de primitoare, care a contribuit substanţial la succesul ştiinţific al conferinţei. Discuţiile pe marginea lucrărilor prezentate, prelungite şi la Casa Pogor, au apropiat participanţii, care astfel s-au bucurat de două zile dedicate eminamente matematicii şi problemelor sale. Indubitabil, Universitatea Al. I. Cuza este, în acest moment, centrul analizei matematice din România, iar realizările grupului de matematicieni de la această universitate au reuşit să transmită un sentiment de optimism în viitorul matematicii româneşti.

Constantin P. Niculescu

DIN VIAŢA SOCIETĂŢII

A XXXIV-a Sesiune de comunicări metodico-ştiinţifice a Filialelor din judeţul Prahova ale S.S.M.R.

Sâmbătă 27 octombrie 2007 s-a desfăşurat, la Sinaia, a XXXIV-a Sesiune de comunicări metodico-ştiinţifice a Filialei Prahova a S.S.M.R. Drept gazdă primitoare a lucrărilor sesiunii a servit, ca de numeroase ori în anii precedenţi, Colegiul Mihai Cantacuzino din localitate.

Lucrările au debutat prin Cuvântul de deschidere rostit de domnul profesor *Nicolae Angelescu* – inspector general adjunct al I. Ş. J. Prahova – preşedintele Filialei Prahova a S. S. M. R. şi unul dintre principalii organizatori ai manifestării. În continuare, domnul prof. univ. dr. *Dorin Popescu* – preşedintele de atunci al S.S.M.R. – a adresat un Mesaj de salut din partea conducerii Societăţii. De asemenea, din partea staff-ului S.S.M.R. au mai participat, la lucrări, domnul *Mircea Trifu* – secretar general – şi semnatarul acestor rânduri.

În cadrul lucrărilor plenului au fost prezentate următoarele comunicări:

1. prof. univ. dr. *Miron Oprea* (Universitatea Petrol şi Gaze din Ploieşti): „Centenarul naşterii profesorului Ion Grigore";
2. conf. univ. dr. *Cristinel Mortici* (Universitatea Valahia din Târgovişte): „Asupra unei configuraţii de puncte din plan";
3. prof. univ. dr. *Horea Banea* (Universitatea Transilvania din Braşov): „Asupra unei probleme a lui Adrian P. Ghioca";
4. conf. univ. dr. *Andrei Vernescu* (Universitatea Valahia din Târgovişte): „O caracterizare a polinoamelor lui Legendre".
5. prof. *Alexandru Popescu-Zorica* (Bucureşti): „Curbe algebrice".

În continuare, din cauza numărului mare, lucrările s-au desfăşurat pe trei secţiuni, după cum urmează:

Secţiunea A (moderatori prof. univ. dr. *Stere Ianuş* de la Universitatea din Bucureşti şi prof. *Felicia Georgescu* de la I.Ş.J. Prahova):

1. prof. univ. dr. *Constantin Popovici* (Universitatea din Bucureşti): „Probleme decidabile. Probleme nedecidabile";
2. prof. univ. dr. *Miron Oprea* (Universitatea Petrol şi Gaze din Ploieşti): „Rădăcina critică şi teologia aritmeticii";
3. prof. univ. dr. *Miron Oprea* (Universitatea Petrol şi Gaze din Ploieşti): „Expoziţia franceză ≪Matematica 2000≫ în România";
4. prof. *Ion Nedelcu* (Colegiul Naţional Mihai Viteazul din Ploieşti): „Asupra inegalităţii lui Schur";
5. prof. *Dumitru Popa* (Colegiul Naţional Nicolae Iorga din Vălenii de Munte): „Teorema rearanjării şi aplicaţii";
6. prof. *Mihai Gavriluţ* (Roman): „Observaţii asupra unor inegalităţi din Gazeta Matematică";
7. prof. *Ştefan Savu* (Grupul Şcolar Mâneciu): „Un moment interesant şi o problemă interesantă";
8. prof. *Adelina Apostol* (Şcoala cu clasele I-VIII Nicolae Iorga din Ploieşti): „Probleme care au condus la apariţia unor teorii şi discipline matematice";
9. prof. *Stelian Banu* (Şcoala Centrală din Câmpina): „Asupra unor sume de fracţii";
10. prof. *Cătălina Anca Isofache* (Liceul teoretic Alexandru Ioan Cuza din Ploieşti): „Prezentarea unui curs opţional integrat de biomatematică".

11. prof. *Roxana Lică* (Grupul Şcolar energetic din Ploieşti): „Aspecte metodice privind predarea capitolului Matematici financiare".

Secţiunea B (moderatori conf. univ. dr. *Cristinel Mortici* de la Universitatea Valahia din Târgovişte şi prof. *Nicolae Angelescu* de la I.Ş.J. Prahova):

1. prof. univ. dr. *Constantin Udrişte*, asist. *Ariana Pitea* (Universitatea Politehnica din Bucureşti): „Probleme de optimizări cu restricţii EDP sau IDP";

2. lect. univ. *Nicuşor Minculete* (Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir din Braşov): „O demonstraţie a teoremei Erdös-Mordell";

3. prof. *Anghel Dafina* (Colegiul Naţional Nicolae Iorga din Vălenii de Munte): „Înfăşurătoarea cercului, respectiv a sferei, ca locuri geometrice";

4. prof. *Liliana Crăciun*, prof. *Ioana Totolici* (Liceul teoretic Nichita Stănescu din Ploieşti): „Demonstrarea unor inegalităţi cu ajutorul generalizării inegalităţii lui Cauchy la matrici";

5. prof. *Gabriela Leu* (Colegiul Mihai Cantacuzino din Sinaia): „Şir cu recurenţă de termeni consecutivi numere prime";

6. prof. *Mărioara Costăchescu*, prof. *Cristina Diana Constandache* (Liceul cu program sportiv din Roman): „Contribuţii ale lui Leonhard Euler la elaborarea simbolurilor matematice";

7. prof. *Adrian Stroe* (Liceul Mihai Viteazul din Caracal): „O completare a teoremei de medie a lui Lagrange";

8. prof. *Mihaela Doinaru* (Colegiul Mihai Cantacuzino din Sinaia): „Formula generalizată a lui Leibniz de integrare";

Secţiunea C (moderatori conf. univ. dr. *Andrei Vernescu* de la Universitatea Valahia din Târgovişte şi prof. *Petre Năchilă* de la Colegiul Naţional I. L. Caragiale din Ploieşti):

1. prof. *Romelia Şciov* (Liceul teoretic Alexandru Ioan Cuza din Ploieşti): „O generalizare a unei probleme dată la examenul de la Bacalaureat din 2007";

2. prof. *Lidia Tatiana Pană*, prof. *Lidia Mihaela Ionescu* (Şcoala cu clasele I-VIII Sf. Vasile din Ploieşti), prof. *Magdalena Georgescu* (Şcoala cu clasele I-VIII Sf. Vineri din Ploieşti): „Lecţii practice şi atractive inspirate de N.A.S.A.";

3. prof. *Maria Frusinoiu* (Grupul Şcolar pentru construcţii de maşini din Câmpina): „Mijloacele de învăţământ în proiectarea didactică";

4. prof. *Maria Stoica* (Liceul Nichita Stănescu din Ploieşti), prof. *Ioana Totolici* (Liceul teoretic Nichita Stănescu din Ploieşti): „Aspecte metodice privind rezolvarea subiectelor de matematică la examenul de definitivat de la Universitatea Petrol şi Gaze din Ploieşti, 2007";

5. ing. *Alexandru Dumitru* (Ploieşti): „Educaţie prin matematică – jocuri didactice pentru copii";

6. prof. *Emilian Deaconescu* (Şcoala cu clasele I-VIII din Ceptura, jud. Prahova): „Contribuţia istoriei matematicii la atractivitatea lecţiilor din ciclul primar şi din gimnaziu";

7. prof. *Georgeta Filipescu* (Liceul de artă din Ploieşti): „Rolul programei şcolare în matematica din gimnaziu";

8. prof. *Cristina Marin*, prof. *Ilie Lazăr* (Şcoala cu clasele I-VIII Sf. Vineri din Ploieşti): „Parteneriat educaţional ≪Matematica la superlativ≫";

9. prof. *Carmen Luminiţa Brucăr* (Şcoala Înv. Athanase Jean Stoicescu din Ariceşti-Zeletin, jud. Prahova): „Aplicaţii ale teoremei lui Pitagora";

10. prof *Constantin Şchean* (Colegiul Naţional Mihai Viteazul din Ploieşti): „Câteva identităţi";

11. prof. *Roxana Soare* (Liceul Nichita Stănescu din Ploieşti): „Aplicaţii ale congruenţei modulo n".

Lucrările sesiunii s-au bucurat de un larg succes, comunicările prezentate stârnind vii discuţii şi întrunind aprecieri din partea celor peste o sută de participanţi.

Organizatorii sesiunii au fost, ca de obicei, Inspectoratul Şcolar Judeţean Prahova şi Filialele S. S. M. R. Prahova.

În fine, un ultim cuvânt de mulţumire trebuie să adresăm profesorului *Constantin Bucur*, directorul Colegiului Mihail Cantacuzino din Sinaia, precum şi doamnei profesoare *Mihaela Doinaru* – de la acelaşi liceu – care s-au dovedit gazde deosebit de amabile şi primitoare, răspunzând cu solicitudine tuturor dorinţelor organizatorilor sau participanţilor.

Dan Radu

Profesorul Constantin Corduneanu – O viaţă dedicată matematicii[1)]

De la *Dimitrie Cantemir* la *Ion Creangă* şi *Mihai Eminescu*, de la *Ciprian Porumbescu* la *George Enescu*, de la *Gheorghe Asachi* la *Spiru Haret*, Moldova a dat ţării personalităţi sclipitoare, ce au marcat istoria culturală şi ştiinţifică a naţiei române.

Avem deosebita plăcere, să prezentăm în preajma frumoasei vârste de 80 de ani, pe unul dintre marii matematicieni ai tuturor timpurilor, respectiv pe prof. univ. emerit *Constantin Corduneanu*, fiu al mirificelor plaiuri moldave. S-a născut în a 26-a zi a lunii lui Cuptor, în anul 1928, la Iaşi, fiind fiul cel mare al învăţătorilor *Costache* şi *Aglaia*. Ca şi în cazul marelui narator *Ion Creangă*, copilăria matematicianului de mai târziu, s-a petrecut în lumea de basm a satului moldav dintre cele două războaie mondiale, în Potângeni, comuna Movileni, judeţul Iaşi, acolo unde se afla şi casa bunicilor dinspre tată, de care se leagă şotiile şi aminitirile jocurilor în compania celorlalţi doi fraţi mai mici dar şi a numeroşi veri şi verişoare.

Şcoala primară şi cea gimnazială au fost absolvite tot în satul copilăriei. Adolescentul *C. Corduneanu* a urmat cursurile Liceului Militar la Iaşi, între 1941-1945 şi la Predeal, între 1945-1947, unde, după război, s-a mutat această instituţie de adevărată formare culturală a tinerilor.

Începând cu 1945, elevul *C. Corduneanu* se apropie de Gazeta Matematică unde devine rezolvitor. Activitatea sa se intensifică în 1946 şi 1947 când este premiat, obţinând chiar premiul I, în 1947, anul în care şi-a trecut bacalaureatul. Profesorul de acum, mărturiseşte cu nostalgie că, în liceul militar, alături de alţi colegi silitori ce s-au impus mai târziu ca personalităţi puternice ale societăţii, a deprins tehnica studiului aprofundat şi a cercetării asidue.

Între 1947-1951, tânărul *C. Corduneanu* a urmat, în „dulcele târg al Ieşilor", Facultatea de Matematică a prim înfiinţatei universităţi româneşti, la 1860, în timpul domniei lui Cuza Vodă, martor la eveniment fiind şi *S. Haret*, primul doctor român în Matematică (Sorbona 1878), dar şi „marele Ministru" din viziunea gazdelor epocii care, în calitatea de ocupant pe cea mai lungă perioadă cunoscută la noi a portofoliului Educaţiei şi Învăţământului, l-a structurat, l-a reformat şi l-a aşezat pe baze moderne (v.[1]). În perioada studenţiei, la 23 iulie 1949, *C. Corduneanu* se căsătoreşte cu *Alice Olga*, colega sa din Sibiu, viitoarea profesoară de Matematică a Liceului Naţional din Iaşi. După 56 de ani petrecuţi împreună, cu zile frumoase, presărate cu bucurii şi împliniri, la sfârşitul primăverii lui 2005, cu durere în suflet, profesorul a trebuit să se despartă pentru totdeauna, de distinsa-i soţie, plecată în lumea liniştii fără sfârşit.

Talentul deosebit pentru matematică al tânărului *C. Corduneanu*, i-a determinat pe profesorii săi să-i ofere, încă student fiind, un post de preparator universitar, între 1949-1950. În februarie 1951 şi-a trecut licenţa în Matematică, iar între 1950-1955 a funcţionat la Facultatea ieşeană, ca asistent universitar. *C. Corduneanu* a urmat studiile doctorale tot la Universitatea Al. I. Cuza , în perioada 1953-1956. Şi-a trecut doctoratul în 1956, cu teza intitulată „Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi şi doi", sub conducerea profesorului *Ilie Popa*.

Îşi va continua cariera la Universitatea din Iaşi, ca lector universitar între 1955 şi 1962. Va ocupa poziţia de conferenţiar universitar din 1962 până în 1968. Devine profesor universitar pentru Ecuaţii Diferenţiale, în 1968. De amintit că între 1967-1968, *C. Corduneanu* a fost visiting profesor la Universitatea Rhode Island din S.U.A., unde în aceeaşi calitate, s-a întors şi în primăvara lui 1978. Invitaţiile din partea mediului matematic american sunt fireşti, dacă avem în vedere renumele de cercetător al prof. *C. Corduneanu*, care şi-a şlefuit talentul în instituţii remarcabile, precum Institutul de Matematică al Academiei Poloneze din Varşovia şi Cracovia (mai-iunie 1962) sau Institutul de Matematică Ulisse Dini al Universităţii din Florenţa (aprilie-mai 1965). Tot în Italia, a revenit ca visiting profesor, la Şcoala Normală Superioară din Pisa, în august şi septembrie 1973.

Dacă în perioada deceniilor 6 şi 7, şcoala matematică românească era în topul mondial, după cele din fosta Uniune Sovietică şi Polonia, debutul deceniului 8 a marcat începutul unui declin permanent, continuat în ritm susţinut, până în prezent. Este şi motivul pentru care, intuind fenomenul, cercetătorul *C. Corduneanu*, după perioada petrecută la Universitatea Rhode Island, ca visiting profesor în primăvara lui 1976, a continuat tot ca visiting profesor, până în 1979 la Universitatea Tennesse. Apoi. s-a decis să se expatrieze pentru binele viitorului său ştiinţific, rămânând definitiv în S.U.A. unde a funcţionat ca profesor titular al Universităţii Texas din Arlington, între 1979-1996. Din 1996 până în prezent, domnia sa este *emeritus profesor* al acestei universităţi.

Deseori, matematicianul *C. Corduneanu* a dăruit din timpul său şi multor activităţi administrative universitare. Astfel, în vremea când a activat în paralel şi la Institutul Pedagogic Suceava,

---

[1)] Lucrare prezentată în secţiunea History and Philosophy of Mathematics în cadrul celui de al VI-lea Congres al Matematicienilor români, 24.06– 4.07/2007, Bucureşti. (N.A.)

profesorul a fost între 1964-1967, şef al catedrei de Matematică, iar între 1967-1968, rector al acestei instituţii universitare. Din 1968 şi până în 1972, *C. Corduneanu* a condus ca decan, destinele Facultăţi de Matematică a Universităţii din Iaşi, căreia i-a devenit apoi prorector cu cercetarea ştiinţifică şi doctoratele între 1972-1977.

Vom încerca, să evidenţiem, în continuare, activitatea deosebită a lui *C. Corduneanu* ca distins cercetător în Matematică. Domeniile predilecte ale profesorului sunt: *Ecuaţiile diferenţiale şi integro-diferenţiale, Ecuaţiile Funcţionale, Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale, liniare şi neliniare, Teoria stabilităţii sistemelor automate, Teoria oscilaţiilor şi a undelor aproape periodice.* Vom menţiona că tânăr fiind, după ce a primit (în 1963), premiul Academiei Române pentru lucrarea „*Teoria calitativă a sistemelor de control automat*"; *C. Corduneanu* a fost numit, la 35 de ani, şeful *Sectorului de Ecuaţii Diferenţiale*, de la Institutul ieşean al aceleiaşi Academii, funcţie pe care a ocupat-o între 1963-1968. Din această perioadă datează intensificarea la universitatea moldavă, a activităţii seminarului ştiinţific de „Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale", înfiinţat în 1957 de profesor şi sub conducerea căruia a avut o viaţă lungă, de 39 ani, până în 1996, cu observaţia că începând din primăvara lui 1978, a fost transferat peste oceanul Atlantic! Prin acest seminar, au fost puse bazele unei adevărate şcoli de cercetare. Aici, sub îndrumarea atentă a profesorului, îşi vor trece doctoratul: *N. Gheorghiu*, *George Bantaş*, *Viorel Barbu*, *N. Luca*, *Pavel Tolpalaru*, *Sergiu Aizicovici*, *Marica Lewin*, la Iaşi, *C. P. Tsokos*, *A. N. V. Rao*, *W. Layton*, la Rhode Island şi Tennessee, dar şi *R. Aftabizadeh*, *H. Poorkarimi*, *M. Moadab*, *A. Ansari*, *M. Mohdavi*, *Yizeng Li*, *Z. Okonkwo* şi alţii, la Arlington. Tot în cadrul seminarului, şi-au adâncit specializarea postoctorală *S. Travis* şi *D. Phising* în vremea funcţionării la Rhode Island şi Tennessee.

Până la stabilirea definitivă în S.U.A., neobositul cercetător conferenţia despre *Oscilaţii Neliniare*, despre *Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale neliniare* şi despre *Ecuaţii Integrale*, la Berlin, în 1964, la Milano şi Perugia, în 1965, la Madison din Wisconsin, în 1968, la Roma în 1970 la Washington D.C şi Warwick (Marea Britanie), în 1971, la Brno în 1972, la Durhamm şi Sussex (Marea Britanie), în 1973, precum şi la Rolla din Missouri, în 1978. Mai menţionăm aici că în 1974, cu 4 ani înainte de plecarea definitivă din ţara natală, omului de ştiinţă *C. Corduneanu* i s-au recunoscut meritele de incontestabil cercetător, prin alegerea sa, ca membru corespondent al Academiei Române. Este trist însă că, acum, la peste 18 ani de la zbuciumatul decembrie 1989, în degringolada susţinută de diverse interese, în pestriţa lume academică românescă, situaţia profesorului emerit *C. Corduneanu*, întemeietor de şcoală în Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale, în Stabilitatea sistemelor automate şi în Teoria oscilaţiilor şi undelor aproape periodice, nu a fost nici clarificată, nici corect tranşată. Există însă mulţumirea certă că S. U. A., în perioada lor de maximă deschidere spre ştiinţă, i-au oferit foarte cunoscutului matematician român emigrant, *C. Corduneanu*, aflat în 1978 în plină putere creatoare , şansa de a-şi dezvolta la maximum oportunităţile intelectuale de cercetare, în domeniul său de interes. Cu trecerea anilor, lucrările sale devin tot mai bine cunoscute şi sunt foare des citate şi ca urmare a prezentării lor ca *invitates lectures* la conferinţele şi congresele din lumea întreagă, printre care amintim: Beaumont din Texas, în 1982, Edinburg din Texas, în 1984, Trento din Italia, în 1984 şi 1987, Rhode Island din S.U.A., în 1988, Walis din Marea Britanie, în 1989, Neapole şi Torino din Italia dar şi Kyoto din Japonia, în 1990, Dundee din Scoţia, în 1993, Stratliclyde din Marea Britanie, în 1994, Szeged din Ungaria şi Atena (Al doilea Congres de Analiză Neliniară), în 1996, Waterloo din Canada, în 1999, Catania (Al treilea Congres de Analiză Neliniară din Italia), în 2000. În 2006, matematicianul *C. Corduneanu* conferenţiază la Baden-Baden în Germania, la Congresul de Cibernetică şi Sisteme, dar şi la Aveiro, în Portugalia, iar în 2007 ţine o conferinţă la Sankt Petersburg. Domnia sa este printre foarte puţinii români ce au conferenţiat în repetate rânduri, în 34 universităţi ale S.U.A., printre care şi renumita Cornell. De nenumărate ori, profesorul a fost solicitat să ţină atât studenţilor cât şi specialiştilor, diverse prelegeri din sfera sa de interes ştiinţific. Dintre acestea, 4 au avut loc tot pe continentul nord-american, dar în Canada, la Montreal, la Universitea de Montreal, în 1973, în 1987 la Mc. Gill University, cea mai veche instituţie academică a acestui continent, în l'École Polytechnique de Montreal în 1989, dar şi la Victoria University din Columbia Britanică, în 1983. Alte prelegeri s-au desfăşurat la Louvain din Belgia, în 1970 şi 1976, în fosta Cehoslovacie, la Academia acesteia, în 1962, la Universitatea Carol din Praga, în 1966, la Brno şi Bratislava, în 1971, apoi în 1994 şi 1995 la Marrakech din Maroc.

Ultima mare prelegere, ţinută sub formă de curs a avut loc la Universitatea Central Europeană din Budapesta, pe tema *Oscilaţiilor şi undelor aproape periodice*, bazată pe cartea cu acelaşi nume, pregătită pentru tipar între 2005-2007 şi care urmează să apară în curând, ca reflecând preocupările mai vechi sau mai noi ale distinsului cercetător. Vom remarca faptul că numărul lucrărilor expuse ca prelegeri sau conferinţe între care două expuneri plenare de către marele profesor, depăşeşte 125, fiind susţinute în 18 ţări, respectiv în Belgia, Bulgaria, Canada, Cehoslovacia, Franţa, Germania, Grecia, Italia, Japonia, Maroc, Olanda, Polonia, Portugalia, România, Rusia, S.U.A, Ungaria, Marea Britanie.

Profesorul cercetător *C. Corduneanu*, în cei 47 de ani de activitate efervescentă petrecuţi până la pensionarea din 1996, a scris peste 150 de articole în domeniul său de interes ştiinţific şi 4 cărţi, apărute în 10 ediţii, iar de atunci încoace, a mai publicat încă două cărţi şi alte peste 40 de articole. Este uimitor să constatăm că prima sa carte *Ecuaţii integrale şi stabilitatea sistemelor feedback* este citată de peste 850 de ori. Câteva sute bune de citări se găsesc şi pentru volumul *Funcţii aproape periodice* apărut în 3 ediţii. Iar lucrările sale sunt citate în bibliografia reprezentanţilor domeniului său de cercetare de peste 5300 ori! Este dovada unei munci serioase, intreprinse cu talent şi asiduitate care, la schimbarea angajatorului român cu cel american şi fără existenţa nici a celei mai mici întreruperi a activităţii, a permis un fapt aproape incredibil: niciodată, universităţile din S. U. A., la care a lucrat profesorul *C. Corduneanu*, nu i-au cerut acestuia, actele sale de studii! Este în fond marea preţuire pe care societatea americană s-a străduit să i-o acorde cercetătorului de excepţie, care i s-a alăturat în plină putere creatoare, preţuire pe care patria mamă nu s-a arătat dispusă să i-o ofere, chiar dacă profesorul *este unic* prin ceea ce a făcut pentru comunitatea matematicienilor români. Şi aceasta, pentru că deşi foarte departe de ţara bântuită de cea mai crudă perioadă a epocii sale comuniste, în 1981, la Arlington, în Texas, editează revista „Libertas Mathematica“, cu un nume absolut semnificativ ales, dând posibilitatea unor colegi rămaşi acasă să aibă şansa de a mai publica şi în străinătate. În cei 27 de ani de apariţie neîntreruptă, în paginile acestui jurnal matematic, printre alţii au publicat: *Corneliu Constantinescu*, *Ciprian Foiaş*, *Vasile Popov*, *Irinel Drăgan*, *Nicolae Tipei*, *N. Georgescu-Roegen*, *Paul Samuelson*, laureat al premiului Nobel pentru economie. Deşi prin eforturi uriaşe uneori, profesorul *C. Corduneanu* s-a străduit să menţină continuitatea revistei şi a vegheat tot timpul, la calitatea conţinutului ei, uneori, sfertodocţii cârcotaşi, care aparţin totuşi lumii matematice româneşti de pretitundeni încearcă să o blameze, invidiind probabil *longevitatea şi vizibilitarea în lume* a acesteia, în comparaţie cu alte publicaţii, actualmente minuscule, deşi sunt susţinute din banii publici ai societăţii.

Meritele incontestabile, de cercetător de talie mondială, i-au fost recunoscute profesorului *C. Corduneanu* prin premiul „Distinguished Records of Publications“ pe care Universitatea Arligton din Texas, i l-a acordat în 1991. Mai amintim aici că, matematicianului român extraordinar citat în domeniul său, i-a fost oferit titlul de *doctor honoris causa* de către următoarele universităţi: Ovidius din Constanţa, în 1994, Al. I. Cuza din Iaşi, în 1994, Transilvania din Braşov, în 1999, respectiv Ştefan cel Mare din Suceava, în 2003. Regretăm că nici astăzi, Academia Română de după decembrie 1989, nu a vrut să corecteze grava impietate pe care Academia Română a „epocii de aur“ a făcut-o în 1978, prin excluderea profesorului *C. Corduneanu*, ce a ales să trăiască şi să gândească liber în S.U.A.

Notorietatea de care se bucură cercetătorul *C. Corduneanu* în domeniul său a făcut ca el să fie numit încă din 1967 în comitetul de redacţie sau să fie editor asociat a numeroase jurnale matematice din Coreea, Israel, România şi S.U.A., între care amintim: Communications on Applied Nonlinear Analysis, Nonlinear Functional Analysis and Applications, Journal of Integral Equations and Applications, Differential and Integral Equations. Girul său ştiinţific a fost pus şi pe sutele de recenzii, făcute în timp, pentru A.M.S şi Zbl.

Actualmente, profesorul este membru în asociaţiile profesionale AMS, SIAM, MAA (Math. Am. Asso.), este membru al asociaţiei ştiinţifice „Phi, beta, delta“ (International Scholar), precum şi al Academiei Româno-Americane de Artă şi Ştiinţe. Trebuie să mai amintim aici că modestul, dar marele matematician *C. Corduneanu* a depus mult suflet în activitatea Academiei Româno-Americane de Artă şi Ştiinţe, fiindu-i cancelar între 1982-1995, apoi preşedinte din 1995 până în 1998, iar din 1998 până astăzi îi este preşedinte de onoare.

Domnia sa a fost mereu cu sufletul aproape de ţara natală şi printre extrem de puţinii matematicieni români din diasporă care şi-a ajutat semenii din branşă de câte ori a putut. Oricând dispus să facă în mod abolut dezinteresat un bine, cuiva, profesorul cu suflet de aur a scris sute de recomandări şi a întocmit referata utile, pentru ca numeroşi români, unii cunoscuţi, alţii aproape necunoscuţi, să poată ocupa posturi academice în S. U. A. Iar aceasta se datorează, desigur, doar deschiderii cu care bunul Dumnezeu îi înzestrează pe aleşii săi deosebiţi şi într-adevăr cu suflet mare...

Deşi lumea matematică românească, în urmă cu patru ani, la al 5-lea Congres al „redeşteptării“ sale, ar fi trebuit, altfel, să-l onoreze pe distinsul profesor şi cercetător *C. Corduneanu*, aproape unicul ce s-a luptat din afară, între 1978-1989, pentru binele semenilor săi de breaslă, totuşi atunci, chiar în preajma celor 75 de trepte ale vieţii sale, dar în spiritul bine-cunoscut al proverbialei dezbinări a naţiei române, s-a uitat chiar şi datoria elementară prin care discipolul trebuia măcar să-şi amintească de maestrul său... Iar sărbătorirea profesorului, ce s-ar fi putut face chiar în mijlocul comunităţii matematice a românilor de pretutindeni, nu a avut loc decât la Iaşi, în cea mai veche universitate a ţării, acolo unde *C. Corduneanu* s-a format şi a lucrat cu onestitate, dăruindu-i lăcaşului de cultură, 31 de ani din viaţa sa. O viaţă demnă, vegheată mereu de datoria muncii împlinite prin cercetare şi prin educarea tinerilor a zeci de generaţii, deveniţi acum specialişti. O muncă uriaşă, depusă de-a lungul a 47 de ani de activitate desfăşurată în câte trei locuri ale lumii academice, situate în două ţări ale unor continente completamente distincte, dar scăldate de apele Atlanticului, ţări ce poartă numele de România şi S.U.A. Şi cum profesorul cercetător *C. Corduneanu* a adus jertfa muncii sale pe altarul Matematicii, ca într-un corolar, putem conchide că viaţa sa este total dăruită ştiinţei regine.

Iar acum, în preajma aniversării celor 80 de ani frumoşi şi împliniţi, îi dorim marelui profesor multă sănătate şi, desigur, putere de muncă, pentru a-şi desăvârşi proiectele, dar şi tradiţionalul „La mulţi ani!“ alături de pace spirituală şi de bucurii, alături de cei dragi.

Bibliografie

[1] L. Modan, *Spiru Haret, reper al spiritualităţii româneşti.* Gazeta Matematică - Seria A, nr. 2/2001, Bucureşti, pp. 113.

Laurenţiu Modan

Conferinţa Naţională a Societăţii de Ştiinţe Matematicie din România

Sâmbătă, 26 ianuarie 2008, au avut loc, în sala de festivităţi a Colegiului Naţional Gheorghe Şincai din Bucureşti, lucrările Conferinţei Naţionale a S.S.M.R. Au participat 131 delegaţi din cei 171 desemnaţi la Adunările generale ale Filialelor Societăţii, precum şi numeroşi invitaţi, dintre care amintim: dr. *Vasile Brânzănescu*, directorul Institutului de Matematică Simion Stoilow al Academiei Române, *Florin Talpeş*, directorul general al firmei Softwin, prof. dr. *Tudor Zamfirescu*, Universitatea din Dortmund, Germania, prof. *Al. Popescu-Zorica*, vechi colaborator al Gazetei Matematice.

Domnul prof. dr. *Dorin Popescu*, preşedintele Societăţii, a prezentat Raportul privind activitatea S.S.M.R. în ultimii patru ani, iar domnul conf. univ. dr. *Mircea Becheanu*, prim vicepreşedinte, a prezentat proiectul Planului de activităţi pe anul 2008 şi Proiectul de buget al S.S.M.R. pe anul 2008. Participanţii la Conferinţă au ales prin vot secret pe cei 91 de membri ai Consiliului S.S.M.R. şi pe cei 5 membri ai Comisiei de cenzori. În unanimitate, domnul prof. univ. dr. *Ioan Tomescu*, membru corespondent al Academiei Române, a fost ales Preşedinte de onoare al S.S.M.R. La rândul lor, membrii Consiliului au ales pe cei 14 membri ai Biroului Consiliului S.S.M.R. Prezentăm în continuare listele cu membrii Consiliului, ai Comisiei de cenzori şi ai Biroului Consiliului S.S.M.R.:

Membrii Consiliului S.S.M.R.

Alba
1. Ionel Trifon
Arad
2. Gheorghe Halic
Piteşti
3. Paul Radovici-Mărculescu
Curtea de Argeş
4. Adrian Gobej
Câmpulung Muscel
5. Ştefan Iliescu
Bacău
6. Ion Radu
7. Cornel Berceanu
Comăneşti
8. Toma Gloambeş
Bihor
9. Mircea Balaj
10. Mihai Miculiţa
Bistriţa-Năsăud
11. Nicolae Sanda
12. Ion Coman
Botoşani
13. Artur Bălăucă
Braşov
14. Eugen Păltănea
Brăila
15. Dan Negulescu
Buzău
16. Constantin Apostol
Râmnicu Sărat
17. Constantin Rusu
Bucureşti
18. Doru Ştefănescu
19. Cristian Alexandrescu
20. Mircea Becheanu
21. Ion Cicu
22. Radu Gologan
23. Stere Ianuş
24. Ioan Maftei
25. Radu Miculescu
26. Laurenţiu Modan
27. Laurenţiu Panaitopol
28. Dorin Popescu
29. Dan Radu
30. Dan Tiba
31. Ioan Tomescu
32. Mircea Trifu
33. Marcel Ţena
34. Andrei Vernescu
Caraş-Severin
35. Lucian Dragomir

Călăraşi
36. Gheorghe Stoianovici
37. Ion Cheşcă
Cluj
38. Dorel Duca
39. Cristian Pop
40. Vasile Şerdean
Constanţa
41. Wladimir Boskoff
42. Gheorghe Andrei
Mangalia
43. Vasile Arsinte
Covasna
44. Gheorghe Cotfas
Dâmboviţa
45. Cristinel Mortici
46. Dorinel Anca
Craiova
47. Dumitru Buşneag
48. Constantin Niculescu
Calafat
49. Ioan Marin
Galaţi
50. Ion Mirică
51. Laura Marin
Giurgiu
52. Sergiu Marinescu
53. Ionel Tudor
Gorj
54. Vasile Lupulescu
Harghita
55. Laszlo Hodgyai
Hunedoara
56. Maria Bodea
57. Dan Marinescu
Ialomiţa
58. Costică Dumitru
59. Nicolae Papacu
Iaşi
60. Dan Brânzei
61. Vasile Nechita
Maramureş
62. Vasile Berinde
63. Nicolae Muşuroia
Mehedinţi
64. Gheorghe Căiniceanu
65. Dan Stretcu
Mureş
66. Adrian Petrescu
Piatra Neamţ
67. Camelia Neţa
Roman
68. Mihai Gavriluţ
Olt
69. Eduard Buzdugan
Corabia
70. Dorin Mărghidan
Prahova
71. Nicolae Angelescu
72. Petre Năchilă
Câmpina
73. Alexandru Diţei
Vălenii de Munte
74. Anghel Dafina
Satu Mare
75. Alexandru Blaga
76. Ovidiu Pop
Sălaj
77. Florin Tuduce
Sibiu
78. Dumitru Acu
79. Nicolae Suciu
Suceava
80. Gheorghe Marchitan
Teleorman
81. Marius Burtea
Timiş + Lugoj
82. Mihail Megan
83. Dorel Miheţ
Tulcea
84. Nicolae Ivan
Vaslui + Bârlad
85. Gianina Busuioc
86. Marcel Rotaru
Vâlcea
87. Emilian Popescu
88. Constantin Drugan
Drăgăşani
89. Ilie Bucă
Vrancea
90. Cornel Noană
Republica Moldova
91. Valeriu Guţu

Membrii Comisiei de cenzori a S.S.M.R.

1. Alexandru Constantinescu
2. Grigore Bănescu
3. Doina Cremenescu
4. Ilie Iambor
5. Silvia Toma

Membrii Biroului Consiliului S.S.M.R.

Preşedinte: Radu Gologan
Prim vicepreşedinte: Doru Ştefănescu
Vicepreşedinte: Nicolae Sanda
Vicepreşedinte: Wladimir Boskoff
Secretar general: Mircea Trifu
Secretar general adjunct: Cristian Alexandrescu
Membru: Dumitru Acu
Membru: Nicolae Angelescu
Membru: Vasile Berinde
Membru: Dumitru Buşneag
Membru: Dorel Duca
Membru: Cristinel Mortici
Membru: Eugen Păltănea
Membru: Paul Radovici-Mărculescu

Mircea Trifu

REVISTA REVISTELOR

Recreaţii matematice

Ca de obicei, revista „Recreaţii Matematice" constituie o adevărată încântare pentru cititorul dedat deliciilor matematicii elementare – sau aproape elementare – , un adevărat festin spiritual pentru împătimiţii raţionamentului cristalin şi elegant, de multe ori subliniat – dar rezistent la intemperiile prostului gust şi al locului comun care abundă în multe alte publicaţii locale ce-şi au sorgintea în orgolii nesatisfăcute, frustrări şi mercantilism.

Numărul 2/2007 al publicaţiei reuneşte o serie de articole şi note extrem de interesante printre care: „Tipurile subgrupurilor finite $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$" (*G. Dospinescu*), „O problemă cu cifrele unui număr" (*T. Zvonaru*), „O problemă de construcţie a unui triunghi" (*T. Bârsan*), „Un şir strâns legat de şirul lui Wallis" (*A. Corduneanu* şi *Gh. Costovici*), „Asupra rădăcinilor polinomului $X^3+pX+q\in\mathbb{Q}[X]$" (*A. Reisner*), „Jensen's inequality for non convex functions" (*H. Stephan*) etc.

De asemenea, vom mai menţiona editorialul „Al VI-lea Congres Internaţional al Matematicienilor Români" semnat de *C. Corduneanu* de la Universitatea din Texas, Arlington, precum şi interesantul material dedicat conjecturii lui *Poincaré* datorat reputatului geometru *Vasile Oproiu* de la Universitatea Al. I. Cuza din Iaşi.

Dan Radu

Revista de Matematică din Timişoara

La redacţie ne-a parvenit, prin bunăvoinţa domnului profesor *Ion Damian Bârchi*, directorul publicaţiei – numărul 4/2007 al prestigioasei şi longevivei reviste timişorene.

Menţionând formatul impus deja de multă vreme, revista abundă şi acum de numeroase şi variate probleme propuse cititorului , având ca autori pe cei mai cunoscuţi şi reputaţi profesori de liceu şi gimnaziu care, de-a-lungul timpului, au devenit adevăraţi „monştri sacri" printre propunătorii de probleme. Iată câteva astfel de nume, cu menţiunea că lista este incompletă şi destul de subiectivă: *A. Doboşan*, *N. Ivăşchescu*, *C. Mortici*, *M. Bencze*, *D. Şt. Marinescu*, *V. Cornea*, *Gh. Szöllösy*, *L. Panaitopol*, *M. Prajea*, *D. Miheţ*, *Gh. Eckstein*, *M. Chiriţă* , *D. M. Bătineţu-Giurgiu* etc.

Dintre notele matematice publicate, vom cita „Inegalitatea Hadamard-Hermite" şi „Caracterizări ale ortocentrului în triunghiul ascuţitunghic" semnate de *D. Şt. Marinescu* şi *V. Cornea*, precum şi „Inegalitatea lui Shapiro" datorată lui *Gh. Eckstein* – redactorul şef al publicaţiei.

Dan Radu

Axioma – supliment matematic

Domnul profesor *Gheorghe Crăciun* – redactorul coordonator al publicaţiei – ne-a pus la dispoziţie numerele 22, 24 şi 25 din 2007 ale revistei prahovene (nr. 23 a fost deja prezentat cititorilor noştri, în G. M. A nr. 4/2007).

Revista îşi păstrează structura pe care şi-a profilat-o cu mulţi ani în urmă: ea se vrea – şi este! – un instrument util pentru profesori şi elevi în predarea şi asimilarea cunoştinţelor matematice la clasă; multitudinea şi varietatea problemelor propuse dovedeşte acest fapt. De fapt, listele ample de rezolvitori publicate în fiecare număr probează că revista a găsit acea „nişă" fertilă în rândul publicului cititor, „nişă" la care aspiră orice altă revistă de profil.

Dintre materialele cu caracter teoretic inserate în aceste numere vom cita aceste note: „Asupra ecuaţiei $x^n = n^2$" (*M. Oprea*), „Consideraţii privind rezolvarea sistemului de ecuaţii cu coeficienţii în $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$" (*F. Georgescu*), „Imagini geometrice ale mulţimii numerelor reale deduse într-o problemă de loc geometric" (*A. Dafina*), „Rădăcina cifrică şi teologia aritmeticii" (*M. Oprea*), „Generalizarea unei probleme de convergenţă" (*G. Tica*), „Câteva identităţi obţinute din dezvoltări binomiale" (*C. Şchean*), „Partea întreagă a unui număr. Ecuaţii" (*C. Năchilă*).

În fine, nu putem încheia această succintă prezentare fără a aminti articolul omagial – semnat de profesorul *Miron Oprea* – dedicat împlinirii vârstei de 65 de către prof. univ. dr. *Ioan Tomescu*, membru corespondent al Academiei Române, preşedintele de onoare al S. S. M. R. Ne alăturăm şi noi autorului urându-i un călduros „La mulţi ani!"

Dan Radu

Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin

La Reşiţa a apărut nr. 21 (an VIII – 2007) al revistei editate de filiala S.S.M.R. Caraş-Severin, revistă ce are ca redactor şef pe neobositul şi entuziastul profesor *Lucian Dragomir* – preşedintele filialei locale.

Vom spicui câteva titluri din acest număr: „Aplicaţii interesante pentru teorema produsului de funcţii care admit primitive" (*C. Mortici*), „Contraexemple în matematica elementară" (*L. Dragomir*), „Ecuaţii funcţionale pe $\mathbb{R}$" (*M. Teodorescu*, *O. Bădescu*) etc.

Deşi modestă ca pretenţii, revista reşiţeană este o apariţie proaspătă şi utilă, menţinând viu fermentul interesului pentru matematică printre elevii şi profesorii locului. Faptul că nume prestigioase – cum ar fi, în acest număr, domnul conf. univ. dr. *Cristinel Mortici* – apar în paginile ei, denotă atât preocuparea redacţiei în creşterea nivelului calitativ, cât şi interesul urzit de publicaţie în rândul celor care, dintotdeauna, s-au aplecat cu dragoste şi competenţă profesională asupra matematicii preuniversitare.

Dan Radu

Creative Mathematics and Informatics

La Baia Mare a văzut lumina tiparului vol. 16 (2007) al periodicului anual editat de Departamentul de Matematică şi Ştiinţa Calculatoarelor al Universităţii de Nord din localitate.

El reuneşte, ca deobicei, lucrările Seminarului de creativitate matematică patronat de Universitatea din Baia Mare.

Vom selecta câteva titluri din bogatul cuprins al volumului: „Artin symbol of the Kummer fields" (*D. Savin*), „A direct finding of the Supremum of sequences explained by a fixed point theorem and some new results in asymptotic analysis" (*A. Vernescu*), „Some refinements of relative information inequality" (*J. Rooin*, *A. Morassaei*), „Minimal surfaces" (*J. Vecková*) etc.

Dan Radu

RECENZII

BOGDAN ENESCU, Polinoame, Editura GIL, Zalău, 2007

Volumul tipărit la Zalău de veşnic tânărul şi entuziastul editor *Mircea Lascu*, este al cincilea din seria „Biblioteca Gil", serie dedicată diverselor capitole de matematici elementare şi având drept autor pe cei mai cunoscuţi şi prestigioşi publicişti din domeniu.

Prezentul volum îl are ca autor pe profesorul *Bogdan Enescu*, aparţinând unei tinere generaţii, dar deja de multă vreme un mare cunoscut printre degustătorii de matematică elementară, profesori sau elevi – atât pe plan publicistic, cât şi ca unul dintre fermenţii activi în organizarea şi desfăşurarera olimpiadelor de matematică.

Dedicat unui capitol destul de sensibil al matematicii de liceu – „Polinoame“ - volumul reuşeşte ca, într-un număr mic de pagini (94), să prezinte cunoştinţele teoretice de bază, precum şi o serie întreagă de probleme şi exerciţii atent selecţionate pentru a servi scopului. Experienţa autorului îşi spune aici, cu bine, cuvântul.

De ce acest capitol? Iată răspunsul pertinent al autorului: „Întotdeauna am considerat acest capitol ca fiind unul din cele mai importante, având în vedere numeroasele aplicaţii ale polinoamelor în toate ramurile matematicii de liceu.... Pe de altă parte, la toate concursurile de matematică internaţionale (......) sunt frecvent propuse probleme legate de polinoame sau în a căror rezolvare folosirea polinoamelor este decisivă.“

Volumul este structurat pe trei secţiuni. Prima parte este dedicată principalelor rezultate teoretice ale capitolului: Operaţii cu polinoame, Funcţii polinomiale, Schema lui Horner, Teorema împărţirii cu rest, Divizibilitatea polinoamelor, Rădăcinile polinoamelor, Relaţiile lui Viète, Clase de polinoame. Partea a doua conţine o serie întreagă de aplicaţii, concretizate prin probleme de concurs, unele rezolvate – altele propuse spre rezolvare. În fine, ultima parte reuneşte rezolvările problemelor propuse şi conţine, de asemenea, o succintă prezentare a numerelor complexe

Scrisă într-un limbaj simplu şi clar, nepretenţios dar riguros în măsura posibilităţilor, volumul poate constitui un model pentru modul cum ar trebui redactat acest capitol în manualele gimnaziale şi de liceu.

Considerăm cartea extrem de utilă nu numai pentru elevii de gimnaziu şi liceu, ci şi pentru profesorii acestora, atât în predarea la clasă a capitolului respectiv, cât şi în pregătirea diverselor concursuri de matematică.

Dan Radu

LILIANA NICULESCU, Metoda reducerii la absurd, Editura GIL, Zalău, 2006

Distinsa doamnă profesor *Liliana Niculescu* oferă elevilor din gimnaziu şi primelor clase liceale o excelentă lucrare care are drept scop punerea în evidenţă a valorii metodei reducerii la absurd (metodă care, aşa cum precizează autorul, se consideră că nu ridică probleme deosebite şi se învaţă "din mers", dar care, în ciuda aparentei simplităţi, permite soluţionarea unor probleme dificile din domenii variate).

Primul capitol al cărţii, intitulat „O privire de ansamblu asupra metodei“, face o prezentare generală a metodei reducerii la absurd, oferind atât probleme care au drept scop facilitarea înţelegerii acestei metode de către cei mai mici elevi, cât şi probleme celebre şi probleme dificile de genul celor care apar la concursurile de matematică.

Al doilea capitol al lucrării constă în probleme propuse (32 pentru clasele 5-6, 40 pentru clasele 7-8 şi 36 pentru clasele 9-10) a căror dificultate creşte treptat, iar cel de al treilea prezintă soluţiile acestora.

Cartea reprezintă o bijuterie a matematicii elementare, care trebuie să stea la loc de cinste în biblioteca oricărui profesor sau elev pasionat de matematică.

Radu Miculescu

DOREL I. DUCA, EUGENIA DUCA, Exerciţii şi probleme de Analiză matematică, vol. I, Editura CASA CĂRŢII DE ŞTIINŢĂ, Cluj, 2007

O nouă lucrare de valoare se face remarcată în literatura ştiinţifică de specialitate din domeniul Analizei Matematice. Autorii sunt binecunoscute personalităţi din învăţământul universitar clujean, de la Universitatea „Babeş-Bolyai“, respectiv Universitatea Tehnică din Cluj.

Aşa cum arată şi titlul, este vorba de o culegere de probleme; ea vine să completeze cursurile, prin punerea la dispoziţia cititorului a unui set semnificativ de exerciţii şi probleme, toate fiind rezolvate integral sau având răspunsuri. Cititorul dispune astfel de modele de rezolvare.

Toate capitolele, fără excepţie, sunt structurate în două subdiviziuni : 1. Teorie; 2. Probleme. Cartea, desfăşurată pe 282 de pagini, este divizată în următoarele şapte capitole:

Capitolul 1: Numere reale. Funcţii reale;
Capitolul 2: Elemente de topologie pe $\mathbb{R}$;
Capitolul 3: Şiruri de numere reale;
Capitolul 4: Limite de funcţii;
Capitolul 5: Funcţii continue;

Capitolul 6: Funcţii derivabile;

Capitolul 7: Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor,

la care se adaugă

Capitolul 8: Soluţii şi răspunsuri.

În total, cartea include 548 de probleme, dar mare parte din acestea conţin mai multe subpuncte, ceea ce măreşte, de fapt, numărul „itemilor". Problemele sunt foarte bine alese , interesante, foarte bine gradate. Rezolvările sunt detaliate, expuse cu toate detaliile necesare şi, prin modul de aşezare în pagină, uşor de găsit. Bibliografia conţine 24 de titluri.

Prin conţinutul său bogat din tematica abordată, a calculului diferenţial al funcţiilor de o variabilă reală, culegerea de probleme pe care o prezentăm aici este utilă studenţilor din anul I de la facultăţile de matematică, fizică, chimie, inginerie şi ştiinţe economice, în legătură cu cursul (sau lecţiile) de Analiză Matematică, dar poate fi folosită cu maxim beneficiu şi de elevii de clasa a XI-a, cât şi de profesorii lor.

Aşteptând volumul II, dedicat calculului integral, recomandăm cu căldură prezentul volum.

Andrei Vernescu

MARIA ELENA PANAITOPOL, LAURENŢIU PANAITOPOL, Probleme de geometrie plană, soluţii trigonometrice, Editura GIL, Zalău, 2006

Volumul poartă numărul 6 în cadrul seriei „Biblioteca Gil", serie dedicată matematicilor elementare şi promovată de editură în ultimul an. Autorii sunt doi dintre cei mai cunoscuţi promotori ai matematicii de liceu, cu o vastă şi îndelungată experinţă în domeniu, certificată atât prin numeroasele volume publicate, cât şi prin prezenţa continuă pe parcursul a zeci de ani în revisele de speciallitate ca şi în arena concursurilor de matematică.

De ce acest subiect, aparent retro şi deloc în pas cu moda zilei? Răspunsul nu poate fi decât unul singur: matematica reprezintă un tot unitar, un organism pentru care fiecare subansamblu are funcţionalitatea lui ce contribuie la armonia întregului, la buna evoluţie şi dezvoltare a acestuia. În plus, probabil că intervine şi un motiv subiectiv: geometria sintetică şi trigonometria– dragă generaţiilor mai vechi – prea au fost marginalzate în ultimele programe şi manuale; ar fi vremea să se reconsidere unele puncte de vedere....

Autorii consideră că metoda trigonometrică – la fel ca metoda vectorială, analitică etc.— constituie unul dintre instrumentele eficiente în abordarea problemelor de geometrie sintetică, o cale eficace de abordare a lor. De altfel este clar: nu există în geometrie o cale universală de abordare a problemelor, cunoaşterea şi discernământul rezolvitorilor urmând să selecteze o metodă de rezolvare sau alta, în funcţie de natura problemei şi de gradul său de dificultate.

Lucrarea este împărţită în cinci capitole, după cum urmează:

1. Breviar de formule;
2. Probleme de antrenament;
3. Probleme de concurs;
4. Soluţii la problemele de antrenament;
5. Soluţii la problemele de concurs.

În afară de acestea, în volum sunt inserate o Listă de notaţii, o Bibliografie (minimală) şi un indice de autori.

Considerăm că această carte este extrem de utilă elevilor de liceu – cu precădere acelora ce se pregătesc pentru diverse concursuri –, precum şi profesorilor de liceu care, cum spuneam mai la început, au fost prea mult tentaţi de modernizarea, de multe ori forţată, a predării geometriei în liceu.

Dan Radu

BOGDAN ENESCU, Arii, Editura GIL, Zalău, 2006

Profesorul *Bogdan Enescu* este un nume binecunoscut în publicistica matematică românească aferentă învăţământului liceal. Cartea de faţă, parte a unui proiect mai vechi intitulat *Arii şi volume*, conţine probleme care au stat la baza unor lecţii ţinute la pregătirea lotului olimpic al ţării noastre sau în tabere de matematică precum Math Olympiad Summer Program 2001, Mathpath

2002 ori Mathcamp 2006, probleme propuse la olimpiada naţională de matematică, la olimpiade din diverse ţări, precum şi la olimpiada internaţională de matematică.

Folosind foarte puţine cunoştinţe tehnice (de exemplu singura formulă folosită pentru aria unui triunghi este $\frac{ah_a}{2}$, unde a este lungimea unei laturi, iar h_a este lungimea înălţimii corespunzătoare), lucrarea se adresează elevilor de gimnaziu pasionaţi de geometrie, precum şi profesorilor ce organizează cercuri de matematică.

Cele 11 capitole ale cărţii, întinse pe 50 de pagini sunt următoarele: O proprietate a medianei; O caracterizare a trapezelor; Un loc geometric util; Un produs de arii cu implicaţii ... la Pentagon; O sumă constantă şi ... 12 cameleoni; Câteva rezultate clasice; O inegalitate simplă ... dar utilă; Maxime şi minime; Poligoane convexe; Câteva probleme ... de antrenament; O „bijuterie" ... pentru final. În ultima parte a cărţii sunt prezentate soluţiile problemelor propuse cititorului.

Toate cele spuse mai sus arată că avem de-a face cu o lucrare extrem de interesantă şi de utilă, pe care o recomandăm călduros.

Radu Miculescu

DUMITRU POPA, Exerciţii de Analiză matematică, Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, Editura MIRA, Bucureşti, 2007

O nouă apariţie în biblioteca S.S.M.R., elaborată de prof. univ. dr. *Dumitru Popa* de la Universitatea Ovidius din Constanţa şi intitulată „Exerciţii de Analiză matematică", are de fapt ca obiectiv aspecte din analiza asimptotică a şirurilor şi seriilor de numere reale şi a integralelor *Riemann* (după stabilirea, în prealabil, a convergenţei). Desfăşurată pe 256 de pagini, culegerea de exerciţii (şi probleme) pe care o prezentăm cuprinde 124 de probleme grupate în cinci capitole, anume:

I. Limite de şiruri şi evaluări asimptotice (pp. 5-37, 21 de probleme);

II. Evaluări asimptotice pentru şiruri definite recurent (pp. 38-50, 11 probleme);

III. Limite de integrale şi evaluări asimptotice (pp. 51-123, 38 de probleme);

IV. Şiruri definite implicit şi evaluarea asimptotică a convergenţei lor (pp. 124-243, 49 de probleme);

V. Evaluări asimptotice pentru serii şi integrale (pp. 244-255, 5 probleme).

Lucrarea conţine enunţuri clasice, probleme din Gazeta Matematică, precum şi probleme originale ale autorului. În scopul de a reliefa cât mai bine ce obiectiv precis are fiecare problemă, autorul a făcut efortul, deloc neglijabil, de a atribui fiecărei probleme câte un titlu.

Toate problemele sunt complet rezolvate, secţiunile de rezolvări fiind plasate în fiecare capitol, imediat după prezentarea tuturor enunţurilor. Aşa cum precizează autorul, pentru înţelegerea enunţurilor şi soluţiilor sunt necesare cunoştinţele de Analiză matematică de clasele a XI-a şi a XII-a, iar pentru unele probleme sunt necesare cunoştinţe mai avansate, la nivelul cursului universitar de Analiză matematică.

Lucrarea este foarte utilă persoanelor interesate de o analiză mai fină a diferitelor procese de convergenţă în domeniul real, adică de analiză asimptotică. Acestor persoane le recomandăm lucrarea cu căldură.

Andrei Vernescu

VASILE POP, Geometrie pentru gimnaziu, liceu şi concursuri, Editura MEDIAMIRA, Cluj, 2007

Dintre toate disciplinele predate în şcoală, geometria elementară (sintetică) are pe departe cel mai important rol formativ în dezvoltarea capacitaţilor intelectuale ale elevului.

Problemele de geometrie elementară necesită un volum redus de cunoştinţe, ceea ce face ca în faţa unei astfel de probleme să fie egali: un elev de gimnaziu, un elev de liceu, un student, un profesor, un profesor universitar sau chiar un părinte. Diferenţa o poate face, în favoarea oricăruia, o idee deosebită, o construcţie ingenioasă, o sclipire de moment.

Geometria elementară oferă şi o posibilă comparaţie a capacităţilor creative ale omului în decursul mileniilor. Multe dintre problemele celebre ne impresionează sau chiar ne complexează prin ideile geniale prin care au fost rezolvate.

Pentru mulţi oameni care au simţit gustul geometriei elementare, ea devine mai mult decât o profesie, iar problemele făcute din pasiune oferă satisfacţii nebănuite.

România a avut întotdeauna geometri de excepţie, iar şcoala românească de geometrie elementară a avut foarte multă vreme cele mai bune rezultate pe plan internaţional. Ani la rând echipa olimpică a României a realizat la O.I.M. punctaj maxim. Din păcate „reforma" învăţământului din ultimii ani a distrus cel mai frumos şi cel mai formativ domeniu al matematicii din gimnaziu şi liceu. Consecinţa vizibilă este că în prezent pentru lotul olimpic, cele mai dificile probleme sunt cele de geometrie. Consecinţa, ce va deveni vizibilă peste câţiva ani, este că absolvenţii liceelor vor fi privaţi de parte din calităţile la care geometria contribuie esenţial: intuiţie, ingeniozitate, rigurozitate, logică, perseverenţă, viziune în plan şi spaţiu.

Aceasta carte se doreşte o pledoarie pentru geometria elementară şi este o consecinţă a unei munci făcute din pasiune. Toate problemele conţinute sunt probleme originale ale autorului, foarte multe fiind date la concursurile şcolare: olimpiade locale, judeţene, interjudeţene, naţionale, concursul Gazetei Matematice. Multe din ele au fost publicate în reviste româneşti sau au fost preluate din reviste din alte ţări.

Cartea este structurată pe şase capitole:

I. Geometrie liniară,

II. Cercul,

III. Geometrie vectorială,

IV. Geometrie în planul complex,

V. Geometrie în spaţiu,

VI. Geometrie combinatorică.

Nivelul de cunoştinţe necesare înţelegerii soluţiilor este: clasa a VII-a pentru capitolele I, II şi VI, clasa a VIII-a pentru capitolele I, II, V şi VI, clasa a XI-a pentru capitolele I, II, III, V şi VI, clasa a X-a pentru toate capitolele.

Pentru studiul geometriei euclidiene se pot folosi mai multe modele: sintetic, analitic, vectorial, complex. Fiecare din aceste modele se dovedeşte a fi mai eficient într-un anumit tip de probleme. De aceea este util să le cunoaştem pe toate şi să avem posibilitatea de a trece cu uşurinţă de la un model la altul, în funcţie de problemă.

Rezultatele şi cunoştinţele necesare pentru înţelegerea fiecărui capitol sunt sintetizate la începutul lui.

O recomandare deosebită o facem pentru capitolul VI, Geometrie combinatorică, care conţine probleme neclasice de geometrie, probleme care îmbină cunoştinţe din mai multe ramuri ale matematicii şi care sunt tot mai des folosite în concursuri.

Mircea Ivan

NICUŞOR MINCULETE, Teoreme şi probleme specifice de geometrie, Editura EUROCARPATICA, Sf. Gheorghe, 2007

Autorul prezentei lucrări este un binecunoscut colaborator al Gazetei Matematice.

Aşa cum menţionează autorul, această culegere doreşte să promoveze geometria sintetică, în speranţa că aceasta îşi va recăpăta locul bine meritat în cadrul programelor şcolare.

Capitolele 1-4 (anume: 1. Coliniaritate, concurenţă şi conciclicitate; 2. Teoreme şi probleme legate de cerc; 3. Teoreme şi probleme duale; 4. Probleme şi teoreme diverse) sunt dedicate unor teoreme remarcabile ale geometriei plane, în timp ce capitolele 5 şi 6 (5. Calcul vectorial şi determinarea unor distanţe; 6. Aspecte metodice în stabilirea unor relaţii metrice) au drept scop evidenţierea importanţei calculului vectorial în rezolvarea unor probleme.

Ultimele patru capitole (7. Egalităţi şi inegalităţi geometrice în care apar coordonatele normale ale unui punct; 8. Egalităţi şi inegalităţi geometrice în tetraedru; 9. Inegalităţi geometrice combinate; 10. Inegalităţi geometrice alese) sunt dedicate inegalităţilor.

În finalul cărţii se găseşte o foarte utilă anexă, care cuprinde o listă de 405 inegalităţi remarcabile.

La unele teoreme sunt prezentate mai multe demonstraţii, subliniindu-se astfel consistenţa rezultatului, precum şi diverse unghiuri din care poate fi privită problemă.

Lucrarea este utilă pentru organizatorii cercurilor de matematică, celor care se pregătesc în vederea participării la olimpiadele şcolare de matematică, precum şi profesorilor care işi pregătesc lucrarea pentru obţinerea gradului didactic 1.

Recomandăm prezenta lucrare cu multă căldură tuturor pasionaţilor de geometrie, menţionând în final claritatea expunerii, precum şi condiţiile editoriale deosebite.

Radu Miculescu

POŞTA REDACŢIEI

Nicuşor Minculete – Universitatea Creştină Dimitrie Cantemir din Braşov. Am primit problema propusă; de asemenea şi ultima variantă a articolului „O nouă demonstraţie a inegalităţii lui Erdös - Mordell şi extinderea ei". Colegiul Redacţional va decide asupra oportunităţii publicării acestor materiale.

Dan Plăeşu – str. Gării, nr. 10, bl. L 21, et. IV, ap. 9, Iaşi. Materialul dumneavoastră intitulat „Vindem cărţi de specalitate la kilogram" se află în atenţia Colegiului Redacţional care va analiza posibilitatea publicării lui.

Vasile Ţugulea – Bârlad. Materialul cu titlul „Despre Societatea de Ştiinţe Matematice din România" va face obiectul analizei Colegiului Redacţional care va decide asupra oportunităţii publicării lui.

Liliana Crăciun, **Ioana Totolici** – Liceul Teoretic Nichita Stănescu din Ploieşti. Articolul dumneavoastră intitulat „Demonstrarea unor inegalităţi cu ajutorul generalizării inegalităţii lui Cauchy la matrici" se află în atenţia Colegiului Redacţional care va hotărî asupra oportunităţii publicării lui.

Gabriel Dospinescu – École Normale Supérieure, Paris, **Marian Tetiva** – Colegiul Naţional Gheorghe Roşca Codreanu din Bârlad. Nota matematică cu titlul „How many disjoint subsets wits a given sum of elements can $\{1, \ldots, n\}$ have?" va fi supusă atenţiei Colegiului Redacţional care va decide în ce măsură materialul este publicabil.

Gheorghe Budianu – Catedra de Matematică II, Universitatea Politehnica din Bucureşti. Am primit articolul dumneavoastră cu titlul „Kronecker type limits". Colegiul Redacţional va hotărî asupra oportunităţii publicării lui.

Mărioara Costăchescu – Liceul cu program sportiv din Roman. Materialul cu titlul „Pagini din istoria matematicii româneşti" se află în atenţia Colegiului Redacţional care va decide în ce măsură este publicabil.

Adrian Reisner – Centrul de calcul E. N. S. T., Paris. Am primit cele două articole expediate de dumneavoastră: „Inele întregi în corpurile numerelor pătratice imaginare" şi „Biliard eliptic". Le vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Gheorghe Szöllösy – str. Avram Iancu, nr. 28 E, Sighetu Marmaţiei. Problema expediată de dumneavoastră va fi publicată într-unul din numerele viitoare ale revistei.

Neculai Stanciu – Grupul şcolar tehnic Sf. Mucenic Sava, Berca, jud. Buzău. Am primit articolul dumneavoastră: „Despre şirul lui Fibonacci". Îl vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Mihály Bencze – Strada Hărmanului, nr. 6, 505600 Săcele. Colegiul Redacţional va studia oportunitatea publicării problemei propuse de dumneavoastră. .

Nathaniel Hall, **Bogdan Suceavă**, **Kim Uyen Truong** – Departament of Mathematics, California State University, Fullerton, CA 92834 – 6850, U. S. A. Am primit articolul dumneavoastră intitulat „Angle Bisectors in a Triangle. A problem solving Approach". Îl vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Dan Radu

ERATĂ

1. În G.M.-A nr. **4**/2007, s-au strecurat următoarele erori:

1) La pag. 268, rândul 8 de jos, în loc de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{n_{n+1}-b_n}$, se va citi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$;

2) La pag. 269, rândul 4 de jos, în loc de $\left|\dfrac{a_n-a_n}{b_n-b_n}-l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{|b_n|}{|b_n-b+m|}$, se va citi $\left|\dfrac{a_n-a_n}{b_n-b_n}-l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{|b_n|}{|b_n-b_n|}$;

3) La pag. 270, rândul 1 de sus, în loc de $\dfrac{|b_n|}{|b_n-b+m|}$, se va citi $\dfrac{|b_n|}{|b_n-b_n|}$;

4) La pag. 271, rândul 6 de jos, în loc de $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, se va citi $\dfrac{a_{n+1}+a_n}{b_{n+1}+b_n}$;

5) La pag. 272, rândul 3 de jos, în loc de $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l\in\mathbb{R}$, se va citi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{||a_{n+1}-a_n-l(b_{n+1}-b_n)||}{||b_{n+1}-b_n||}=0$, $l\in K$;

6) La pag. 272, rândul 1 de jos, în loc de $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$, se va citi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{||a_n-lb_n||}{||b_n||}=0$;

7) La pag. 272, rândul 15 de jos se va citi $||a_{n+1}-a_n-l(b_{n+1}-b_n)||<$ $<\dfrac{\varepsilon}{2M}||b_{n+1}-b_n||$;

8) La pag. 275, rândurile 7 şi 8 de jos, în loc de $\sum\limits_{i=1}^{n-1}||b_{i+1}-b_i||$, se va citi $\sum\limits_{i=1}^{n+p-1}||b_{i+1}-b_i||$;

9) La pag. 275, rândul 1 de jos, în loc de $||a_n-lb_p||\cdot||b_n^{-1}||$, se va citi $||a_n-lb_n||\cdot||b_n^{-1}||$;

10) La pag. 277, rândul 4 de sus, în loc de $((||b_n||+||b_{n+1}||)\cdot||b_{n+1}-b_n||)_{n\geq1}$, se va citi $\left((||b_n||+||b_{n+1}||)\cdot||\,(b_{n+1}-b_n)^{-1}\,||\right)_{n\geq1}$.

11) La pag. 283, trebuia cules textul „va urma".

12) La pag. 283, rândul 3 de jos, în loc de „$19\in M$", se va citi „$19\notin M$".

13) La pag. 287, rândul 10 de jos, în loc de $i\neq\mathbb{R}$ se va citi $i\notin\mathbb{R}$.

14) La pag. 288, rândul 18 de jos, în loc de $g=\sum\limits_i b_iX^I$, se va citi $g=\sum\limits_i b_iX^i$.

15) La pag. 288, rândul 17 de jos, în loc de $f+g=f=\sum\limits_i(a_i+b_i)X^I$, se va citi $f+g=\sum\limits_i(a_i+b_i)X^i$.

16) La pag. 288, rândul 15 de jos, în loc de $fg=\sum\limits_{I,j}a_ib_iX^{i+j}=\sum\limits_k c_kX^{I_k}$, se va citi $fg=\sum\limits_{i,j}a_ib_jX^{i+j}=\sum\limits_k c_kX^k$.

17) La pag. 288, rândul 5 de jos, în loc de „nedeterminat", se va citi „nedeterminata".

18) La pag. 288, rândul 1 de jos, în loc de $f\,(a_0,a_i,a_2,\ldots,a_n,0,0,0,\ldots)$, se va citi $f=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,0,\ldots)$.

19) La pag. 289, rândul 4 de sus, în loc de f_g, se va citi fg.

20) La pag. 289, rândul 8 de sus, în loc de $f\,(a_0,a_i,a_2,\ldots,a_n,0,0,0,\ldots)$, se va citi $f\,(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,0,0,0,\ldots)$.

21) La pag. 289, rândul 5 de jos, în loc de „descrierii", se va citi „scrierii".

22) În tot textul articolului „Croşetul Lie al două matrici" (pp. 297-308), în loc de „S$_p$", se va citi „S_p" (subspaţiul generat de …).

23) La pag. 326, rândul 7 de jos, în loc de „Mihai", se va citi „Marian".

24) La pag. 345, rândul 1 de sus, în loc de „POPA" se va citi „POP".

25) La pag. 345, rândul 10 de jos, în loc de „Gh. Militaru", se va citi „Gigel Militaru".

26) La pag. 348, rândul 1 de sus, în loc de „16", se va citi „15".

Redacţia