GAZETA MATEMATICĂ
SERIA A
REVISTĂ DE CULTURĂ MATEMATICĂ

ANUL XXVI(CV) **Nr. 4 / 2008**

Margini pentru rădăcinile polinoamelor cu coeficienţii complecşi

DE DORU ŞTEFĂNESCU

Abstract

The computation of the roots of a polynomial is one of the oldest problems in Mathematics and it is basic for many mathematical domains. It is known through Field Theory that the solution by radicals of polynomial equations is not generally possible. On the other hand the numerical solution is an valuable computational approach.

We shall present some results on bounds for the absolute values of univariate polynomials over the filed $\mathbb{C}$ of complex numbers. The knowledge of such bounds is an important step for the localization of the roots and — implicitely — for their aproximation with a preestablished precision.

Key words and phrases: Polynomial roots, Numerical solution.
M.S.C.: 30C15, 26C10,12D10.

Introducere

Una dintre principalele probleme care se pun în legătură cu polinoamele într–o variabilă (nedeterminată) o constituie găsirea rădăcinilor lor. Deoarece calcularea exactă a rădăcinilor unui polinom cu coeficienţi reali sau complecşi nu este posibilă decât pentru polinoame particulare este necesar să avem metode de aproximare a acestor rădăcini. În acest context determinarea intervalelor sau domeniilor în care se găsesc rădăcinile unui polinom cu coeficienţi reali sau complecşi permite elaborarea unor metode algoritmice de estimare a acestor rădăcini. O primă etapă constă în găsirea unor margini (superioare şi inferioare) ale valorilor absolute ale rădăcinilor. Vom descrie câteva astfel de margini superioare şi vom compara eficienţa rezultatelor. Prin considerea polinomului reciproc se pot deduce ulterior şi margini inferioare.

Studiile privind rezolvarea numerică a ecuaţiilor algebrice au fost iniţiate de Newton, Lagrange, Cauchy şi alţi titani. Galois însuşi a scris şi el un memoriu despre rezolvarea numerică a ecuaţiilor algebrice.

Calcularea numerică a rădăcinilor reale, de exemplu, are drept etapă preliminară *izolarea rădăcinilor*, adică calcularea unui număr finit de intervale astfel încât fiecare interval să conţină o rădăcină iar fiecare rădăcină să fie conţinută într–un interval.

1. Marginea lui Cauchy

Matematicianul francez *Augustin-Louis Cauchy* a publicat în anul 1822 un criteriu simplu care permite estimarea marginilor modulelor rădăcinilor polinoamelor cu coeficienţi în corpul numerelor complexe.

Teorema 1. *Fie ρ unica rădăcină pozitivă a polinomului*

$$F(X) = X^n - |a_1|X^{n-1} - \cdots - |a_n|\,,\ \textit{unde}\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Atunci toate rădăcinile polinomului $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ se găsesc în discul $\{|z| \le \rho\}$.

Demonstraţie. În primul rând să observăm că polinomul

$$F(X) = X^n - |a_1|X^{n-1} - \cdots - |a_{n-1}|X - |a_n|$$

are într-adevăr o singură rădăcină reală pozitivă, având toţi coeficienţii reali şi o singură schimbare de semn (regula lui Descartes a semnelor).

Considerăm $z \in \mathbb{C}$, $|z| > \rho$. Avem

$$|P(z)| \ \ge\ |z|^n - \big(|a_1| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}| \cdot |z| + |a_n|\big) \ =\ F(|z|)\ >\ 0\,,$$

aşadar $P(z) \neq 0$.

Utilizarea Metodei lui Cauchy

Procedeul lui Cauchy descris în Teorema 1 permite obţinerea unor expresii simple pentru marginea superioară a modulelor rădăcinilor în funcţie de talia coeficienţilor polinomului P. Prezentăm câteva aplicaţii ale acestui rezultat la determinarea unor margini ale radacinilor unui polinom cu coeficienţii complecşi. O primă aplicaţie este următorul rezultat obţinut chiar de *A.-L. Cauchy*:

Corolarul 2. [Cauchy, 1822]. *Numărul $1 + M$, unde $M = \max_{i=1}^{n} |a_i|$, este o margine superioară a modulelor rădăcinilor polinomului $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[x]$.*

Demonstraţie. Cu notaţiile din Teorema 1 avem

$$F(1 + M) = (1 + M)^n - \big(|a_1|(1 + M)^{n-1} + \cdots + |a_n|\big) \ge$$

$$\ge (1 + M)^n - M\left((1 + M)^{n-1} + \cdots + 1\right) = (1 + M)^n - M \cdot \frac{(1 + M)^n - 1}{1 + M - 1} = 1 > 0.$$

Prin urmare $1 + M > \rho$, deci $1 + M$ este o margine superioară a valorilor absolute ale rădăcinilor polinomului P. □

Exemplul 1. Să considerăm polinomul $P(X) = X^5 - 2X^4 - 2X^3 - X^2 + X - 2$. Conform rezultatului precedent se obţine marginea superioară $1 + \max\{2, 1\} = 3$.

Propoziţia 3. *Numărul $M = 2\max_{s=1}^{n} |a_s|^{1/s}$ este o margine superioară modulelor rădăcinilor polinomului P.*

Demonstraţie. Deoarece $|a_s| \le (M/2)^s$ se obţine

$$|a_i| \cdot M^{n-i}\ \le\ \frac{M^n}{2^i}\,,$$

aşadar

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot M^{n-i} \le M^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = M^n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Cu notaţiile din teorema 1 avem

$$F(M) = M^n - \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot M^{n-i} \ge M^n - M^n \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{M}{2}\right)^n > 0,$$

prin urmare M este o margine superioară a modulelor rădăcinilor.

Exemplul 2. Considerând tot polinomul

$$P(X) = X^5 - 2X^4 - 2X^3 - X^2 + X - 2.$$

se obţine marginea superioră $2 \cdot \max\{2, 1\} = 4$.

Teorema 4 [Fujiwara]. *Fie $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$ un polinom neconstant cu coeficienţii numere complexe şi fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ astfel încât*

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} \le 1.$$

Atunci numărul

$$\max_{i=1}^{n} (\lambda_i |a_i|)^{1/i}$$

este o margine superioară a modulelor rădăcinilor polinomului P.

Demonstraţie. Să punem $M = \max_{i=1}^{n} (\lambda_i |a_i|)^{1/i}$. Avem $|a_i| \le \dfrac{M^i}{\lambda_i}$ pentru toţi i, deci

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| M^{n-i} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{M^i}{\lambda_i} \cdot M^{n-i} \le M^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}.$$

Prin urmare

$$F(M) \ge M^n - M^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} = M^n \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\right) > 0,$$

ceea ce demonstrează teorema.

O altă aplicaţie a Teoremei 1 este

Prropoziţia 5. *Fie $\alpha > 0$, $|a_1| \le \alpha$. Atunci*

$$\alpha + \max_{i=2}^{n} \left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^{\frac{1}{i-1}}$$

este o margine superioară a modulelor rădăcinilor.

Demonstraţie. Considerând $M = \alpha + \max_{i=1}^{n} \left|\dfrac{a_i}{\alpha}\right|^{1/i}$, avem

$$|a_i| \le \alpha (M - \alpha)^{i-1}.$$

Prin urmare

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|\, M^{n-i} \le \alpha \sum_{i=1}^{n} (M-\alpha)^{i-1} M^{n-i} = \frac{\alpha\, M^n}{M-\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{M-\alpha}{M}\right)^i <$$

$$< \frac{\alpha\, M^n}{M-\alpha} \cdot \frac{M-\alpha}{M} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{M-\alpha}{M}} = \alpha\, M^{n-1} \cdot \frac{M}{\alpha} = M^n\,.$$

Prin urmare

$$F(M) \,\ge\, M^n - M^n \,=\, 0\,.$$

□

Observaţie. În particular, dacă $a_1 = 0$ atunci numărul α din Propoziţia 5 poate fi orice număr real pozitiv.

Exemplul 3. Considerăm polinomul

$$P(X) \,=\, X^9 - 2X^8 + X^6 - 4X^4 + X - 1\,.$$

Avem $a_1 = 2$, deci putem alege orice număr $a \ge 2$. Se obţine

$$\max_{2\le i\le 9} \left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^{1/(i-1)} = \max\left\{\frac{1}{a}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/2}, \left(\frac{4}{a}\right)^{1/4}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/7}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/8}\right\} = \left(\frac{4}{a}\right)^{1/4}.$$

Aşadar alte margini superioare sunt date de

$$M(a) \,=\, a + \left(\frac{4}{a}\right)^{1/4} \quad \text{pentru orice} \quad a \ge 2\,.$$

Alegând $a = 2$ se obţine marginea superioară

$$M(2) \,=\, 3.414\,.$$

De fapt, adevărata margine superioară a modulelor rădăcinilor este 1.997.

2. Marginea $R + \rho$

J.-L. Lagrange a enunţat un alt rezultat privind marginile rădăcinilor unui polinom cu coeficienţii reali (v. [4]. Îl reformulăm pentru cazul mai general al polinoamelor cu coeficienţii complecşi şi dăm o demonstraţie bazată tot pe Teorema 4 a lui *Fujiwara.*

Teorema 4 [Marginea $R+\rho$]. *Fie $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ numere complexe. Dacă $R = |a_j|^{1/j} \ge |a_i|^{1/i} = \rho \ge |a_k|^{1/k}$ pentru toţi $k \ne i,\, j$, atunci numărul $R+\rho$ este o margine superioară a valorilor absolute ale rădăcinilor polinomului*

$$F(X) \,=\, X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n\,.$$

Demonstraţie. După Teorema 2 a lui *Cauchy* este suficient să arătăm că unica rădăcină reală a polinomului

$$G(X) \,=\, X^n - |a_1|X^{n-1} - \cdots - |a_{n-1}|X - |a_n|$$

este mai mică decât $R+\rho$.

Avem $R=|a_j|^{1/j}\geq |a_i|^{1/i}=\rho\geq |a_k|^{1/k}$ pentru toţi $k\neq i,j$. Căutăm acum $\lambda_1,\ldots,\lambda_n>0$ astfel încât

$$\lambda_k|a_k|\ \leq\ (R+\rho)^k\quad \text{pentru toţi}\quad k=1,2,\ldots,n\,.$$

Ar fi suficient să fie satisfăcute inegalităţile

$$\lambda_k\,\rho^k\ \leq\ (R+\rho)^k\quad \text{pentru toţi}\quad k\neq j$$

şi

$$\lambda_j\,R^j\ \leq\ (R+\rho)^j\,.$$

Alegem atunci

$$\lambda_j\ =\ \left(\frac{R+\rho}{R}\right)^j,\quad \lambda_k\ =\ \left(\frac{R+\rho}{\rho}\right)^k\quad \text{pentru}\quad k\neq j\quad (1\leq k\leq n),$$

de unde

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}=\sum_{k\neq j}\frac{1}{\lambda_k}+\frac{1}{\lambda_j}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\left(\frac{\rho}{R+\rho}\right)^k+\left(\frac{R}{R+\rho}\right)^j=$$

$$=\frac{\rho}{R}\left(1-\left(\frac{\rho}{R+\rho}\right)^n\right)+\frac{R^j-\rho^j}{(R+\rho)^j}\ =\ \frac{\rho}{R}+\frac{R^j-\rho^j}{(R+\rho)^j}-\frac{\rho^{n+1}}{R(R+\rho)^n}\,.$$

Considerăm acum $y=\dfrac{R}{\rho}$. Se observă că $y\geq 1$ şi

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{R}+\frac{R^j-\rho^j}{(R+\rho)^j}-\frac{\rho^{n+1}}{R(R+\rho)^n}\quad &=\quad \frac{1}{y}+\frac{y^j-1}{(y+1)^j}-\frac{1}{y(y+1)^n}\\ &=\quad \frac{(y+1)^n+y(y^j-1)(y+1)^{n-j}-1}{y(y+1)^n}\,.\end{aligned}$$

Membrul drept al ultimei inegalităţi este subunitar dacă şi numai dacă

$$g(y)\ =\ y(y+1)^n-(y+1)^n-y(y^j-1)(y+1)^{n-j}+1\ \geq\ 0\,.$$

Avem

$$g(y)\ =\ (y+1)^{n-j}\cdot h(y)+1\,,$$

unde $h(y)=(y-1)(y+1)^j-y(y^j-1)$. Este suficient să avem $h(y)\geq 0$ pentru toţi $y\geq 1$.

Într–adevăr,

$$\frac{h(y)}{y-1}>y^j+\left(\binom{j}{1}-1\right)y^{j-1}+\left(\binom{j}{2}-1\right)y^{j-2}+\cdots+\left(\binom{j}{j-1}-1\right)y+1\geq 0$$

deoarece toate parantezele de pe ultima linie sunt pozitive. De aici avem $h(y) \geq 0$ pentru toţi $y \geq 1$.

Prin urmare $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \leq 1$. După Teorema 4 numărul $R+\rho$ este o margine superioară a modulelor rădăcinilor lui F. $\square$

3. Margini Inferioare

Cunoaşterea unei margini superioare pentru modulele rădăcinilor unui polinom permite calcularea imediată a unor margini inferioare. Aceasta reiese din următorul rezultat.

Propoziţia 7. *Fie* $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[X]$ *iar* $P^*(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ *polinomul să reciproc. Dacă numărul* $K > 0$ *este o margine superioară a valorilor absolute ale rădăcinilor polinomului* P^**, atunci numărul* $\frac{1}{K}$ *este o margine inferioară a valorilor absolute ale rădăcinilor polinomului* P.

Demonstraţie. Este suficient să observăm că are loc relaţia

$$P^*(X) = X^n \cdot P\left(\frac{1}{X}\right).$$

$\square$

Exemplul 4. Fie $P(X) = X^7 - X^6 + 2X^4 - 2X^3 + X + 1$. Polinomul reciproc este $P^*(X) = X^7 + X^6 - 2X^4 + 2X^3 - X + 1$. Conform Teoremei 6 o margine superioară a modulelor rădăcinilor este

$$K = R + \rho = \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} \approx 2.449$$

Prin urmare o margine inferioară a modulelor rădăcinilor polinomului P este $m = 0.408$.

4. Aplicaţii

Găsirea unor limite pentru modulele rădăcinilor polinoamelor cu coeficienţi reali sau complecşi nu rezolvă imediat problema localizării rădăcinilor unor astfel de polinoame. În aplicaţii suntem interesaţi să găsim margini cât mai apropiate de acealea adevărate. De asemenea, sunt de preferat procedeele care conduc la calcule ce pot fi duse la capăt în timp real – de preferat chiar cu creionul şi hârtia. Cum calculatoarele electronice de astăzi pot efectua în câteva minute – dacă nu secunde – un volum uriaş de calcule, considerăm drept eficiente şi acele procedee care permit obţinerea rezultatelor doar cu ajutorul calculatoarelor.

Exemplul 5. Fie $P(X) = X^5 - 2X^4 + 2X^2 + X - 2 \in \mathbb{C}[X]$. Atunci $M = 2$ şi după Teorema 2 obţinem marginea superioară $1 + M = 3$. În schimb, Propoziţia 3 şi Teorema 6 ne dau marginea 4.

Exemplul 6. Să considerăm polinomul

$$P(X) = X^5 + 4X^3 + 100X + 99.$$

Teorema 2 a lui *Cauchy* conduce la marginea superioară

$$M_1 = 1 + \max\{4, 100, 99\} = 1 + 100 = 101.$$

Utilizând Propoziţia 3 se obţine

$$M_2 \;=\; 2\cdot\max\{4^{1/2}, 100^{1/4}, 99^{1/5}\} \;=\; 2\cdot 3.163 \;=\; 6.326\,.$$

Exemplul 7. Să considerăm polinomul

$$P(X) \;=\; X^{11} - 2X^{10} + X^9 - 2X^8 - 8X^4 + X - 1\,.$$

Cu notaţiile din Teorema 6 avem

$$R = 2 \quad \text{şi} \quad \rho \approx 1.346\,.$$

De asemenea

$$1 + \max\{|a_i|\,;1 \le i \le 11\} \;=\; 1 + 8 = 9$$

Se obţin următoarele margini superioare:

9	Teorema 2
4	Propoziţia 3
3.346	Teorema 6

Alte margini superioare pentru valorile absolute ale rădăcinilor se pot obţine folosind Propoziţia 5. În cazul polinomului P avem $a_1 = 2$, deci putem alege orice număr $a \ge 2$. Se obţine

$$\max_{2\le i\le 11}\left|\frac{a_i}{\alpha}\right|^{1/(i-1)} \;=\; \max\left\{\frac{1}{a}, \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2}, \left(\frac{8}{a}\right)^{1/6}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/9}, \left(\frac{1}{a}\right)^{1/10}\right\} \;=\; \left(\frac{8}{a}\right)^{1/6}.$$

Aşadar alte margini superioare sunt date de

$$M(a) \;=\; a + \left(\frac{8}{a}\right)^{1/6} \qquad \text{pentru orice} \quad a \ge 2\,.$$

Funcţia $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + (8/x)^{1/6}$ fiind crescătoare cea mai bună margine obţinută prin Propoziţia 5 este

$$M(2) \;=\; 3.259\,.$$

Prin urmare, Teorema 6 şi Propoziţia 5 dau cele mai bune margini pentru polinomul P.

Prin utilizarea unui pachet de programe performant, cum este, de exemplu, `gp-pari` (v. [8]), se constată că modulul maxim al unei rădăcini este 2.079 .

Concluzii

Marginile valorilor absolute ale rădăcinilor polinoamelor intr-o nedeterminată cu coeficienţii numere complexe pot fi calculate în funcţie de grad şi coeficienţi prin metode simple. Printre cele mai eficiente sunt marginea $R + \rho$ a lui *Lagrange* şi marginile lui *Fujiwara*. Cunoaşterea acestor margini reprezintă un pas important pentru calcularea rădăcinilor ecuaţiilor algebrice.

Bibliografie

[1] A.-L. Cauchy, *Exercices de Mathématiques*, t. 4, Paris (1829).

[2] L. Panaitopol, I. C. Drăghicescu, *Polinoame şi ecuaţii algebrice*, Editura Albatros (1980).

[3] M. Fujiwara, *Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung*, Tôhoku Math. J., **10**, 167–171 (1916).

[4] J.-L. Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques*, Paris (1798). (Reprinted in *Œuvres*, t. VIII, Gauthier–Villars, Paris (1879).)

[5] M. Mignotte, D. Ştefănescu, *Polynomials – An algorithmic approach*, Springer Verlag (1999).

[6] M. Mignotte, Computer Algebra – O introducere în algebra computaţională, Editura Universităţii din Bucuresşti (2000).

[7] D. Ştefănescu, *Inequalities on polynomial roots*, Math. Ineqs. Appl., **5**, 335–347 (2002).

[8] `gp-pari`, http://pari.math.u-bordeaux.fr/downloads.

Universitatea din Bucureşti
E-mail: stef@rms.unibuc.ro

JOCUL CU NUMERE ŞI AXIOME: SISTEME PEANO-DEDEKIND

de **A. L. Agore** şi **G. Militaru**

Abstract

The set of non negative integers is defined by using the Peano axioms and a detailed proof of the Hilbert recursion theorem is given, giving thus the universality (and as a consequence the unicity) of the Peano-Dedekind systems.
We consider as new the proof of the converse of Hilbert theorem without using the axiom of infinity from Zermelo-Frankel system.

Key words: natural numbers, Peano axiom, Hilbert recursion theorem.
M.S.C.: 03E30, 03E75.

Ce este un număr natural? De ce $1 + 1 = 2$? Sunt întrebări pe care şi le pun probabil unii copii când iau pentru prima dată contact cu matematica elementară. Ceva mai târziu unii dintre aceştia, atraşi de matematică, probabil că se vor întreaba din nou, de data asta mai nuanţat: $1 + 1 = 2$ este o axiomă? Este o teoremă? Se poate demostra că $1 + 1 = 2$? Vom încerca în acest articol să elucidăm câteva dintre aceste „mistere“ ale mereu fascinantelor numere naturale.

Construcţia axiomatică a numerelor naturale a fost dată pentru prima dată riguros de *Giuseppe Peano* în 1889 în faimoasa lucrare *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. În această lucrare au fost definite ceea ce mai târziu s-au numit sistemele *Peano*: alţi istorici ai matematicii le denumesc sisteme *Peano-Dedekind* (aşa cum le vom numi şi noi în prezenta lucrare) pentru a marca şi contribuţia lui *Dedekind* la această construcţie fundamentală a matematicii. În mod neaşteptat teorema fundamentală a sistemelor *Peano-Dedekind* (aşa numita „*recursion theorem*") a fost demonstrată mult mai târziu: primii care au demonstrat-o au fost *Hilbert* şi *Bernays* în cartea lor „Grundlangen der Mathematik" şi independent de *P. Lorenzen* în 1938. Este teorema 1 de mai jos, aşa cum a fost demonstrată de *Hilbert* şi *Bernays* şi pe care o reproducem pentru a o face cunoscută cât mai multor elevi şi profesori ce îndrăgesc matematica pentru că este una dintre cele mai frumoase demostraţii din matematica elementară. O consecinţă, printre altele, a acestei teoreme este unicitatea până la un izomorfism a sistemelor *Peano-Dedekind* dar şi existenţa şi unicitatea adunării şi înmulţirii numerelor naturale. Teorema 2 de mai jos este o reciprocă a acestei teoreme şi are o demonstraţie foarte elementară şi nouă fără a folosi axioma infinitului. Aceste două teoreme împreună permit cea mai elegantă şi rapidă definiţie a numerelor naturale: ele sunt obiecte iniţiale în „clasa" tuturor tripletelor (A, a, λ) formate dintr-o mulţime nevidă A, un element $a \in A$ şi o funcţie $\lambda : A \to A$ (pentru detalii recomandăm un recent şi excelent articol [5]). În anul 1908 *Ernst Zermelo* a propus primul set de axiome care fundamentează teoria mulţimilor: ele au fost completate ulterior de *Abraham Fraenkel* în 1922: sunt cele zece celebre axiome numite axiomele *Zermelo-Fraenkel* care constitutie fundamentul matematicii. Pot fi găsite, de exemplu în citeB, pag. 103. Una dintre aceste axiome este aşa numita axiomă a infinitului: din ea se construiesc uşor numerele naturale şi în fapt toate axiomele *Peano* se deduc din trei din axiomele *Zermelor-Fraenkel*. În final, vom demonstra pe scurt teorema care construieşte în mod unic adunarea numerelor naturale şi vom arăta că $1 + 1 = 2$ este de fapt o teoremă, răspunzând în felul acesta întrebării din introducere.

În cele ce urmează vom lucra cu noţiunea de funcţie aşa cum a fost definită de *Kuratowski* în 1914: se numeşte *funcţie* un triplet (A, B, f), unde A şi B sunt două mulţimi $f \subseteq A \times B$ este o submulţime cu proprietatea:

$$\forall\, a \in A\ \exists! b \in B \quad \text{astfel încât} \quad (a, b) \in f.$$

Dacă $(a, b) \in f$ vom nota acest lucru cu $f(a) = b$, iar funcţia (A, B, f) o vom nota ca de obicei cu $f : A \to B$.

Sisteme Peano-Dedekind

Vom introduce acum cele trei axiome care definesc sistemele Peano-Dedekind aşa cum au fost date de *Peano* în 1889.

Definiţie. *Se numeşte sistem Peano-Dedekind un triplet $(N, 0, s)$, unde N este o mulţime nevidă, $0 \in N$ şi $s : N \to N$ este o funcţie astfel încât:*

$(P1)$: $s(x) \neq 0,\ \forall\, x \in N$

$(P2)$: s este o funcţie injectivă.

$(P3)$: *Dacă $P \subseteq N$ astfel încât $0 \in P$ şi pentru orice $x \in P$ avem că $s(x) \in P$ atunci $P = N$.*

Observaţie. Dacă $(N, 0, s)$ este sistem *Peano-Dedekind* atunci folosind axioma $(P3)$ pentru $P := \{0\} \cup \mathrm{Im}(s)$ obţinem imediat că $N = \{0\} \cup \mathrm{Im}(s)$, deci:

$$\forall\, y \in N,\ y \neq 0,\ \exists! x \in N \quad \text{astfel încât} \quad y = s(x).$$

Teorema următoare este teorema fundamentală a sistemelor *Peano-Dedekind*; ea este cunoscută sub numele de *recursion theorem* şi a fost demonstrată de *D. Hilbert* şi *P. Bernays* şi independent de *P. Lorenzen* ([3], [4]). Vom prezenta demonstraţia în detaliu pentru a arăta că toate cele trei axiome ce definesc sistemele *Peano-Dedekind* sunt utilizate în cursul demonstraţiei: în special condiţia ($P2$) care apare într-un singur loc, extrem de bine ascuns. De exemplu în [4] sau în [2] utilizarea aximei ($P2$) nu este explicit evidenţiată.

Teorema 1. *Fie $(N, 0, s)$ un triplet Peano-Dedekind. Atunci pentru orice triplet (A, a, λ) format dintr-o mulţime nevidă A, un elment $a \in A$ şi o funcţie $\lambda : A \to A$, există şi este unică o funcţie $f : N \to A$ astfel încât $f(0) = a$ şi $f \circ s = \lambda \circ f$.*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\exists! f"] \arrow[d, "s"'] & A \arrow[d, "\forall\lambda"] \\ N \arrow[r, "\exists! f"'] & A \end{tikzcd}$$

În particular, orice două sisteme Peano-Dedekind sunt izomorfe: i.e. dacă $(N, 0, s)$ şi $(N', 0', s')$ sunt sisteme Peano-Dedekind atunci $\exists! f : N \to N'$ o funcţie bijectiva astfel încât $f(0) = 0'$ şi $f \circ s = s' \circ f$.

Demonstraţie. Fie (A, a, λ) un triplet, unde A este o mulţime nevidă, a un element din A şi $\lambda : A \to A$ o functie. Fie Γ mulţimea tuturor submulţimilor U ale lui $N \times A$ care satisfac simultan următoarele două condiţii:

i. $(0, a) \in U$;

ii. dacă $(n, b) \in U$ atunci $(s(n), \lambda(b)) \in U$.

$\Gamma \neq \emptyset$, deoarece $N \times A \in \Gamma$. Fie $f := \bigcap\limits_{\mathrm{U} \in \Gamma} \mathrm{U} \subseteq N \times A$. Vom arăta mai întâi că f este o funcţie. Pentru aceasta avem de arătat două condiţii:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x \in A$ astfel încât $(n, x) \in f$;

b) dacă $(n, x) \in f$ şi $(n, x') \in f \Rightarrow x = x'$.

Să arătăm mai întâi prima condiţie. Vom folosi axioma ($P3$) pentru: $P := \{\exists x \in A \text{ astfel încât } (n, x) \in f\}$. Evident $0 \in P$ căci $(0, a) \in f$. Fie acum $p \in P$. Atunci $\exists x \in A$ astfel încât $(p, x) \in f$. Cum $f \in \Gamma$ obţinem că $(s(p), \lambda(x)) \in f$ şi deci $s(p) \in P$. Din ($P3$) obţinem că $P = N$, adică a) are loc.

Să arătăm acum b). Fie $P := \{(n, x) \in f,\ (n, x') \in f \Rightarrow x = x'\}$. Vom arăta că P verifică ($P3$) folosind toate cele trei condiţii din axiomele *Peano*. Să arătăm că $0 \in P$. Cum $(0, a) \in f$ este suficient să arătăm că: $(0, a') \in f \Rightarrow a' = a$. Presupunem prin absurd că $a \neq a'$ şi $(0, a') \in f$. Fie atunci $f' := f \setminus \{(0, a')\} \subsetneq f$.

Vom arăta că $f' \in \Gamma$. Avem $(0, a) \in f'$ căci $(0, a) \neq (0, a')$. Dacă $(n, b) \in f' \subsetneq f$, cum $f \in \Gamma$ obţinem $(s(n), \lambda(b)) \in f$ şi deci $(s(n), \lambda(b)) \neq (0, a')$ căci $s(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deci $(s(n), \lambda(b)) \in f'$ adică $f' \in \Gamma$. Atunci $f \subseteq f' \subsetneq f$, contradicţie. Deci $0 \in P$. Să arătăm acum că dacă $n \in P$ atunci $s(n) \in P$. Presupunem prin absurd că $\exists n \in P$ astfel încât $s(n) \notin P$. Fie $x \in A$ astfel încât $(n, x) \in f$ (existenţa lui x este asigurată de punctul a)). Atunci, cum $f \in \Gamma$ obţinem $(s(n), \lambda(x)) \in f$. Cum am presupus că $s(n) \notin P$ obţinem că $\exists z \in A$ astfel încât $(s(n), z) \in f$ şi $z \neq \lambda(x)$. Fie $f'' := f \setminus \{s(n), z\} \subsetneq f$. Vom arăta că $f'' \in \Gamma$. Mai întâi $(0, a) \in f''$ căci $(0, a) \in f$ şi $s(n) \neq 0$, $\forall n \in N$ adică $(0, a) \neq (s(n), z)$. Fie $(m, d) \in f''$. Vrem să arătăm că $(s(m), \lambda(d)) \in f''$. Avem două cazuri:

Cazul 1). Dacă $m = n$ avem $(n, d) \in f'' \subsetneq f$ şi $(n, x) \in f$, şi cum $n \in p$ obţinem $d = n$, de unde obţinem $(s(n), \lambda(d)) = (s(n),\ \lambda(x)) \neq (s(n), z)$ căci $z \neq \lambda(x)$ şi deci $(s(n), \lambda(d)) = (s(n),\ \lambda(x)) \in f''$.

Cazul 2). Dacă $m \neq n$ aunci $(s(m), \lambda(d)) \in f$ $(f \in \Gamma)$ şi $(s(m), \lambda(d)) \neq$ $\neq (s(n), z)$ căci $s(m) \neq s(n)$, $\forall m \neq n$ (aici este singurul loc unde se foloseşte injectivitatea lui s). Deci $f'' \in \Gamma$ adică $f \subseteq f' \underset{\neq}{\subset} f$, contradicţie. Deci P verifică $(P3)$ şi atunci $P = N$ adică f este funcţie; $f(0) = a$ este doar o scriere pentru $(0, a) \in f$.

Pentru $(n, b) \in f$ avem $(s(n), \lambda(b)) \in f$ adică dacă $b = f(n) \Rightarrow \lambda(b) = f(s(n))$ sau echivalent $\lambda(f(n)) = f(s(n))$, $\forall n \in N$.

A rămas de arătat unicitatea funcţiei f. Fie $g : N \to A$ o funcţie astfel încât $g(0) = a$ şi $g \circ s = \lambda \circ g$ şi $P := \{g(n) = f(n)\}$. $0 \in P$ căci $g(0) = a = f(0)$. Fie $x \in P$. Atunci:

$$g(s(x)) = \lambda(g(x)) \overset{x \in P}{=} \lambda(f(x)) = f(s(x)) \text{ adic } s(x) \in P.$$

Aplicăm din nou $(P3)$ şi obţinem $P = N$ adică $g = f$ şi deci f este unică.

A rămas de arătat că orice două sisteme *Peano-Dedekind* sunt izomorfe.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, shift left, "\exists! f"] \arrow[d, "s"'] & N' \arrow[l, shift left] \arrow[d, "s'"] \\ N \arrow[r, shift left] \arrow[ur, phantom, "\exists! g \;\; \exists! g"] & N' \arrow[l, shift left, "\exists! g"] \end{tikzcd}$$

Fie $(N, 0, s)$ şi $(N', 0', s')$ două sisteme *Peano-Dedekind*. Aplicând succesiv prima parte a teoremei obţinem:

$$\exists! f : N \to N' \text{ astfel încât } f(0) = 0' \text{ şi } f \circ s = s' \circ f$$

$$\exists! g : N' \to N \text{ astfel încât } g(0') = 0 \text{ şi } g \circ s' = s \circ g.$$

Arătăm că g este inversa lui f:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, shift left, "Id_N"] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "s"'] & N \arrow[d, "s"] \\ N \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right, "Id_n"'] \arrow[ur, phantom, "g \circ f \;\; g \circ f"] & N \end{tikzcd}$$

şi

Avem:

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0') = 0 \qquad (*)$$

$$(g \circ f) \circ s = g \circ s' \circ f = s \circ (g \circ f). \qquad (**)$$

Dar şi Id satisface relaţiile $(*)$ şi $(**)$ şi din unicitate obţinem: $g \circ f = Id$. În mod analog se obţine şi $f \circ g = Id$.

Vom demostra acum reciproca acestei teoreme:

Teorema 2. Fie un triplet $(N, 0, s)$ unde N este o mulţime nevida, $0 \in N$, $s : N \to N$ este o funcţie cu proprietatea că:

$$\begin{array}{c} \forall\, A \textit{ mulţime nevida}, \ \forall\, a \in A \textit{ şi } \forall\, \lambda : A \to A \textit{ o funcţie } \exists! f : N \to A \\ \textit{astfel încât } \ f(0) = a \ \textit{ şi } \ f(s(n)) = \lambda(f(n)), \ \forall\, n \in N. \end{array} \qquad (***)$$

Atunci $(N, 0, s)$ *este sistem Peano-Dedekind.*

Demonstraţie. Aratăm pentru început că $(N, 0, s)$ verifică axioma $(P3)$. Fie $P \subseteq N$ astfel încât $0 \in N$ şi $s(x) \in P$, $\forall\, x \in P$. Fie $i : P \to N$ incluziunea canonică $i(x) = x$. Vom arăta că i este surjectivă şi deci $P = N$.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\exists! f"] \arrow[d, "s_{|I}"'] & P \arrow[d, "s_{|I}"] \\ N \arrow[r, "\exists! f"'] & P \end{tikzcd}$$

Considerăm tripletul $(A, a, \lambda) := (P, 0, s_{|P})$ care are sens întrucât $s(x) \in P$, $\forall\, x \in P$. Obţinem că $\exists! f : N \to P$ astfel încât $f(0) = 0$ şi $f \circ s = s_{|P} \circ f$ adică $f(s(x)) =$ $= s(f(x))$, $\forall\, x \in N$.

Fie funcţia $i \circ f : N \to N$. Arătăm că $i \circ f = Id_N$; va rezulta că i este surjectivă.

Aplicăm din nou $(***)$ pentru $(A, a, \lambda) = (N, 0, s)$.

$$\begin{array}{ccc} & Id_N & \\ N & \longrightarrow & N \\ & i \circ f & \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ & i \circ f & \\ N & \longrightarrow & N \\ & Id_n & \end{array}$$

Cum $Id_N(0) = 0$ şi $Id_N \circ s = s \circ Id_N$ avem că Id_N este unica funcţie ce închide comutativ diagrama. Arătăm că $i \circ f$ are aceleaşi proprietăţi şi deci $i \circ f = Id_N$.

Avem $(i \circ f)(0) = i(f(0)) = i(0) = 0$ şi $((i \circ f) \circ s)(x) = i(f(s(x))) = i(s(f(x))) = s(f(x))$ şi $(s \circ (i \circ f))(x) = s(i(f(x))) = s(f(x))$.

Deci $i \circ f = Id_N$ adică i este surjectivă şi deci $P = N$.

Aratăm acum că $s(x) \neq 0$, $\forall\, x \in N$. Fie $x_0 \in N$ astfel încât $s(x_0) = 0$ şi luăm în $(***)$ $(A, a, \lambda) := (N, x_0, \lambda)$ unde $\lambda : N \to N$, $\lambda(x) := 0$, $\forall\, x \in N$. Obţinem că $\exists! f : N \to N$ astfel încât $f(0) = x_0$ şi $f \circ s = \lambda \circ f$. Deci $f(s(x_0)) = \lambda(f(x_0))$. Obţinem deci că $x_0 = 0$ adică $s(0) = 0$. Fie $P = 0 \subseteq N$. Atunci $0 \in P$ şi dacă $p \in P$ atunci $s(p) \in P$, căci $s(0) = 0 \in P$. Din ce am arătat mai sus obţinem că $P = N$ adică $(N, 0, s) = (0, 0, s)$ îndeplineşte condiţia $(***)$. Fie $A := \{a, b\}$ cu $a \neq b$ (existenţa mulţimii A este asigurată de axioma perechilor) şi tripletul $(\{a, b\}, a, \lambda)$ cu $\lambda : \{a, b\} \to \{a, b\}$, $\lambda(a) = \lambda(b) := b$. Obţinem că $\exists! g : \{0\} \to \{a, b\}$ astfel încât $g(0) = a$ şi $g(s(0)) = \lambda(g(0))$. Deci $g(0) = b \neq a = g(0)$, contradicţie .

A rămas de arătat injectivitatea funcţiei s. Considerăm tripletul $(A, 0, \lambda) := = (N \times N, (0, 0), \lambda)$, unde $\lambda : N \times N \to N \times N$, $\lambda(n, m) := (m, s(m))$. Din $(***)$ obţinem că $\exists! f : N \to N \times N$ astfel încât $f(0) = (0, 0)$ şi $f(s(n)) = \lambda(f(n))$, $\forall\, n \in N$.

Fie $g := \pi_1 \circ f$, $h := \pi_2 \circ f : N \to N$ unde $\pi_1(x, y) := x$, $\pi_2(x, y) := y$, $\pi_1, \pi_2 : N \times N \to N$. Atunci $f(n) = (g(n), h(n))$ $\forall\, n \in N$. Evident: $g(0) = = \pi_1(f(0)) = \pi_1(0, 0) = 0$ şi $h(0) = \pi_2(f(0)) = \pi_2(0, 0) = 0$. Cum $f(s(n)) = = \lambda(f(n))$ obţinem $(g(s(n)), h(s(n))) = (h(n), s(h(n)))$, adică: $g(s(n)) = h(n)$ şi $h(s(n)) = s(h(n))$.

$$\begin{array}{ccc} & Id_N & \\ N & \longrightarrow & N \\ & h & \\ s \downarrow & & \downarrow s \\ & h & \\ N & \longrightarrow & N \\ & Id_n & \end{array}$$

În particular, $h(0) = 0$ şi $h(s(n)) = s(h(n))$, $\forall\, n \in N$. Fie $(A, a, \lambda) := (N, 0, s)$. Din $(***)$ obţinem că $Id_n : N \to N$ este unica funcţie ce închide comutativ diagrama. Dar la fel face şi h. Din unicitate obţinem că $h = Id_N$. Din relaţia $g(s(n)) = h(n)$ obţinem: $g(s(n) = n$, $\forall n \in N$ deci s este injectivă.

Observaţie. Vom arăta acum cum se construieşte un model de sistem *Peano-Dedekind* folosind axioma infinitului. Fie o mulţime X astfel încât $\emptyset \in X$ şi $\forall\, y \in X$ avem $y \cup \{y\} \in X$. Notăm cu Γ mulţimea tuturor submulţimilor V ale lui X care îndeplinesc proprietăţile:

i. $\emptyset \in V$

ii. Dacă $y \in V \Rightarrow y \cup \{y\} \in V$.

Evident Γ este nevidă căci $X \in \Gamma$. Fie $N := \bigcup\limits_{V \in \Gamma}$. Avem $N \in \Gamma$, $\emptyset \in N$ şi definim $s : N \to N, s(y) := y \cup \{y\}$ care are sens deoarece $N \in \Gamma$.

Să arătăm că $(N, \emptyset, s)$ este un sistem *Peano-Dedekind.*

În adevăr:

• $s(y) \neq \emptyset$, $\forall\, y \in N$ căci $y \cup \{y\} \neq \emptyset$ $(\{\emptyset\} \neq \emptyset)$

• s injectivă este evident întrucât din $y_1 \cup \{y_1\} = y_2 \cup y_2$ obţinem $y_1 = y_2$ (am folosit axioma de separare).

• Fie $P \subseteq N$ astfel încât $\emptyset \in P$ şi $y \in P \Rightarrow s(y) = y \cup y \in P$. Atunci $P \in \Gamma$ adică P participă la intersecţia care defineşte mulţimea N deci $N \subseteq P$ de unde obţinem $P = N$.

Conform teoremei 1, un triplet *Peano-Dedekind* este unic până la un izomorfism. Mai sus am construit efectiv un astfel de model. Fixăm un sistem *Peano-Dedekind* oarecare *(N, 0, s)*, a cărui mulţime suport N o vom numi mulţimea numerelor naturale, iar elementele sale le vom numi numere naturale. Vom nota

$$1 := s(0),\ 2 := s(1),\ 3 := s(2), \ldots \text{etc.}$$

Printre cele mai importante consecinţe ale Teoremei 1 sunt teoreme care demostrează existenţa şi unicitatea adunării şi înmulţirii numerelor naturale. Pentru detalii complete recomandăm [2]. Pentru comoditatea cititorului vom indica aici doar cum este construită adunarea.

Teorema 3. *Există şi este unică o funcţie $\varphi : N \times N \to N$ (o vom nota $\varphi(m, n) = m + n$) astfel încât:*

$$\text{A1) } m + 0 = m, \qquad \text{A2) } m + s(n) = s(m + n),$$

$\forall m, n \in N$. *Această unică funcţie φ se numeşte adunarea numerelor naturale.*

Demonstraţie. Fie $m \in N$ fixat. Considerăm tripletul (N, m, s). Conform Teoremei 1 aplicată tripletului $(A, a, \lambda) = (N, m, s)$ obţinem că $\exists! f_m : N \to N$ astfel încât $f_m(0) = m$ şi $f_m \circ s = s \circ f_m$. Definim $\varphi : N \times N \to N$, $\varphi(m, n) := = f_m(n) = m + n$. Arătăm că φ este funcţia căutată. Avem $m + 0 = f_m(0) = m$ şi $m + s(n) = \varphi(m,\ s(n)) = f_m(s(n)) = s(f_m(n)) = s(m + n)$ deci φ îndeplineşte condiţiile A1) şi A2).

Să arătăm acum unicitatea funcţiei φ: fie funcţia $\Psi : N \times N \to N$ astfel încât $\Psi(m, 0) = m$ şi $\Psi(m, s(n)) = s(\Psi(m, n))$, pentru orice $\forall m, n \in N$. Considerăm mulţimea $P := \{n \in N \mid \varphi(m, n) = \Psi(m, n),\ \forall m \in N\}$. Cum ambele funcţii φ şi Ψ verifică proprietatea A1) deducem că $0 \in P$. Fie acum $n \in P$. Avem că: $\varphi(m, n) = \Psi(m, n)$, $\forall m \in N$: deci $s(\varphi(m, n)) = s(\Psi(m, n))$, $\forall m \in N$. Deci $\varphi(m, s(n)) = \Psi(m, s(n))$, $\forall m \in N$, adică $s(n) \in P$. Obţinem că $P = N$, deci cele două functii coincid.

Observaţie. Din Teorema 3 obţinem:

$$1 + 1 = 1 + s(0) = s(1 + 0) = s(1) = 2.$$

Cu alte cuvinte întrebarea din introducere capătă un răspuns matematic riguros: $1 + 1 = 2$ este consecinţa unei teoreme! Pentru a se ajunge la ea a fost nevoie de câteva secole de matematică, de inspiraţia lui *Peano* şi mâna lui *Hilbert*.

Bibliografie

[1] G. Bergman, *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, Henry Helson, 15 the Crescent, Berkeley CA, 94708 1998, 398 pp. 45, ISBN 0-9655211-41. Diponibilă on-line la http://math.berkeley.edu/ gbergman/245/

[2] D. Busneag, F. Boboc, D. Piciu, *Aritmetica şi teoria numerelor*, Editura Universitaria, Craiova 1999. Disponibilă on-line la

http://www.inf.ucv.ro/ busneag/books/aritmetica/aritmetica.pdf

[3] L. Henkin, *On Mathematical Induction*, The Amer. Math. Monthly, 67(1960), 323-338.

[4] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W.H. Freeman and Company, San Francsco, 1973.

[5] B. Mazur, *When is one thing equal to some other thing*?, preprint 5 septembrie 2006, disponibil on-line la http://www.math.harvard.edu/ mazur/

Facultatea de Matematică şi Informatică,
Universitatea din Bucuresti,
Str. Academiei 14, Romania.
E-mail: agoreloredana@yahoo.com şi gmilit@al.math.unibuc.ro

Teorema de factorizare şi aplicaţii

DE COSTEL CHITEŞ

Abstract

Key words:
M.S.C.: .

În acest articol vom prezenta teoreme de factorizareîn cadrul mulţimilor cât şi în categoria Ens şi în cel al grupurilor în categoria Gr, prezentând legătura dintre ele.

În prima parte se studiază teorema de factorizare în cadrul mulţimilor abstracte (categoria Ens), legătura cu funcţiile surjective, injective, bijective şi se dă un exemplu care ilustrează faptele teoretice expuse. În partea a doua se studiază teorema de factorizare la grupuri (categoria Gr), care sunt în esenţă teoremele de izomorfism de la grupuri, făcându-se legătura cu faptele expuse în prima parte (de exemplu, a se vedea legătura dintre nucleul unui morfism de grupuri şi ucleul unei funcţii oarecare). În fine, partea a treia prezintă ca aplicaţii câteva exemple remarcabile de grupuri - factor sau de latici de subgrupuri (obţinute pe baza teoremelor de izomorfism) şi se încheie cu o scurtă privire asupra grupurilor rezolubile şi criteriului de rezolubilitate al lui *Galois* pentru ecuaţiile algebrice.

I. Categoria Ens. Vom reaminti câteva rezultate legate de mulţimi factor.

Definiţia 1. *Fie $f : A \to B$ o funcţie. O funcţie $r : B \to A$ se numeşte retractă (sau inversă la stânga) a lui f, dacă $r \circ f = 1_A$.*

Definiţia 2. *Fie $f : A \to B$ o funcţie. O funcţie $s : B \to A$ se numeşte secţiune (sau inversă la dreapta) a lui f dacă $f \circ s = 1_B$.*

Propoziţia 1. *Fie $f : A \to B$ o funcţie cu $A \neq \emptyset$. Sunt echivalente următoarele afirmaţii*:

a) f este injectivă;

b) f *admite cel puţin o retractă*;

c) *pentru orice mulţime X şi orice funcţii $g, h : X \to A$ avem $f \circ g = f \circ h$ implică $g = h$ (simplificare la stânga)*.

Propoziţia 2. *Fie $f : A \to B$ o funcţie. Sunt echivalente următoarele afirmaţii*:

a) f *este surjectivă*;

b) f *admite cel puţin o secţiune*;

c) *pentru orice mulţime* Y *şi orice funcţii* $g, h : B \to Y$ *avem* $g \circ f = h \circ f$ *implică* $g = h$ *(simplificare la dreapta)*

Definiţia 3. *Fie* $f = (A, B, F)$ *o relaţie funcţională, unde* $F \subseteq A \times B$ *este graficul relaţiei. Mulţimea*

$$\mathrm{Ker}f = \overset{-1}{F} \circ F = \{(x_1, x_2) \in A \times A \mid |f(x_1) = f(x_2)\}$$

se numeşte nucleul lui f.

Observaţii. 1) $\mathrm{Ker}f$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

2) $\dfrac{A}{\mathrm{Ker}f} = \left\{ \overset{-1}{f}(y) \mid y \in f(A) \right\}$.

3) Dacă $p_{\mathrm{Ker}f} : A \to \dfrac{A}{\mathrm{Ker}f}$ este surjecţia canonică, atunci $\mathrm{Ker}p_{\mathrm{Ker}f} = \mathrm{Ker}f$.

Teorema 1. (Factorizarea printr-o surjecţie) *Fie* $f : A \to B$ *o funcţie şi* $g : A \to C$ *o funcţie surjectivă. Există şi este unică o funcţie* $h : C \to B$ *astfel încât* $f = h \circ g$ *dacă şi numai dacă* $\mathrm{Ker}g \subseteq \mathrm{Ker}f$.

Demonstraţie. „$\Rightarrow$“ Fie $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}g$. Atunci $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow h(g(x_1)) = h(g(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}f$.

„ $\Leftarrow$“ Cum g este surjectivă, rezultă că există $s : C \to A$ astfel încât $g \circ s = 1_C$. Definim funcţia $h = f \circ s$; Din $g \circ s = 1_C$ rezultă $g \circ s \circ g = g$. Fie $x \in A$, atunci $(g \circ s \circ g)(x) = g(x)$ sau

$$g((s \circ g)(x)) = g(x) \Rightarrow (f \circ s \circ g)(x) = f(x)$$

sau $(h \circ g)(x) = f(x)$. Deci$f = h \circ g$.

Unicitatea lui h. Dacă există $h' : C \to B$ astfel încât $f = h' \circ g$ rezultă $h' \circ g = h \circ g$ şi, simplificând, la dreapta (g este surjectivă) rezultă $h = h'$. □

Observaţii. 1) Dacă $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Ker}f$ atunci h este injectivă.

2) Dacă f este surjectivă atunci h este surjectivă.

1) Dacă$h(c_1) = h(c_2)$, din g surjectivă, rezultă că există $a_1, a_2 \in A$ astfel încât $c_1 = g(a_1)$, $c_2 = g(a_2)$. Deci:

$$(h \circ g)(a_1) = (h \circ g)(a_2) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow (a_1, a_2) \in \mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(a_1) = g(a_2) \Rightarrow c_1 = c_2,$$

deci h este injectivă.

2) $f = h \circ g$ surjectivă implică h surjectivă.

Prin dualitate se enunţă

Teorema 2. (Factorizarea unei funcţii printr-o injecţie). *Fie* $f : B \to A$ *o funcţie şi* $g : C \to A$ *o funcţie injectivă.Există şi este unică o funcţie* $h : B \to C$ *astfel încât* $f = g \circ h$ *dacă şi numai dacă* $\mathrm{Im}f \subseteq \mathrm{Im}g$.

Demonstraţia se realizează ca în cazul teoremei 1 (a se vedea [4]).

Un corolar al teoremei 1 îl reprezintă:

Teorema 3. *Dacă* $f : A \to B$ *este o funcţie atunci există o bijecţie* $\overline{f}$: $\dfrac{A}{\mathrm{Ker}f} \to f(A)$ *astfel încât* $f = i \circ \overline{f} \circ p_{\mathrm{Ker}f}$ *unde* $i : f(A) \to B$, $i(y) = y$ *este aplicaţia de incluziune.*

Demonstraţie. Cum aplicaţia $p_{\text{Ker}f}$ este surjectivă şi $\text{Ker}p_{\text{Ker}f} = \text{Ker}f$, aplicând teorema 1, rezultă că există şi este unică aplicaţia injectivă $h : \dfrac{A}{\text{Ker}f} \to B$ astfel încât $f = h \circ p_{\text{Ker}f}$. Cum $\text{Im}h =$
$mImf$ şi h injectivă, rezultă că funcţia $\overline{f} : \dfrac{A}{\text{Ker}f} \to f(A)$, $\overline{f}(\text{Ker}f < x >) = h(\text{Ker}f < x >)$ este bijectivă şi $h = i \circ \overline{f}$, unde i este aplicaţia de incluziune. Deci$f = i \circ \overline{f} \circ p_{\text{Ker}f}$.

Observaţie. Teorema 3 ne arată că imaginile unei mulţimi A prin toate funcţiile cu domeniul A sunt epuizate, până la o bijecţie, de mulţimile cât ale lui A.

Exemplu. Se consideră mulţimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ şi funcţia $f : A \to B$ definită prin tabelul $\begin{array}{c|cccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline f(x) & a & a & a & b & b & c \end{array}$. Atunci:

$$\begin{aligned} F =& \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, b), (6, c)\}; \\ \overline{F} =& \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 4), (b, 5), (c, 6)\}; \\ \text{Ker}f =& \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), \\ & (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}; \\ \frac{1}{Kerf} =& \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6\}\}, \quad \text{Im}f = \{a, b, c\}. \end{aligned}$$

Între aceste mulţimi, evident, există o bijecţie.

II. Categoria (Gr). În cadrul grupurilor întâlnim noţiunea de nucleu al unui morfism de grupuri. Dacă $(G, \cdot)$, $(H, \cdot)$ sunt grupuri şi $f : G \to H$ este un morfism de grupuri, $\ker f = \{x \in G \mid f(x) = 1\}$ este un subgrup normal al lui G, numit nucleul lui f.

Morfismul f fiind, în particular, funcţie, se puneîntrebarea ce legătură există între $\text{Ker}f$ de la funcţii şi $\ker f$ de la morfismele de grupuri?

Pentru a răspunde laîntrebare vom analiza un morfism de grupuri $f : G \to H$. Notăm $N = \ker f \lhd G$; N induce o relaţie de echivalenţă (chiar de congruenţă) pe G notată prin

$$\rho_{N\,;\,(x_1,x_2)} \in \rho_N \subseteq G \times G \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2^{-1} \in N \Leftrightarrow f\left(x_1 \cdot x_2^{-1}\right) = 1 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \overset{-1}{F} \circ F = Kerf$ unde am notat $f = (G, H, F)$. Deci mulţimea G subiacentă grupului $(G, \cdot)$ se factorizează ca în cazul teoriei mulţimilor unde funcţionează teoremele 1, 2, 3 prezentateîn paragraful (Ens).

Teorema 4. (Teorema factorului) *Fie $f : G \to H$ un morfism de grupuri, $N \lhd G$ şi $K = \ker f$, $\pi : G \to \dfrac{G}{N}$, $\pi(x) = xN$ surjecţia canonică. Dacă $N \subseteq K$ atunci există un unic morfism de grupuri $\overline{f} : \dfrac{G}{N} \to H$ astfelîncât $f = \overline{f} \circ \pi$. Mai mult, dacă:*

a) *$\overline{f}$ este epimorfism dacă şi numai dacă f este epimorfism;*
b) *$\overline{f}$ este monomorfism dacă şi numai dacă $K = N$;*
c) *$\overline{f}$ este izomorfism dacă şi numai dacă $K = N$ şi f este epimorfism.*

Demonstraţie. Fie $aN \in \dfrac{G}{N}$. Definim $\overline{f}(aN) = f(a)$. Dacă $aN = bN$ atunci $a^{-1}b \in N \subseteq K$, deci $f\left(a^{-1}b\right) = 1$ sau $f(a) = f(b)$. Deci $\overline{f}$ este bine definită. Din

$$\overline{f}(aN \cdot bN) = \overline{f}(abN) = f(ab) = f(a) f(b) = \overline{f}(aN) - \overline{f}(bN),$$

rezultă că $\overline{f}$ este morfism de grupuri; $f = \overline{f} \circ \pi$.

a) Arătăm că $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\overline{f}$. Fie $y \in \mathrm{Im} f$ atunci există $a \in G$ astfel încât $y = f(a) = \overline{f}(aN)$, deci $y \in \mathrm{Im}\overline{f}$. Reciproc, dacă $y \in \mathrm{Im}\overline{f}$ atunci există $aN \in \dfrac{G}{N}$ astfel încât $y = \overline{f}(aN) = f(a)$ deci $y \in \mathrm{Im} f$;

$$\ker \overline{f} = \{aN \mid f(a) = 1\} = \{aN \mid a \in K\} = \frac{K}{N}.$$

b) $\overline{f}$ este monomorfism dacă şi numai dacă $\ker \overline{f} = \{1\}$ adică atunci şi numai atunci cÂnd $K = N$.

c) Se aplică a), b). □

Teorema 5. (Teorema întâi de izomorfism). *Dacă* $f : G \to H$ *este un morfism de grupuri cu* $K = \ker f$ *atunci* $\dfrac{G}{K} \cong \mathrm{Im} f$.

Demonstraţie. Aplicăm teorema factorului (T4) pentru $N = K$ şi $\overline{f} : G \to \mathrm{Im} f$, $\overline{f}(x) = f(x)$, pentru orice $x \in G$.

Lemă. *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup,* $H \leq G$ *şi* $N \triangleleft G$. *Atunci*:

a) $HN = NH$, *deci* $HN \leq G$;

b) $N \triangleleft HN$;

c) $H \cap N \triangleleft H$.

Demonstraţie. a) $hN = Nh$, oricare ar fi $h \in G$, în particular pentru orice $h \in H$; $HN = \bigcup\limits_{h \in H} hN = \bigcup\limits_{h \in H} Nh = NH$.

Cum $H, N \leq G$ şi $HN = NH$ rezultă $HN \leq G$.

b) Cum $gN = Ng$, oricare ar fi $g \in G$ rezultă $gN = Ng$, pentru orice $g \in HN$, deci $N \triangleleft HN$.

c) Surjecţia canonică $\pi : G \to \dfrac{G}{N}$ restricţionată la H este $\pi' : H \to \dfrac{G}{N}$, $\pi'(h) = hN$, oricare ar fi $h \in H$.

$\ker \pi' = \{h \in H \mid hN = N\} = \{h \in H \mid h \in N\} = H \cap N$. Subgrupul $H \cap N$ este nucleul unui morfism deci este normalîn H.

Teorema 6. (Teorema a doua de izomorfism) *Fie* $(G, \cdot)$ *un grup* , $H \leq G$, $N \triangleleft G$ *atunci* $\dfrac{H}{H \cap N} \cong \dfrac{HN}{N}$.

Demonstraţie. Fie $\pi : G \to \dfrac{G}{N}$ epimorfismul canonic şi $\pi' = \pi|_H$. Din lema precedentă avem $\ker \pi' = H \cap N$ şi $\mathrm{Im}\pi' = \{hN \mid h \in H\} = \dfrac{HN}{N}$. Aplicând prima teoremă de izomorfism (T5) avem $\dfrac{H}{H \cap N} \cong \dfrac{HN}{N}$.

Observaţie.

Pentru a reţine uşor enunţul teoremei se consideră un romb ale cărui vârfuri se noteazăîntr-o ordine prin: $H \cap N$, N, HN, H.

Teorema 7. (*Teorema a treia de izomorfism*). *Dacă* $(G,\cdot)$ *este un grup,* $N \lhd G$, $H \lhd G$ *şi* $N \subseteq H$ *atunci* $\dfrac{G}{H} \cong \dfrac{\frac{G}{N}}{\frac{H}{N}}$.

Demonstraţie. Fie $aN \in \dfrac{G}{N}$ şi definim $f(aN) = aH \in \dfrac{G}{H}$. Corespondenţa astfel definită este o funcţie deoarece dacă $aN = bN$ atunci $a^{-1}b \in N \subseteq H$ deci $aH = bH$. Notăm funcţia $f : \dfrac{G}{N} \to \dfrac{G}{H}$, $f(aN) = aH$, f este un epimorfism; $\ker f = \{aN \mid aH = H\} = \{aN \mid a \in H\} = \dfrac{H}{N}$. Conform teoremeiîntâi de izomorfism rezultă

$$\frac{G}{H} \cong \frac{\frac{G}{N}}{\frac{H}{N}}. \qquad \square$$

Fie $(G,\cdot)$ un grup , $N \lhd G$, $H \leq G$, $N \leq H$. Notăm cu $L_N(G)$ laticea subgrupurilor lui G careîl conţin pe N şi cu $L\left(\dfrac{G}{N}\right)$ laticea subgrupurilor lui $\dfrac{G}{N}$. Definim funcţia $\psi : L_N(G) \to L\left(\dfrac{G}{H}\right)$, $\psi(H) = \dfrac{H}{N}$. Dacă $\dfrac{H_1}{N} = \dfrac{H_2}{N}$, atunci pentru orice $h_1 \in H_1$, există $h_2 \in H_2$, astfel încât $h_1N = h_2N$.

Rezultă $h_2^{-1}h_1 \in N \subseteq H_2$ deci$h_1 \in H_2$. Am demonstrat că $H_1 \subseteq H_2$. Analog se arată$H_2 \subseteq H_1$. Deci $H_1 = H_2$ şi ψ este injectivă.

Fie $Q \leq \dfrac{G}{N}$ şi $\pi : G \to \dfrac{G}{N}$ surjecţia canonică. $\pi^{-1}(Q) \leq G$, $N \leq \pi^{-1}(Q)$ şi $\psi\left(\pi^{-1}(Q)\right) = \{aN \mid aN \in Q\} = Q$, deci ψ este surjectivă.

Fie $\tau = \psi^{-1}$, $\tau(Q) = \pi^{-1}(Q)$. Bijecţia ψ are proprietăţi interesante însumate în:

Teorema 8. (Teorema de corespondenţă). *Dacă* $(G,\cdot)$ *este un grup,* $N \lhd G$ *atunci funcţia* $\psi : L_N(G) \to L\left(\dfrac{G}{N}\right)$ *este bijectivă. Mai mult:*

a) $H_1 \leq H_2$ *dacă şi numai dacă* $\dfrac{H_1}{N} \leq \dfrac{H_2}{N}$ *şi în acest caz*

$$[H_2 : H_1] = \left[\frac{H_2}{N} : \frac{H_1}{N}\right];$$

b) $H \lhd G$ *dacă şi numai dacă* $\dfrac{H}{N} \lhd \dfrac{G}{N}$;

c) $H_1 \lhd H_2$ *dacă şi numai dacă* $\dfrac{H_1}{N} \lhd \dfrac{H_2}{N}$ *şiîn acest caz* $\dfrac{H_2}{H_1} \cong \dfrac{\frac{H_2}{N}}{\frac{H_1}{N}}$.

Demonstraţie. a) Dacă $H_1 \leq H_2$, fie $aN \in \dfrac{H_1}{N}$, $a \in H_1 \leq H_2$, deci $aN \in \dfrac{H_2}{N}$. Invers, fie $aN \in \dfrac{H_1}{N} \leq \dfrac{H_2}{N}$ rezultă $a \in H_2$, deci $H_1 \leq H_2$.

Avem $\eta(aH_1) = (aN)\left(\dfrac{H_1}{N}\right)$, deci $aH_1 = bH_1$, $a^{-1}b \in H_1$; $\left(a^{-1}N\right)(bN) = a^{-1}bN \in \dfrac{H_1}{N}$ şi $(aN)\left(\dfrac{H_1}{N}\right) = (bN)\left(\dfrac{H_1}{N}\right)$. Deci η este bijectivă.

b) Avem $(aN)\left(\dfrac{H}{N}\right)(aN)^{-1} = \dfrac{aNa^{-1}}{N} = \dfrac{H}{N}$, deci $\dfrac{H}{N} \lhd \dfrac{G}{N}$.

Aplicaţiile $G \xrightarrow{\pi} \dfrac{G}{N} \xrightarrow{p} \dfrac{\frac{G}{N}}{\frac{H}{N}}$ sunt epimorfismele canonice. Avem:

$a \in \ker(p \circ \pi) \Leftrightarrow (aN)\left(\dfrac{H}{N}\right) = \dfrac{H}{N} \Leftrightarrow aN \in \dfrac{H}{N}$; $aN = hN$, $h \in H \Leftrightarrow a \in H$.

Deci $H = \ker(p \circ \pi) \lhd G$.

c) $H = H_1$, $G = H_2$ şi se utilizează teorema a treia de izomorfism (T7).

III. Aplicaţii

1) Se consideră morfismul de grupuri:

$$f : (\mathbb{R}, +) \to (C^*, \cdot), \quad f(x) = \cos 2\pi x + \mathrm{i} \cdot \sin 2\pi x.$$

Deci

$\ker f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\} = \mathbb{Z}$. $\mathrm{Im} f = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\} \overset{not}{=} D$. Atunci, aplicând teorema întâi de izomorfism, obţinem că $\dfrac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong D$. Se observă că $|D| = \mathcal{C}$

2) Se consideră morfismul de grupuri $g : (\mathbb{Q}, +) \to D$, $g(x) = \cos 2\pi x + \mathrm{i} \cdot \sin 2\pi x$, unde D a fost definit în exerciţiul 1.

Atunci $\ker g = \mathbb{Z}\mathrm{Im}_{„} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \exists n \in \mathbb{N}\,\text{a. i}\, z^n = 1\} \overset{not}{=} V$ numit grupul rădăcinilor complexe ale unităţii.

Observăm că $|V| = \aleph_0$. Atunci, aplicând teorema întâi de izomorfism obţinem că $\dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \cong V$.

3) Fie K un corp, $n \in \mathbb{N}^*$ şi morfismul surjectiv $\det \mathrm{GL}_n(K) \to K^*$.

Nucleul se notează cu $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in \mathrm{GL}_2(K) \mid \det A = 1\}$ şi se numeşte grupul liniar special de grad n peste K.

Dar $\mathrm{SL}_n(K) \lhd \mathrm{GL}_n(K)$ şi aplicând teorema întâi de izomorfism obţinem:

$$\frac{\mathrm{GL}_n(K)}{\mathrm{SL}_n(K)} \cong K^*.$$

În particular, pentru K un corp finit cu q elemente obţinem:

$$|\mathrm{SL}_n(K)| = \frac{|\mathrm{GL}_n(K)|}{q-1}.$$

4) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $\alpha : G \to G$ un automorfism.

Considerăm $G \xrightarrow{\alpha^{-1}} G \xrightarrow{\pi} \dfrac{G}{H}$, unde π este surjecţia canonică. Atunci

$$\ker\left(\pi \circ \alpha^{-1}\right) = \left\{x \in G \middle| \pi\left(\alpha^{-1}(x)\right) = 1\right\} = \left\{x \in G \middle| \alpha^{-1}(x) \in H\right\} = \alpha(H).$$

Cum $\pi \circ \alpha^{-1}$ este epimorfism, aplicând teoremaîntâi de izomorfism obţinem că $\dfrac{G}{\alpha(H)} \cong \dfrac{G}{H}$.

5) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine subgrupurile lui $\mathbb{Z}_n$.

Fie $H \leq \mathbb{Z}_n \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$. Conform teoremei de corespondenţă (T8), $H = \dfrac{d\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ unde $n\mathbb{Z} \subseteq d\mathbb{Z}$, deci $d \mid n$, $d \in \mathbb{N}^*$. Aplicând teorema 3 de izomorfism avem: $\dfrac{\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}}{\dfrac{d\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}} \cong \dfrac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_d$.

Conform teoremei lui Lagrange, $\left|\dfrac{d\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\right| = \dfrac{|\mathbb{Z}_n|}{[\mathbb{Z}_n : H]} = \dfrac{n}{d}$ deoarece $[\mathbb{Z}_n : H] =$ $= |\mathbb{Z}_d| = d$. Grupul H este ciclic şi $H = <\widehat{d}>$, unde $\widehat{d} = d + n\mathbb{Z}$.

6) Să se determine laticea subgrupurilor grupului $\mathbb{Z}_{18}$.

Subgrupurile H ale lui $\mathbb{Z}_{18}$ sunt de forma $\dfrac{d\mathbb{Z}}{18\mathbb{Z}}$ unde $d \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.

Obţinem

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & \dfrac{9\mathbb{Z}}{18\mathbb{Z}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\dfrac{6\mathbb{Z}}{18z} & & \dfrac{3\mathbb{Z}}{18\mathbb{Z}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\dfrac{2\mathbb{Z}}{18\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{18}
\end{array}$$

7) Dacă G este un grup ciclic, atunci orice subgrup şi orice grup factor al său este ciclic. Se utilizează exerciţiul 6) şi stuctura subgrupurilor lui $\mathbb{Z}$ şi a subgrupurilor factor ale sale.

Se ştie că orice grup ciclic este izomorf fie cu $\mathbb{Z}$, fie cu un $\mathbb{Z}_n$.

8) Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $A, B, C \leq G$. Să se arate că:

a) Dacă $B \leq A$ atunci $A \cap (BC) = B \cdot (A \cap C)$.

b) Dacă $B \triangleleft A$ atunci $B \cap C \triangleleft A \cap C$ şi $\dfrac{A \cap C}{B \cap C} \cong \dfrac{B \cdot (A \cap C)}{B}$;

c) Dacă $B \triangleleft A$ şi $C \triangleleft G$ atunci $B \cdot C \triangleleft A \cdot C$ şi $\dfrac{AC}{BC} \cong \dfrac{A}{B \cdot (A \cap C)}$.

Într-adevăr:

a) Evident, avem $B \cdot (A \cap C) \subseteq A \cap (BC)$. Invers, fie $a = bc$ unde $b \in B$, $c \in C$. $b^{-1}a = c \in A \cap C$. Deci $a = b\left(b^{-1}a\right) \in B \cdot (A \cap C)$.

b) Aplicăm teorema a doua de izomorfism considerând că: $K = B$, $G = A$, $H = A \cap C$. Obţinem $B \cap C = (A \cap C) \cap B \triangleleft A \cap C$ şi

$$\frac{A \cap C}{B \cap C} \cong \frac{(A \cap C) \cdot B}{B} = \frac{B \cdot (A \cap C)}{B}.$$

c) Evident că $BC \leq AC$. Vom arăta că este normal. Fie $x = ac \in AC$, atunci

$$x(BC) = acBC = acCB = aCB = aBC = BaC = BaCc = BCac = (BC)x.$$

Aplicăm teorema a doua de izomorfism pentru $K = BC$, $G = AC$, $H = A$. Obţinem $A \cap (BC) \lhd A$ şi $\dfrac{A \cdot (BC)}{BC} \cong \dfrac{A}{A \cap (BC)}$, deci concluzia. $\square$

Definiţia 4. *Un grup G se numeşte rezolubil dacă $\exists n \in \mathbb{N}$ şi subgrupurile $1 = G_0, G_1, ..., G_n = G$ astfelîncât $G_{i-1} \lhd G_i$ şi ${}^{G_i}/_{G_{i-1}}$ este grup abelian$\forall 1 \leq i \leq n$.*

9) Fie $(G, \cdot)$ un grup, $H, K \leq G$ cu $K \lhd G$. Să se arate că:

a) Dacă G este rezolubil, atunci H, $\dfrac{G}{K}$ sunt rezolubile.

b) Dacă K, $\dfrac{G}{K}$ sunt rezolubile atunci G este rezolubil.

Într-adevăr:

a) $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$ şi $\dfrac{G_i}{G_{i-1}}$ sunt abeliene, $1 \leq i \leq n$. Aplicăm exerciţiul 8) punctul b). $G_{i-1} \cap H \lhd G_i \cap H$ şi

$$\frac{G_i \cap H}{G_{i-1} \cap H} \cong \frac{G_{i-1} \cdot (G_i \cap H)}{G_{i-1}} \leq \frac{G_i}{G_{i-1}}$$

ultimul grup fiind abelian, deci şi factorii $\dfrac{G_i \cap H}{G_{i-1} \cap H}$ sunt abeliene.

Considerăm $1 = G_0 \cap H \lhd G_1 \cap H \lhd ... \lhd G_n \cap H = H$, deci H este rezolubil.

Aplicăm exerciţiul 8) punctul c) şi teorema a treia de izomorfism.

Obţinem: $G_{i-1}K \lhd G_iK$ şi $\dfrac{G_iK}{G_{i-1}K} \cong \dfrac{G_i}{G_{i-1} \cdot (G_i \cap K)}$.

Dar:

$$\frac{\frac{G_iK}{K}}{\frac{G_{i-1}K}{K}} \cong \frac{G_iK}{G_{i-1}K}.$$

Cum:

$$\frac{\frac{G_i}{G_{i-1}}}{\frac{G_{i-1}(G_i \cap K)}{G_{i-1}}} \cong \frac{G_i}{G_{i-1} \cdot (G_i \cap K)}$$

ultimul grup fiind abelian, deci $\dfrac{G_iK}{G_{i-1}K}$ este abelian.

Din $1 = \dfrac{G_0K}{K} \lhd \dfrac{G_1K}{K} \lhd ... \lhd \dfrac{G_nK}{K} = \dfrac{G}{K}$, rezultă că $\dfrac{G}{K}$ este rezolubil.

b) Dacă $1 = K_0 \lhd K_1 \lhd ... \lhd K_m = K$ şi $\dfrac{K_i}{K_{i-1}}$ este abelian, $1 \leq i \leq m$. Atunci

$$1 = \frac{G_0}{K} \lhd \frac{G_1}{K} \lhd ... \lhd \frac{G_n}{K} = \frac{G}{K} \text{ şi } \frac{\frac{G_j}{K}}{\frac{G_{j-1}}{K}} \cong \frac{G_j}{G_{j-1}} \text{ este abelian, } 1 \leq j \leq n.$$

Considerând $1 = K_0 \lhd K_1 \lhd ... \lhd K_m = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$, rezultă G rezolubil.

Évariste Galois a dat o caracterizare a ecuaţiilor rezolvabile prin radicali.

Teorema 9. *Dacă K este un corp comutativ, $f \in K[X]$, $\text{grad}(f) \geq 1$, atunci ecuaţia $f(x) = 0$ este rezolvabilă prin radicali dacă şi numai dacă grupul Galois al lui f (peste K) este rezolubil.*

A se vedea demonstraţia de exemplu în lucrarea [4].

Bibliografie

[1] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulţimilor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.

[2] C. Năstăsescu, *Inele, module, categorii*, Editura Academiei, Bucureşti, 1976.

[3] Dorin Popescu, Constantin Vraciu, *Elemente de teoria grupurilor finite*, Editura ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[4] Ioan Purdea, Ioana Pop, *Algebră*, Editura GIL, Zalău, 2003.

[5] Joseph Rotman, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 2003.

Profesor drd.,
Colegiul Naţional T. Vianu,
Bucureşti

Izometrii liniare în $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{C}^n$?

DE VASILE POP

Abstract

Key words:
M.S.C.: .

Punctele de plecare ale acestui articol îl reprezintă două probleme deosebite de algebră liniară, date la Olimpiada Naţională de Matematică, Piteşti 2007 şi Olimpiada Internaţională de Matematică a Studenţilor din Sud-Estul Europei, Cipru 2007. Cele două probleme dau răspuns unei probleme teoretice importante: determinarea sau caracterizarea izometriilor în diferite spaţii metrice. Scopul articolului este de a încadra aceste probleme în contextul teoretic corespunzător şi a prezenta rezultatele care rezolvă problema izometriilor în spaţii vectoriale normate de dimensiuni finite.

1. Introducere

Din punct de vedere teoretic, cunoştinţele minime necesare înţelegerii lucrării se reduc la definiţiile noţiunilor de metrică, spaţiu metric, spaţiu vectorial normat şi de izometrii în spaţii metrice. Având ca model geometric planul euclidian definiţiile generale extind în mod natural noţiunile de distanţă, norma unui vector din plan, funcţie care invariază distanţele, pentru care recomandăm paragraful de „Grupuri de transformări geometrice" din [4].

Definiţia 1.1. *O funcţie $d : X \times X \to [0, \infty)$ se numeşte metrică (distanţă) pe mulţimea X, dacă sunt verificate axiomele*:

$(D_1):\ d(x, y) = d(y, x),\ x, y \in X;$

$(D_2):\ d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z),\ x, y, z \in X;$

$(D_3):\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

Perechea (X,d) se numeşte spaţiu metric.

Exemplul 1. a) Structura canonică de spaţiu metric a axei reale este dată de metrica: $d(x,y)=|x-y|$, $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Structura canonică de spaţiu metric a planului euclidian $\mathbb{R}^2$ este dată de metrica:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},\quad (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Fie $(X,+)$ un spaţiu vectorial peste corpul $K=\mathbb{R}$ sau $K=\mathbb{C}$, unde operaţia de înmulţire a vectorilor cu scalari este notată $\varphi(a,x)=a\cdot x$, $a\in K$, $x\in X$.

Definiţia 1.2. *O funcţie $\|\cdot\|:X\to[0,\infty)$ se numeşte normă pe X dacă verifică axiomele*:

(N_1) $\|a\cdot x\|=|a|\cdot\|x\|,\ a\in K,\ x\in X$

(N_2) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|,\ x,y\in X$

(N_3) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0.$

Perechea $(X,\|\cdot\|)$ se numeşte spaţiu vectorial normat.

Exemplul 2. a) Norma canonică (euclidiană) în $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ este definită prin:

$$\|(z_1,z_2,\dots,z_n)\|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2},$$

care se notează cu $\|\cdot\|_2$.

b) Pe $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ sunt frecvent utilizate normele:

$$\|(z_1,z_2,\dots,z_n)\|_1=\sum_{k=1}^n|z_k|,\qquad \|(z_1,z_2,\dots,z_n)\|_\infty=\max_{k=\overline{1,n}}|z_k|.$$

c) În general pentru orice $p\in[1,\infty)$ funcţia $\|\cdot\|_p:\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty)$, definită prin:

$$\|(z_1,z_2,\dots,z_n)\|_p=\left(\sum_{k=1}^n|z_k|^p\right)^{1/p},$$

este o normă. În cazurile particulare $p=2$, $p=1$ şi $p\to\infty$ se obţin normele de la a) şi b).

Este un simplu exerciţiu demonstraţia următorului rezultat:

Teoremă. *Dacă $(X,\|\cdot\|)$ este un spaţiu vectorial normat atunci funcţia $d:X\times X\to[0,\infty)$, $d(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in X$ este o metrică pe X, numită metrica indusă de normă.*

Observaţie. Orice spaţiu vectorial normat este un spaţiu metric. În particular normele din Exemplul 2 induc metricile pe $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$:

$$d_1(x,y)=\textstyle\sum_{k=1}^n|x_k-y_k|,$$
$$d_\infty(x,y)=\max_{k=\overline{1,n}}|x_k-y_k|,$$
$$d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^n|x_k-y_k|^2},$$
$$d_p(x,y)=\left(\textstyle\sum_{k=1}^n|x_k-y_k|^p\right)^{1/p},$$

pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $x, y \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$.

Definiţia 1.3. *Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu vectorial normat şi $f : X \to X$ este o funcţie, spunem că f invariază norma dacă $\|x\| = \|f(x)\|$, $x \in X$.*

Este uşor de demonstrat următorul rezultat:

Teoremă. *Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu vectorial normat şi $T : X \to X$ este o aplicaţie liniară care invariază norma atunci T este o izometrie în raport cu metrica indusă şi reciproc.*

Demonstraţie. „ $\Rightarrow$ “ Avem:

$$\|x - y\| = \|T(x - y)\| = \|T(x) - T(y)\| \Rightarrow d(x, y) = d(T(x), T(y)),\ x, y \in X.$$

„ $\Leftrightarrow$ “ Avem:

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \Rightarrow d(x, 0) = d(T(x), T(0)) \Leftrightarrow d(x, 0) = d(T(x), 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|x\| = \|T(x)\|,\ x \in X.$$

2. Legătura între izometrii liniare şi matrice

Ne propunem să determinăm aplicaţiile liniare $T : \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ care sunt izometrii în raport cu metricile d_1, d_2 şi d_∞. Două argumente simple reduc problema la determinarea unor matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Orice aplicaţie liniară $T : \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ este unic determinată de o matrice $M_T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi de alegerea unei baze în $\mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$.

2) Definiţia izometriilor liniare nu depinde de alegerea unei baze.

În concluzie o izometrie liniară este definită de o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care verifică relaţia:

$$\|A \cdot X\| = \|X\|, \mathbb{Q}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ sau } \mathbb{R}^n.$$

Definiţia 2.1. *Spunem că matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice de izometrie în raport cu norma $\|\cdot\|$ dacă:*

$$\|A \cdot X\| = \|X\|, \mathbb{Q}X \in \mathbb{C}^n \textit{ sau } \mathbb{R}^n.$$

Teorema 2.2. *Mulţimea matricelor de izometrie din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sau $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formează un subgrup multiplicativ în $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sau $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Demonstraţie. Arătăm că mulţimea izometriilor este inclusă în $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sau $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dacă prin absurd A este matrice de izometrie şi A este neinversabilă, atunci $\det A = 0$ şi există $X \in \mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$, $X \neq 0$ astfel ca $A \cdot X = 0$ şi atunci $\|A \cdot X\| = 0 \neq \|X\|$ (contradicţie). Avem:

$$\|X\| = \|A \cdot (A^{-1} \cdot X)\| = \|A^{-1} \cdot X\|, \mathbb{Q}X \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$$

deci şi A^{-1} este matrice de izometrie.

Dacă A, B sunt matrici de izometrie, atunci:

$$\|A \cdot B \cdot X\| = \|A \cdot (B \cdot X)\| = \|B \cdot X\| = \|X\|, \mathbb{Q}X \in \mathbb{C}^n \text{ sau } \mathbb{R}^n.$$

3. Structura grupului izometriilor liniare în raport cu $\|\cdot\|_1$

Teorema 3.1. *Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifică relaţia:*

$$\|A \cdot X\|_1 = \|X\|_1, \mathbb{Q}X \in \mathbb{C}^n,$$

dacă şi numai dacă pe fiecare linie şi pe fiecare coloană a matricei A există un singur element nenul, de modul 1.

Demonstraţie. Fie

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix},$$

coloanele matricei I_n. Din $\|AE_j\| = \|E_j\|$ rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 1, \quad j = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Dacă luăm $X = E_1 \pm E_2$ rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i1} + a_{i2}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1} - a_{i2}| = 2. \tag{2}$$

Avem:

$$2 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1} + a_{i2}| \leq \sum_{i=1}^{n} (|a_{i1}| + |a_{i2}|) = 2$$

deci:

$$|a_{i1} + a_{i2}| = |a_{i1}| + |a_{i2}| \tag{3}$$

$$2 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1} - a_{i2}| \leq \sum_{i=1}^{n} (|a_{i1}| + |-a_{i2}|) = 2$$

deci:

$$|a_{i1} - a_{i2}| = |a_{i1}| + |-a_{i2}| \tag{4}$$

Din (3) şi din (4):

$$a_{i1} = 0 \text{ sau } a_{i2} = 0. \tag{5}$$

Din (1) rezultă că pe fiecare coloană avem un element nenul. Din (5) rezultă că dacă pe coloana 1 avem un singur element nenul şi dacă $a_{i1} \neq 0$, atunci:

$$a_{i2} = a_{i3} = \dots = a_{in} = 0. \tag{6}$$

Rezultă că pe fiecare linie şi pe fiecare coloană avem un singur element nenul.

Din (6) şi (1) pe fiecare linie şi pe fiecare coloană avem un singur element nenul şi modulul lui este $|a_{ij}| = 1$.

Teorema 3.2. *Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifică relaţia:*

$$\|A \cdot X\|_1 = \|X\|_1, \mathbb{Q}X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}),$$

dacă şi numai dacă pe fiecare linie şi pe fiecare coloană a matricei A există un singur element nenul, egal cu 1 sau -1.

Demonstraţie. Demonstraţia este aceeaşi cu cea din Teorema 3.2, cu continuarea $|a_{ij}| = 1$ implică $a_{ij} \in \{-1, 1\}$.

Teorema 3.3. *Grupul izometriilor liniare ale spaţiului $\mathbb{R}^n$ în raport cu norma $\|\cdot\|_1$ este finit, ordinul său este $n! \cdot 2^n$.*

Demonstraţie. Conform teoremei 3.2, matricile izometriilor au câte un element egal cu 1 sau -1 pe fiecare linie şi fiecare coloană. O astfel de matrice se obţine printr-o permutare arbitrară a coloanelor matricii unitate I_n, în $n!$ moduri şi înmulţirea ei cu 1 sau -1 în 2^n moduri.

Observaţia 3.4. Problema dată la Olimpiada Naţională de Matematică, Piteşti 2007 are următorul enunţ:

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice pentru care $\|A \cdot X\|_1 = \|X\|_1$, $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ atunci există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $A^m = I_n$.

Deoarece, conform Teoremei 3.3, grupul matricelor A are ordinul finit $2^n \cdot n!$ rezultă că putem lua $m = 2^n \cdot n!$.

4. Structura grupului izometriilor în raport cu norma euclidiană

Teorema 4.1. *Grupul izometriilor liniare ale spaţiului euclidian $\mathbb{C}^n$ în raport cu norma euclidiană este grupul matricilor unitare*:

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^* = A^* \cdot A = I_n\},$$

unde $A^* = (\overline{A})^t$ este adjuncta (hermitiană) a matricei A.

Demonstraţie. Din $\|A \cdot E_j\|_2 = \|E_j\|_2$ rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1 \tag{1}$$

Din $\|A \cdot (E_j + E_k)\|_2 = \|E_j + E_k\|_2$ rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij} + a_{ik}|^2 = 2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ik}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ik}} = 0. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă $A \cdot A^* = I_n$, deci $A^* = A^{-1}$ şi atunci $A^* \cdot A = I_n$.

Teorema 4.2. *Grupul izometriilor liniare ale spaţiului euclidian $\mathbb{R}^n$ în raport cu norma euclidiană este grupul*:

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n\}.$$

Demonstraţie. Este identică cu demonstraţia teoremei 4.1.

Observaţia 4.3. Grupurile $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ şi $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ sunt infinite.

În particular, grupul rotaţiilor:

$$R = \left\{ R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

este inclus în $O_2(\mathbb{R})$.

5. Structura izometriilor liniare în raport cu norma $\|\cdot\|_\infty$

Teorema 5.1. *Matricea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *verifică relaţia*

$$\|A \cdot X\|_\infty = \|X\|_\infty, \mathbb{Q}X \in \mathbb{C}^n,$$

dacă şi numai dacă pe fiecare linie şi coloană există un singur element nenul, de modul 1.

Demonstraţie. Din $\|A \cdot E_j\|_\infty = \|E_j\|_\infty$ rezultă $\max\limits_{i=\overline{1,n}} |a_{ij}| = 1$, $j = \overline{1,n}$ şi atunci matricea nu conţine elemente de modul mai mare ca 1, deci pe fiecare linie modulul maxim este cel mult 1 şi pe fiecare coloană avem un element de modul 1. Dacă pe coloana j elementul nenul este a_{ij} cu $|a_{ij}| = 1$ luăm:

$$X = \left(\ \overline{L}_i \ \right)^t$$

(transpusa conjugată a liniei i) şi din $\|A \cdot X\|_\infty = \|X\|_\infty$ rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\overline{a_{ik}} \le 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a_{ij}|^2 + \sum_{k \ne j} |a_{ik}|^2 \le 1 \Leftrightarrow 1 + \sum_{k \ne j} |a_{ik}|^2 \le 1,$$

deci $a_{ik} = 0$, $k \ne j$.

În concluzie, pe fiecare linie există cel mult un element nenul (de modul 1). Deoarece, conform Teoremei 2.2, matricea A este inversabilă, rezultă că pe fiecare linie există un astfel de element.

Teorema 5.2. *Matricea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *verifică relaţia*

$$\|A \cdot X\|_\infty = \|X\|_\infty, \mathbb{Q}X \in \mathbb{R}^n,$$

dacă şi numai dacă pe fiecare linie şi pe fiecare coloană există un singur element nenul, egal cu 1 *sau* -1.

Demonstraţie. Se face la fel ca la teorema 5.1, $|a_{ij}| = 1 \Leftrightarrow a_{ij} \in \{-1, 1\}$.

Teorema 5.3. *Grupul izometriilor liniare ale spaţiului* $\mathbb{R}^n$ *în raport cu norma* $\|\cdot\|_\infty$ *este finit. Ordinul său este* $n! \cdot 2^n$.

O consecinţă a Teoremei 5.3 este problema dată la Olimpiada Internaţională Studenţească din Cipru 2007.

Corolar 5.4. *Dacă matricea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *verifică relaţia*

$$\|A \cdot X\|_\infty = \|X\|_\infty, \mathbb{Q}X \in \mathbb{R}^n$$

atunci există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $A^m = I_n$.

Demonstraţie. Se poate lua $m = n! \cdot 2^n$.

Observaţia 5.5. Grupul izometriilor liniare ale spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ în raport cu norma $\| \cdot \|_1$ coincide cu grupul izometriilor liniare în raport cu norma $\| \cdot \|_\infty$, sunt finite şi au $n! \cdot 2^n$ elemente.

Bibliografie

[1] $* * *$ Gazeta Matematică (Suplimentul Olimpiadei Naţionale de Matematică), Piteşti, 2006.

[2] $* * *$ Concursul Internaţional Studenţesc SEEMOUS 2007, Agras, Cipru.

[3] V. Pop, *Algebră liniară*, Editura Mediamira, 2003 (pp. 90-104, 116-118).

[4] V. Pop (colectiv), *Matematica pentru grupele de performanţă*, Editura Dacia Educaţional, 2004 (pp. 69-79).

[5] R. A. Horn, Ch. R. Johnson, *Analiză matricială*, Editura Theta, 2001 (pp. 204-213).

Universitatea Tehnică Cluj-Napoca,
Str. C. Daicoviciu 15, 400020, Cluj-Napoca, Romania,
E-mail: vasile.pop@math.utcluj.ro

EXAMENE ŞI CONCURSURI

Olimpiada Internaţională Sudenţească SEEMOUS – 2008

DE VASILE POP ŞI DORIAN POP

În perioada 5-10 martie 2008 la Atena s-a desfăşurat a doua ediţie a Olimpiadei de Matematică a Studenţilor din Sud-Estul Europei SEEMOUS–2008, organizată de Societatea de Matematică din Grecia şi Societatea de Matematică din Sud-Estul Europei. La această ediţie a Olimpiadei au participat 94 de studenţi de la 21 de Universităţi din Bulgaria, Cipru, Columbia, Grecia, Israel, România, Rusia şi Ucraina. Din partea României au participat studenţi de la Universitatea Politehnică din Bucureşti, Universitatea Alexandru Ioan Cuza din Iaşi, Universitatea Tehnică din Cluj, Universitatea Tehnică Gh. Asachi din Iaşi şi Academia Tehnică Militară din Bucureşti. Studenţii români au obţinut 2 medalii de aur, 5 medalii de argint şi 7 medalii de bronz. Locul întâi, cu cel mai mare punctaj din concurs, a fost obţinut de către studentul *Cristian Tălău* de la Universitatea Politehnică din Bucureşti. Concursul a constat dintr-o singură probă cuprinzând un set de patru probleme.

Problema 1. *Fie $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie continuă.*

Să presupunem că pentru orice $a > 0$ ecuaţia $f(x) = ax$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[1, \infty)$.

a) *Demonstraţi că pentru orice $a > 0$, ecuaţia $f(x) = ax$ are o infinitate de soluţii.*

b) *Daţi un exemplu de funcţie continuă strict monotonă cu proprietatea din enunţ.*

Vladimir Todorov, Bulgaria

Soluţia 1. a) Să presupunem că se pot găsi constantele $a > 0$ şi $b \geq 1$ astfel ca $f(x) \neq ax$ pentru orice $x \in [b, \infty)$. Cum f este continuă, rezultă că $f(x) - ax$ are semn constant pe $[b, \infty)$. Avem două cazuri:

1) $f(x) > ax$ pentru orice $x \in [b, \infty)$. Definim:

$$c = \min_{x \in [1,b]} \frac{f(x)}{x} > 0.$$

Atunci pentru orice $x \in [1, \infty)$ avem:

$$f(x) \geq \min\{a, c\} x,$$

contradicţie.

2) $f(x) < ax$ pentru orice $x \in [b, \infty)$. Definim:

$$c = \max_{x \in [1,b]} \frac{f(x)}{x} < \infty.$$

Atunci pentru orice $x \in [1, \infty)$ avem:

$$f(x) \leq \max\{a, c\} x,$$

contradicţie.

b) Răspunsul este afirmativ. Alegem un şir $1 = x_1 < \cdots < x_k < \cdots$ astfel ca şirul $(y_k)_{k \geq 1}$, $y_k = 2^{k \cos k\pi} x_k$ să fie de asemenea strict crescător. Definim $f(x_k) = y_k$, $k \geq 1$ şi prelungim f la o funcţie liniară pe porţiuni $f(x) = a_k x + b_k$ pentru $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Am obţinut astfel o funcţie continuă f cu proprietatea:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_{2n})}{x_{2n}} = \infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_{2n-1})}{x_{2n-1}} = 0.$$

Prin urmare funcţia continuă

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x \geq 1,$$

ia orice valoare strict pozitivă pe intervalul $[1, \infty)$.

Soluţia 2. b) Exemplul se bazează pe imaginea intuitivă a graficului unei funcţii care intersectează orice dreaptă $D : y = ax$ cu $a > 0$, construind o linie poligonală.

Considerăm dreptele $D_n : \ y = \dfrac{1}{n} x$ şi $D'_n : \ y = nx$, $n \geq 2$ şi pe ele şirurile de puncte $A_n(x_n, y_n) \in D_n$ şi $A'_n(x'_n, y'_n) \in D'_n$, precum şi $A\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, astfel ca şirurile coordonatelor să verifice relaţiile:

$$1 < x_n < x'_n < x_{n+1}, \qquad \frac{1}{2} < y_n < y'_n < y_{n+1}, \quad \forall n \geq 2.$$

Condiţiile impuse conduc la:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n}x_n < x_n < x'_n < nx'_n < \frac{1}{n+1}x_{n+1} < x_{n+1}.$$

Putem lua de exemplu $x_n = (n!)^2$ şi $x'_n = x_n + 1$.

Definim funcţia f având ca grafic linia poligonală $A, \ldots, A_n, A'_n, \ldots$. Din condiţiile impuse rezultă că funcţia este strict crescătoare.

Ecuaţia $f(x) = \frac{1}{n}x$ are soluţie în x_n, iar ecuaţia $f(x) = nx$ are soluţie în x'_n. Rezultă că pentru orice $a \in \left(\frac{1}{n}, n\right)$ ecuaţia $f(x) = ax$ are soluţie (se aplică teorema lui *Darboux* funcţiei continue $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pe intervalul $[x_n, x'_n]$). Deoarece $\bigcup_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n}, n\right) = (0, \infty)$, ecuaţia $f(x) = ax$ are soluţie pentru orice $a \in (0, \infty)$.

O soluţie asemănătoare a dat în concurs studentul *Cristian Tălău.*

Problema 2. *Fie $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ un şir de poligoane convexe astfel ca pentru orice $k \geq 1$ vârfurile poligonului P_{k+1} să fie mijloacele laturilor poligonului P_k. Să se arate că există un singur punct situat în interiorul tuturor poligoanelor.*

Nazar Agakhanov, Rusia

Soluţii. Problema a fost propusă de unul dintre cei mai prolifici propunători de probleme de cel mai înalt nivel. Ea este, în egală măsură, legată de geometrie, analiză matematică şi algebră vectorială:

1. aspectul geometric este evident din enunţul problemei (intersecţia unor figuri geometrice).

2. partea de analiză matematică se încadrează în teoremele de contracţie sau de şiruri descendente de mulţimi închise.

„Într-un spaţiu metric complet un şir descendent de mulţimi închise, cu şirul diametrelor tinzând la zero, au un unic punct comun.“

3. aspectul algebric, cel mai puţin evident, este conţinut în majoritatea soluţiilor.

Soluţia 1. Vom lucra în planul complex (se poate lucra şi vectorial în $\mathbb{R}^2$). Alegem originea planului în centrul de greutate al poligonului P_1 şi notăm cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ afixele vârfurilor poligonului P_1 ($a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$). Notăm apoi succesiv cu $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ afixele vârfurilor poligonului P_k, $k \geq 1$. Din relaţiile:

$$a_{k+1,1} = \frac{a_{k,1} + a_{k,2}}{2},\ a_{k+1,2} = \frac{a_{k,2} + a_{k,3}}{2}, \ldots, a_{k+1,n} = \frac{a_{k,n} + a_{k,1}}{2} \qquad (*)$$

rezultă că toate poligoanele au centrul de greutate în origine, iar pentru poligonul

P_n obţinem afixele vârfurilor

$$\begin{aligned}
a_{n,1} &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(a_1 + C_{n-1}^1 a_2 + C_{n-1}^2 a_3 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} a_{n-1} + a_n\right)\\
a_{n,2} &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(a_2 + C_{n-1}^1 a_3 + C_{n-1}^2 a_4 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} a_n + a_1\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n,n} &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(a_n + C_{n-1}^1 a_1 + C_{n-1}^2 a_2 + \cdots + C_{n-1}^{n-2} a_{n-2} + a_{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Folosind în toate relaţiile condiţia $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$, avem:

$$\begin{aligned}
|a_{n,1}| &\leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(\left(C_{n-1}^1 - 1\right)|a_2| + \left(C_{n-1}^2 - 1\right)|a_3| + \cdots + \left(C_{n-1}^{n-2} - 1\right)|a_{n-1}|\right)\\
|a_{n,2}| &\leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(\left(C_{n-1}^1 - 1\right)|a_3| + \left(C_{n-1}^2 - 1\right)|a_4| + \cdots + \left(C_{n-1}^{n-2} - 1\right)|a_n|\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
|a_{n,n}| &\leq \frac{1}{2^{n-1}}\left(\left(C_{n-1}^1 - 1\right)|a_1| + \left(C_{n-1}^2 - 1\right)|a_2| + \cdots + \left(C_{n-1}^{n-2} - 1\right)|a_{n-2}|\right).
\end{aligned}$$

Adunând aceste relaţii obţinem:

$$S(P_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}(2^{n-1} - n)S(P_1) = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)S(P_1),$$

unde am notat cu $S(P_k)$ suma distanţelor de la origine (centrul de greutate) la vârfurile poligonului P_k, $k \geq 1$.

Funcţia S se comportă ca o contracţie (din $n-1$ în $n-1$), cu raţia $q = 1 - \dfrac{n}{2^{n-1}} < 1$ şi atunci $S(P_{m(n-1)+1}) \leq q^m S(P_1)$, în care dacă trecem la limită cu $m \to \infty$ obţinem:

$$\lim_{m\to\infty} S(P_{m(n-1)+1}) = 0,$$

deci:

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,1} = \lim_{k\to\infty} a_{k,2} = \cdots = \lim_{k\to\infty} a_{k,n} = 0.$$

Aceasta deoarece şirul $S(P_k)$ este descrescător, căci:

$$\begin{aligned}
S(P_{k+1}) &= |a_{k+1,1}| + |a_{k+1,2}| + \cdots + |a_{k+1,n}|\\
&= \left|\frac{a_{k,1} + a_{k,2}}{2}\right| + \left|\frac{a_{k,2} + a_{k,3}}{2}\right| + \cdots + \left|\frac{a_{k,n} + a_{k,1}}{2}\right|\\
&\leq \frac{1}{2}((|a_{k,1}| + |a_{k,2}|) + (|a_{k,2}| + |a_{k,3}|) + \cdots + (|a_{k,n}| + |a_{k,1}|))\\
&= |a_{k,1}| + |a_{k,2}| + \cdots + |a_{k,n}| = S(P_k).
\end{aligned}$$

Punctul comun tuturor poligoanelor este atunci punctul la care converg vârfurile poligoanelor (centrul de greutate comun tuturor).

Remarcă.[1)] Această problemă este de fapt din folclor. Ne referim la (Schoenberg, I.J., *Privelişti Matematice*, Editura Tehnică, 1989). Fiind dat un poligon (convex)

[1)] Remarca şi Soluţia 2 sunt introduse de referent.

Π în plan, poligonul Π' format de mijloacele laturilor lui Π este cunoscut sub numele de *poligon Kasner* asociat lui Π şi va fi notat prin $\Pi' = \mathcal{K}\Pi$, deci $\Pi^{(m)} = \mathcal{K}^m\Pi$. *I.J. Schoenberg* sugerează folosirea metodei seriilor Fourier finite către rezultatul enunţat, drept care vom face mai întâi o scurtă prezentare teoretică a acestui subiect, după *Schoenberg*.[2)]

Să considerăm, pentru $0 \le k \le n-1$, numerele complexe z_k, şi $\omega_k = \mathrm{e}^{2\pi ik/n}$, rădăcinile complexe de ordin n ale unităţii. Problema este de a determina numerele complexe α_j (coeficienţii Fourier) astfel încât

$$z_k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \omega_k^j.$$

(Deoarece determinantul sistemului este *Vandermonde*, sistemul are soluţie unică, însă putem obţine o precizie mai mare din relaţii de ortogonalitate.)

Dar $\omega_k = \omega^k$. Atunci, pentru $0 \le \ell \le n-1$, vom avea:

$$z_k \omega_\ell^{-k} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \omega^{k(j-\ell)},$$

deci:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z_k\omega_\ell^{-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j\omega^{k(j-\ell)} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k(j-\ell)} = \alpha_\ell,$$

aşadar coeficienţii Fourier există în mod unic.

Finalmente vom deduce identitatea lui Parseval

$$n\sum_{\ell=0}^{n-1}|\alpha_\ell|^2 = n\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_\ell\overline{\alpha_\ell} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_k\omega_\ell^{-k}\right)\overline{\left(\sum_{j=0}^{n-1} z_j\omega_\ell^{-j}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} z_k\overline{z_j}\omega_\ell^{j-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} z_k\overline{z_j}\sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{\ell(j-k)} = \sum_{k=0}^{n-1}|z_k|^2.$$

Soluţia 2. În mod evident problema revine la a fi date numerele complexe z_k indexate în $\mathbb{Z}_n$ (afixele vârfurilor poligonului iniţial), a defini $f(z_k) = \dfrac{z_k + z_{k+1}}{2}$, şi a analiza comportamentul iteratelor $f^m(z_k)$. Pentru uşurinţa calculelor, să alegem originea în centroidul sistemului de puncte (care nici măcar nu trebuie a fi în poziţie

---

[2)] Acelaşi autor foloseşte această metodă pentru a demonstra proprietatea *izoperimetrică*:

Teoremă (J. Steiner). *Dintre toate poligoanele cu n laturi în plan, de acelaşi perimetru L, cel de arie maximă* $A = L^2/(4n\tan\frac{\pi}{n})$ *este poligonul regulat.*

Mai mult, enunţă şi demonstrează:

Teoremă (L. Fejes Tôth). *Pentru* $m \to \infty$, *o imagine afină convenabilă a lui* $\mathcal{K}^m\Pi$ *converge către un poligon regulat sau stelat regulat.*

convexă), adică $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$. Atunci, folosind coeficienţii Fourier:

$$f(z_k) = \frac{z_k + z_{k+1}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \left(\omega_k^j + \omega_{k+1}^j\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \left(1 + \omega^j\right) \omega_k^j.$$

Aceasta arată că, coeficienţii Fourier pentru $f(z_k)$ sunt:

$$\beta_j = \frac{1+\omega^j}{2}\alpha_j = \alpha_j \varepsilon^j \cos\frac{j\pi}{n},$$

unde $\varepsilon = \mathrm{e}^{\pi i/n}$, de modul unitate. Să observăm că $\alpha_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z_k \omega_0^{-k} = 0$, de unde şi $\beta_0 = 0$. Atunci, pentru $0 \le j \le n-1$

$$|\beta_j|^2 = |\alpha_j|^2 \cos^2\frac{j\pi}{n} \le |\alpha_j|^2 \cos^2\frac{\pi}{n},$$

deci, utilizând identitatea lui Parseval:

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f(z_j)|^2 = n\sum_{j=0}^{n-1} |\beta_j|^2 \le n\cos^2\frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_j|^2 = \cos^2\frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |z_j|^2.$$

Prin iterare se obţine:

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f^m(z_j)|^2 \le \cos^{2m}\frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |z_j|^2 \to 0 \text{ când } m \to \infty.$$

Prin urmare iteratele se contractă către centroidul sistemului de puncte.

Pentru a reveni totuşi cu picioarele pe pământ, şi a nu crede că avem realmente nevoie de astfel de metode avansate, iată o soluţie alternativă, total elementară, dată de *Marius Tiba*, elev pe atunci în clasa a IX-a. Folosind formula medianei într-un triunghi ABC (cu notaţiile obişnuite):

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

obţinem prin însumare:

$$\sum_{i=1}^{n} d_{k+1,i}^2 = \sum_{i=1}^{n} d_{k,i}^2 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \ell_{k,i}^2 \le \sum_{i=1}^{n} d_{k,i}^2 - \frac{1}{4n}\left(\sum_{i=1}^{n} \ell_{k,i}\right)^2,$$

unde $\ell_{k,i}$ sunt lungimile laturilor lui P_k, iar $d_{k,i}$ sunt distanţele de la centroid la vârfuri. Dacă, în afară de centroidul G, ar exista un alt punct X comun interioarelor tuturor poligoanelor, perimetrele lor ar fi toate mai mari decât GX, deci prin iterarea relaţiei de mai sus:

$$\sum_{i=1}^{n} d_{k+1,i}^2 < \sum_{i=1}^{n} d_{1,i}^2 - \frac{k}{4n}GX^2,$$

absurd pentru k suficient de mare.

Soluţia 3. Din relaţiile $(*)$, notând cu A matricea:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

şi cu:

$$X_k = \begin{bmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{bmatrix},$$

obţinem relaţia de recurenţă

$$X_{k+1} = A \cdot X_k,$$

din care

$$X_{k+1} = A^k \cdot X_1, \mathbb{Q}k \geq 1.$$

Matricea A este o matrice circulară

$$A = C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)$$

cu valorile proprii $\lambda_i = f(\varepsilon_i)$, $i = \overline{0, n-1}$, unde:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

şi $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ sunt rădăcinile de ordin n ale unităţii. Avem:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\mathbb{Q}\text{şi} \quad |\lambda_i| = \left|\frac{1+\varepsilon_i}{2}\right| < 1, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Orice matrice circulară este diagonalizabilă, iar matricea de pasaj este matricea Vandermonde:

$$P = V(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}),$$

deci:

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \quad \text{sau} \quad A = P \cdot D \cdot P^{-1},$$

unde:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} \end{bmatrix}, \quad D^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1}^k \end{bmatrix}.$$

Trecând la limită în relaţia $A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}$ obţinem:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Deoarece

$$P^{-1} = \frac{1}{n} V(\varepsilon_0, \varepsilon_1^{-1}, \ldots, \varepsilon_{n-1}^{-1})$$

obţinem:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

şi deci

$$\lim_{k\to\infty} X_k = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

unde $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ (centrul de greutate al poligonului iniţial).

Observaţie. Din convergenţa şirurilor $(\lambda_0^k)_{k\geq 1}, (\lambda_1^k)_{k\geq 1}, \ldots, (\lambda_{n-1}^k)_{k\geq 1}$ rezultă convergenţa şirului de matrice $(A^k)_{k\geq 1}$, şi implicit a şirului vârfurilor $(X_k)_{k\geq 1}$ ale poligoanelor. Din relaţia $X_{k+1} = A \cdot X_k$ obţinem $X_0 = A \cdot X_0$, cu $X_0 = \lim\limits_{k\to\infty} X_k$, deci

$$(A - 1I_n) \cdot X_0 = 0.$$

Rezultă că vectorul limită X_0 este vector propriu pentru A, corespunzător valorii proprii $\lambda_0 = 1$. Prin calcul direct

$$X_0 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

este un vector propriu cu toate componentele egale. Acest raţionament simplifică Soluţia 3.

Soluţia 3 a fost dată (incomplet) doar de doi studenţi din concurs, şi aceştia din România (*Octavian Ganea* de la Universitatea Politehnică din Bucureşti şi *Ciprian Oprişa* de la Universitatea Tehnică din Cluj).

Problema 3. *Să se determine toate funcţiile surjective*:

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \{0, 1, \ldots, n\}$$

cu proprietatea $f(X\cdot Y)\le \min\{f(X),f(Y)\}$, *pentru orice* $X,Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Vasile Pop, România

Soluţie. Problema conţine o caracterizare a rangului unei matrice printr-o inecuaţie funcţională.

Funcţia $f(X)=\operatorname{rang}(X)$ verifică condiţia. Vom arăta că ea este unică. Dacă $X\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ şi $Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ atunci:

$$f(X\cdot Y)\le f(Y)\quad \text{şi}\quad f(Y)=f(X^{-1}\cdot(X\cdot Y))\le f(X\cdot Y),$$

deci $f(X\cdot Y)=f(Y)$ şi analog $f(Y\cdot X)=f(Y)$, pentru orice$Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $X\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Se ştie că orice matrice $Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang k poate fi adusă prin transformări elementare pe linii şi coloane la matricea $J_k=\left[\begin{array}{c|c} I_k & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right]$, deci există matricele X şi Z din $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $Y=X\cdot J_k\cdot Z$. Din cele de mai sus rezultă $f(Y)=f(J_k)$. Este suficient să definim funcţia f pe matricele J_k, $k=\overline{0,n}$. Din $J_k\cdot J_{k+1}=J_k$ rezultă $f(J_k)\le f(J_{k+1})$ şi folosind surjectivitatea funcţiei f rezultă $f(J_0)=0$, $f(J_1)=1,\ \dots,\ f(J_n)=n$. Deci $f(Y)=\operatorname{rang}(Y)$, pentru orice $Y\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Problema 4. *Fie n un întreg strict pozitiv şi $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea*:

$$\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x=1$$

pentru orice $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Să se arate că:

$$\int_0^1 f(x)^2\mathrm{d}x\ge n^2.$$

Mircea Dan Rus, România

Soluţie. Domeniul general al problemei este cel al spaţiilor vectoriale dotate cu produs scalar $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ (spaţii de tip prehilbertian sau euclidian). Fiind daţi vectorii liniar independenţi $v_1,v_2,\dots,v_n$ se cere să se determine vectorul v de normă minimă care verifică condiţiile

$$\langle v,v_1\rangle=\alpha_1,\quad \langle v,v_2\rangle=\alpha_2,\quad \dots,\quad \langle v,v_n\rangle=\alpha_n,$$

unde $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ sunt scalari fixaţi. Cu un raţionament general se poate ajunge la concluzia că vectorul care realizează minimul este unic şi se află în spaţiul generat de vectorii $v_1,v_2,\dots,v_n$ (Lema 1, cu demonstraţie la sfârşitul soluţiei problemei), spaţiu care în cazul nostru este cel al polinoamelor de grad cel mult $n-1$.

Problema s-a dovedit a fi cea mai dificilă din concurs şi dificultatea constă în calculul efectiv al normei minime.[1)]

[1)] Totuşi faptul că valoarea normei minime este atinsă nu se cerea în problemă. (N.A.)

Există[1)] polinomul unic $p(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$ care satisface relaţiile:

$$\int\limits_0^1 x^k p(x)\mathrm{d}x = 1, \quad 0 \leq k \leq n-1. \tag{1}$$

Prin urmare pentru orice $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ avem:

$$\int\limits_0^1 x^k (f(x) - p(x))\mathrm{d}x = 0,$$

şi de aici

$$\int\limits_0^1 p(x)(f(x) - p(x))\mathrm{d}x = 0.$$

Avem atunci

$$\int\limits_0^1 (f(x) - p(x))^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)(f(x) - p(x))\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x,$$

de unde rezultă:

$$\int\limits_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Arătăm că $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2$. Relaţiile (1) pot fi scrise sub forma

$$\frac{a_1}{k+1} + \frac{a_2}{k+2} + \cdots + \frac{a_n}{k+n} = 1, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Rezultă că funcţia raţională:

$$r(x) = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \cdots + \frac{a_n}{x+n} - 1$$

are rădăcinile $0, 1, \ldots, n-1$.

Avem:

$$r(x) = \frac{q(x) - (x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},$$

unde q este un polinom de gradul $n-1$. Coeficientul lui x^{n-1} în q este egal cu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Numărătorul lui r are rădăcinile $0, 1, \ldots, n-1$, de unde rezultă că:

$$q(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n) - x(x-1)\cdots(x-(n-1)).$$

[1)] Vezi Lema 1, şi finalul soluţiei. Reluăm totuşi argumentarea minimalităţii. (N.A.)

Din ultima expresie a lui q rezultă că coeficientul lui x^{n-1} în q este:

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2.$$

Obţinem:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2$$

şi mai mult, egalitate dacă şi numai dacă $f=p$.

Să observăm că scrierea în fracţii simple a funcţiei raţionale:

$$-\frac{x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

furnizează chiar coeficienţii polinomului p, deci aceasta este o altă metodă de a-i proba existenţa.

Demonstraţia Lemei 1. Să notăm cu V_k subspaţiul generat în V de vectorii liniar independenţi (deci nenuli) $v_1,v_2,\dots,v_k$, pentru $1\le k\le n$.

Pentru probarea existenţei procedăm prin inducţie. Pentru $n=1$ rezultatul este trivial; luăm $v=(\alpha_1/||v_1||^2)v_1$. Fie $u\in V_{n-1}$ dat de ipoteza de inducţie pentru $n-1$, şi $w\in V_n^*$, ortogonal lui V_{n-1}. Avem $\langle w,v_n\rangle\neq 0$, căci altfel w ar fi ortogonal spaţiului V_n în care se află, dar el este nenul. Fie atunci $\lambda=\dfrac{\alpha_n-\langle u,v_n\rangle}{\langle w,v_n\rangle}$, şi $v=u+\lambda w$, deci $v\in V_n$. Dar atunci $\langle v,v_k\rangle=\langle u,v_k\rangle+\lambda\langle w,v_k\rangle=\alpha_k$, pentru $1\le k\le n-1$, şi $\langle v,v_n\rangle=\langle u,v_n\rangle+\lambda\langle w,v_n\rangle=\alpha_n$.

Unicitatea provine din faptul că pentru un alt $v'\in V_n$, şi cu proprietăţile cerute, am avea $v'-v$ ortogonal spaţiului V_n în care se află, deci nul, deci $v'=v$.

În ce priveşte minimalitatea, fie $f\in V$ oarecare cu proprietăţile cerute, deci $f-v$ este ortogonal spaţiului V_n, în care se află vectorul v. Atunci:

$$||f||^2=||v+(f-v)||^2=\langle v+(f-v),v+(f-v)\rangle=$$
$$=||v||^2+2\langle v,f-v\rangle+||f-v||^2=||v||^2+||f-v||^2\ge||v||^2,$$

cu egalitate numai pentru $f-v=0$, deci $f=v$.

În cazul de faţă, monoamele $1,x,\dots,x^{n-1}$ sunt evident liniar independente, deci există un polinom unic $p(x)$ de grad cel mult $n-1$, cu proprietăţile cerute, adică:

$$\langle p(x),x^k\rangle=\int_0^1 x^k p(x)\mathrm{d}x=1,\quad 0\le k\le n-1,$$

şi de normă $||p(x)||^2=\displaystyle\int_0^1 p(x)^2\mathrm{d}x$ minimă printre toate funcţiile continue cu proprietatea de mai sus.

Univ. Tehnică din Cluj-Napoca
Str. C. Daicoviciu 15,
400020, Cluj-Napoca, România
vasile.pop@math.utcluj.ro

Univ. Tehnică din Cluj-Napoca
Str. C. Daicoviciu 15,
400020, Cluj-Napoca, România
popa.dorian@math.utcluj.ro

Subiectele date la Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică Concursul de admitere iulie 2008

Domeniul de licenţă – Informatică

I. Algebră. 1. Fie matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

a) Să se arate că $A^2 = 3A - 2I_2$, unde:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Să se arate că A este inversabilă şi să se calculeze A^{-1}.
c) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.
d) Să se determine matricile $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = A$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ considerăm funcţia $f_n : (2, \infty) \to (2, \infty)$,

$$f_n(x) = 2 + (x-2)^{2^n}.$$

Să se arate că:
a) $f_m \circ f_n = f_{m+n}$ pentru rice $m, n \in \mathbb{Z}$.
b) Mulţimea $G = \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ împreună cu operaţia de compunere a funcţiilor este grup comutativ.
c) Grupul $(G, \circ)$ este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbb{Z}, +)$ al numerelor întregi.

II. Analiză. 1. Se consideră funcţia $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
a) Să se calculeze f'.
b) Să se afle maximul funcţiei f.
c) Să se studieze monotonia şirului $(x_n)_{n \geq 3}$, $x_n = n^{1/n}$.

2. Se consideră fucţia $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0] \\ \sin x, & x \in (0, 1]. \end{cases}$
a) Să se studieze continuitatea funcţiei g.
b) Să se studieze derivabilitatea funcţiei g.
c) Să se arate că funcţia g admite primitive, să se afle o primitivă a ei şi să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x$.

III. Geometrie. 1. Fie $\mathcal{C}(O, R)$ un cerc fixat de centru O şi rază R şi două cercuri $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ şi $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ tangente exterior între ele şi ambele tangente interior cercului fixat. Să se arate că triunghiul OO_1O_2 are perimetru constant.

2. În planul xOy, se consideră ecuaţia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

a) Să se arate că această ecuaţie rerezintă un cerc căruia să i se determine raza şi coordonatele centrului.

b) Să se arate că dreapta de ecuaţie $12x - 5y + 19 = 0$ este tangentă la cerc şi să se determine coordonatele punctului de tangenţă.

c) Să se scrie ecuaţiile laturilor pătratului circumscris cercului, în care una dntre laturi este pe dreapta de la punctul b).

IV. Informatică. 1. Se numeşte subsecvenţă a unui vector V cu n elemente întregi un vector cu cel puţin un element şi cel mult n elemente care se găsesc pe poziţii consecutive în vectorul V. Să se scrie un program în *Pascal/C/C++* care citeşte de la tastatură numărul natural N şi vectorul V având n elemente întregi şi afişează subsecvenţa lui V având suma elementelor maximă.

2. Se citesc de la tastatură numu arul natural n şi şirul numerelor naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Să se scrie un program în *Pascal/C/C++* care afişează indicii i şi j care începlinesc simultan condiţiile:

a) $1 \leq i < j \leq n$;

b) $a_i > a_k$ şi $a_j > a_k$, pentru orice k, $i + 1 \leq k \leq j - 1$;

c) diferenţa $j - 1$ este maximă .

3. Să se calculeze complexitatea timp a programelor propuse pentru problemele de mai sus. În cazul în care niciuna dintre soluţiile propuse nu are cmplexitate liniară , să se scrie un program *Pascal/C/C++* de complexitate timp liniară pentru una din cele două prob leme de mai sus, la alegere.

Precizări. Pentru toate problemele de mai sus se presupune că datele sunt valabile şi $3 \leq n \geq 1000$. Se vor descrie informal detaliile implementării oricărui program: semnificaţia variabilelor; a structurilor de date, a blocurilor de program, a condiţiilor.

Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Studenţesc Traian Lalescu – Tradiţii şi Modernităţi

DE ANDREI HALANAY

Iniţiat în anii '70 din secolul trecut, concursul studenţesc de matematică „Traian Lalescu" devenise un moment important în viaţa universitară (de rezultatele obţinute ajungea să depindă chiar numărul de locuri repartizate universitarilor). Întrerupt o lungă perioadă după 1990, concursul a fost reluat la nivelul Universităţii Politehnice din Bucureşti (U.P.B.), iar doi ani mai târziu faza locală a fost urmată de una interuniversitară cu participarea la început a UPB şi a Academiei Militare (A.T.M.), acestora alăturându-li-se, în anii rmători, Universitatea Tehnică de Construcţii (U.T.C.). Beneficiind de sprijinul financiar al Ministerului Educaţiei şi Cercetării, în anul 2008 a fost organizată, din nou, o etapă naţională. Au participat studenţi de la 12 universităţi: U.P.B., Universtatea din Bucureşti, A.T.M., U.T.C., Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj, Universitatea de Vest din Timişoara, Universitatea Al. I. Cuza din Iaşi, Universitatea Tehnică Gh. Asachi din Iaşi, Universitatea Constantin Brâncuşi din Tg. Jiu, Academia Navaă Mircea cel Bătrân din Constanţa, Universitatea Maritimă din Constanţa.

Spre deosebire de etapele anterioare ale concursului naţional, în spiritul nevoii de modernizare a învăţământului superior românesc, în acest an a fost introdusă în cadrul concursului şi activitatea de cercetare ştiinţifică studenţească. Structurată pe 3 secţiuni (I: Analiză, Algebră, Geometrie; II: Ecuaţii diferenţiale şi Matematici aplicate şi III: Informatică) sesiunea a cuprins peste 30 de comunicări ştiinţifice studenţec sti. Dintre acestea s-au remarcat cele ale studenţilor *Alexandru Tomescu* de la Facultatea de Matematică, Universitatea din Bucureşti: „Sortarea bitonică cu modele naturale de calcul“, coonducător ştiinţific conf. dr. *R. Ceterchi*, *Cezar Lupu* de la Facultatea de Matematică, Universitatea din Bucureşti: „Remarci asupra unei inegalităţi elementare echivalentă cu ipoteza lui Riemann“, conducător ştiinţific prof. dr. *Liviu Ornea*, *Alin Galatan* de la Facultatea de Matematică, Universitatea din Bucureşti: „Fractali“conducător ştiinţific prof. dr. *Radu Gologan*, *Claudia Zaharia*, Facultatea de Matematică, Univ. de Vest, Timişoara: „Asupra teoremelor lui Aoki şi Rassias de stabilitate a ecuaţiior funcţionale“, conducător ştiinţific prof. dr. *V. Radu*, *Alexandru Szoke* de la Facultatea de Matematică, Universitatea din Bucureşti: „Aspecte ale implementării reţelelor de procesoare biologice“, conducător ştiinţific prof. dr. *V. Mitrana*.

Concursul a beneficiat de sponsorizări din partea Inspectoratului Şcolar al Municipiului Bucureşti şi din partea Societăţii de Ştiinţe Matematice din România. Fundaţia „Traian Lalescu“, prin participarea directă a doamnei *Smaranda Lalescu*, nepoata marelui matematician, a avut o contribuţie importantă la reuşita manifestării prin acordarea unui premiu de excelenţă (câştigat de *Alexandru Tomescu*) şi acordarea de diplome celorlalţi premianţi, însoţite de medalia comemorativă „Traian Lalescu – 125 de ani de la naştere“ şi de volumul „Traian Lalescu – un nume peste ani“.

Succesul acestei manifestări naţionale nu ar fi fost posibil fără participarea entuziastă şi dezinteresată a numeroase cadre didactice. De menţionat aportul domnilor prof. dr. *O. Stănăşilă*, membru al juriului la secţiunea I şi preşedintele juriului de contestaţii, prof. dr. *S. Dăscălescu*, prof. dr. *V. Bălan*, conf. dr. *C. Gherghe*, membrii în juriul secţiunii I, prof. dr. *I. Roşca*, prof. dr. *V. Rasvan*, conf. dr. *R. Constantin*, membrii în juriul secţiunii II, prof. dr. *A. Atanasiu*, conf. dr. *V. Rasvan*, conf. dr. *M. Olteanu*, conf. dr. *R. Ştefan*, membrii în juriul secţiunii III, prof. dr.*Radu Gologan*, prof. dr. *V. Prepeliţă*, lect. dr. *A. Toma*, conf. dr. *V. Ţigoiu* implicaţi în detaliile organizatorice.

Trebuie menţionat, de asemenea, rolul U.P.B., al doamnei rector prof. dr. ing. *Ecaterina Andronescu*, fără sprijinul căreia acest concurs nu ar fi putut fi organizat.

Festivitatea de acordare a premiilor, beneficiind de prezenţa doamnei rector *E. Andronescu*, a domnului *V. Brânzănescu*, director al Institutului de Matematică al Academiei Române, a domnului *C. Udrişte*, decan al Facultăţii de Ştiinţe Aplicate din U.P.B., a domnului *D. Ştefan*, decan al Faultăţii de Matematică din Universitatea din Bucureşti, a domnului *I. Ciucă*, director în Ministerul Educaţiei şi Cercetării, a domnului *D. Ştefănescu*, vicepreşedinte al S.S.M.R, s-a constituit într-o veritabilă pledoarie pentru excelenţa în învăţământul superior românesc, cu precădere în predarea şi învăţarea matematicii.

Pentru anii următori se va urmării perfecţionarea modului de organizatre, mărirea numărului universităţilor participante şi creşterea calităţii şi a numărului comunicărilor ştiinţifice prezentate.

Concursul Traian Lalescu – Faza naţională

Mai 2008

Sesiunea de comunicări ştiinţifice ale studenţilor

Secţiunea 1: Analiză, Algebră, geometrie

Juriu: Prof. dr. *O. Sănăşilă* FSA, UPB
Prof. dr. *S. Dăscălescu* FMI, UB
Conf. dr. *C. Gherghe* FMI, UB
Prof. dr. *V. Bălan* FSA, UPB.

Premiul I

Cezar Lupu, anul IV, Facultatea de Matematică şi Informatică, „Remarci asupra unei inegalităţi elementare echivalentă cu ipoteza lui Riemann"
Coordonator: Prof. dr. *Liviu Ornea*

Premiul II

Cezar Lupu, *Cosmin Pohoaţă*, anul IV, Facultatea de Matematică şi Informatică, „O rafinare a inegalităţii HadwigerFisher"
Coordonator: Prof. dr. *Liviu Ornea*

Premiul III

Marius Bucur, Facultatea de Automatică şi Calculatoare, „Teoria grupurilor în analiza algoritmilor de criptare"
Coordonator: Conf. dr. *Radu Constantin*

Secţiunea 2: Ecuaţii şi Matematici Aplicate

Juriu: Prof. dr. *I. Roşca* FMI, UB
Prof. dr. *V. Rasvan* Facultatrea de Automatică., Univ. din Craiova
Conf. dr. *R. Constantin* Facultatea de ştiinţe aplicate, U.P.B.

Premiul I

Alin Galatan, anul II, Facultatea de Matematică, Univ. Bucureşti, „Fractali"
Coordonator: Prof. dr. *Radu Gologan*

Premiul II

Claudia Zaharia, anul IV, Facultatea de Matematică, Univ. de Vest, Timişoara, „Asupra teoremelor lui Aoki şi Rassias de stabilitate a ecuaţiior funcţionale"

Coordonator: Prof. dr. *V. Radu*

Premiul III

Simona Roxana Costache, *Elena Biriş*, anul III, Facultatea de Ştiinţe Aplicate, UPB, „Metoda Monte Carlo şi aplicaţii"

Coordonator: Prof. dr. *V. Târcolea*

Alexandra Podiuc, anul III, FILS; *George Olaru*, anul II, Facultatea de Automatică, UPB: „2D continuous-Discrete Laplace Transfomrations and Applications"

Coordonator: Prof. dr. *V. Prepeliţă*; Asist. dr. *M. Pârvan*

Răzvan Ionescu, anul II, FILS; *Andrei Chirilă*, anul II, FILS, UPB: „Stability of linear sstem – Math. speialized software"

Coordonator: Prof. dr. *V. Prepeliţă*

Secţiunea 3: Informatică

Juriu: Prof. dr. *A. Atanasiu* FMI, UB
Conf. dr. *V. Rasvan* Facultatea de Automatică., U. P. B.
Conf. dr. *M. Olteanu* Facultatea de ştiinţe aplicate, U.P.B.

Premiul I şi Marele Premiu al Fundaţiei „Traian Lalescu"

Aexandru Tomescu, anul IV, Facultatea de Matematică şi Informatică, Univ. Bucureşti, „Sortarea Bitonică cu modele naturale de calcul"

Coordonator: Conf. dr. *R. Ceterchi*

Premiul II

Alexandru Szoke, anul IV, Facultatea de Matematică, , „Aspecte ale implementării reţelelor de procesoare biologice"

Coordonator: Prof. dr. *V. Mitrana*

Premiul III

Daniel Cernat, anul II, Master Catedra Matematici III, UPB, „Tehnici de watermarking în procesarea imaginilor digitale"

Coordonator: Prof. dr. *V. Bălan*

Alexandra Rădoi, anul II, Facultatea ETTI, UPB: „Analiza Wavelet. Aplicaţii: Recunoaşterea formelor"

Coordonatori: Prof. dr. *V. Lăzărescu*; Prof. dr. *O. Stănăşilă*

Menţiune

Liviu Drăgan, *Cezara Florescu*, anul I, Facultatea ETTI, UPB: „Aplicaţii ale geometriei fractale în domeniul analizei informaţiei video"

Coordonator: Conf. dr. *O. Şandru*

Concurs de rezolvat probleme

Secţiunea A: Matematică

Premiul I: *Turea Lucian* – Univ. Bucureşti; *Bogoşel Beniamin* – Univ. de Vest Timişoara;

Premiul II: *Vlad Emanuel* – Univ. Bucureşti; *Galatan Alin* – Univ. Bucureşti; *Popa Tiberiu* – Univ. Babeş-Bolyai Cluj;

Premiul III: *Gavrus Cristian* – Univ. Bucureşti; *Stratulat Ioan Tudor* – Univ. Tehnică Gh. Asachi, Iaşi; *Papară Nicolae – Univ. Babeş-Bolyai Cluj; Vâlculescu Adrian Claudiu* – Univ. Babeş-Bolyai Cluj;

Menţiuni: *Bucur Marius* – Univ. Politehnica din Bucureşti; *Farcaş Csaba* – Univ. Babeş-Bolyai Cluj.

Secţiunea B: Profil electric, Anul I

Premiul I: *Oprişa Ciprian* – Univ. Tehnică Cluj;

Premiul II: *Florescu Dorian* – Univ. Tehnică Gh. Asachi, Iaşi.

Premiul III: *Nagy Aliz-Eva* – Univ. Tehnică Cluj;

Menţiuni: *Ferchiu Ştefan* – Univ. Politehnica din Bucureşti; *Apostol Ştefan* – Univ. Politehnica din Bucureşti; *Ciobotaru-Hriscu Iulian* – Acad. Tehnică Militară din Bucureşti.

Secţiunea B: Profil electric, Anul II

Premiul I: *Bogdea Lavinia* – Univ. C. Brâncuşi din Tg. Jiu;; *Boia Rodica* – Univ. Politehnica din Bucureşti; *Carp Andrei* – Univ. Tehnică Gh. Asachi, Iaşi;

Premiul II: *Alecu Adrian* – Univ. Tehnică Gh. Asachi, Iaşi;*Podiuc Alexandra* – Univ. Politehnica din Bucureşti;

Premiul III: *Popescu Ionuţ* – Univ. C. Brâncuşi din Tg. Jiu;

Menţiuni: *Miu Tudor* – Univ. Politehnica din Bucureşti; *Stăniloiu Roxana* – Univ. C. Brâncuşi din Tg. Jiu; *Daca Adina* – Univ. Politehnica din Bucureşti;

Secţiunea C: Profil mecanic, Anul I

Premiul I: *Savastre Simona* – Univ. Tehnică de Construcţii, Bucureşti;

Premiul II: *Acsinia Elena* – Univ. Tehnică de Construcţii, Bucureşti; *Cârje Andrei* – Univ. Tehnică de Construcţii, Bucureşti;

Premiul III: *Cojocaru Ruxandra* – Univ. Politehnica din Bucureşti;

Menţiuni: *Spiridon Vasile* Acad. Navală Mircea cel Bătrân, Constanţa.

Secţiunea C: Profil mecanic, Anul II

Premiul I: *Frumosu Flavia* – Univ. Politehnica din Bucureşti;

Premiul II: *Popescu Alexandra* – Univ. Politehnica din Bucureşti;

Premiul III: *Turi-Damian Sorin* – Univ. Politehnica din Bucureşti;

Menţiuni: *Cazan Costică* – Univ. Tehnică Gh. Asachi, Iaşi; *Crasmaru Ionuţ* – Univ. Tehnică Gh. Asachi, Iaşi.

Concursul de matematică „Traian Lalescu“,

Faza naţională 2008, secţiunea Matematică (A)

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Să se arate că A este nilpotentă dacă şi numai dacă $\operatorname{tr}(A^k) = 0$, oricare ar fi $k \in N^\star$; ($\operatorname{tr}(A)$ este urma matricei A).

2. Fie E o mulţime nevidă a intervalului $(0, \infty)$ care indeplineşte condiţiile:
(i) $\dfrac{x}{2} \in E$, oricare ar fi $x \in E$.
(ii) $\sqrt{x^2 + y^2} \in E$, oricare ar fi $x, y \in E$.
Se cere:
(a) Să se dea un exemplu de multime $E \neq (0, \infty)$ care indeplineşte condiţiile (i) si (ii).
(b) Să se arate că $\overline{E} = [0, \infty)$; ($\overline{E}$ este închiderea topologică a lui E).

3. Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ o submulţime deschisă care conţine discul unitate închis D şi fie $f : U \mapsto \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1 cu proprietatea:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right| \leq 1 \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right| \leq 1, \quad \forall P \in D.$$

Să se arate că dacă $\{M_1, M_2, ..., M_n\}$ este o mulţime de puncte din D cu centrul de greutate în O, atunci pentru orice punct $P \in D$ este adevarată inegalitatea:

$$\left| f(P) - \frac{1}{n} \sum \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \right| \leq 2.$$

4. Fie Δ mulţimea plană formată din punctele interioare şi laturile unui dreptunghi $ABCD$ de laturi $AB = a$ şi $BC = b$. Se defineşte funcţia $f : \Delta \mapsto \mathbb{R}$ prin:

$$f(P) = PA + PB + PC + PD.$$

Să se calculeze mulţimea valorilor funcţiei f.

NOTE MATEMATICE

Legături neaşteptate

de Marian Tetiva

Abstract

Key words:
M.S.C.: .

1. Fie a, b, c numere reale şi să considerăm polinomul:

$$f = X^2 - (a^2 + b^2 + c^2)X + 2abc,$$

despre care afirmăm că are toate rădăcinile reale. Dar un polinom de gradul al treilea cu toate rădăcinile reale are discriminantul nenegativ, deci (discriminantul unui polinom de forma $X^3 + pX + q$ este $-4p^3 - 27q^2$) obţinem:

$$-4\left(-\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\right)^3 - 27(2abc)^2 \geq 0,$$

care se transformă imediat în:

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3 \geq 27(2abc)^2.$$

Cu alte cuvinte, am găsit exact inegalitatea mediilor (pentru numerele nenegative a^2, b^2, c^2)!

2. Polinomul f de mai sus ne mai rezervă o surpriză. Anume să presupunem că a, b, c sunt astfel încât:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1.$$

Această egalitate conduce la $f(-1) = 0$, deci o rădăcină a lui f este -1. Pentru celelalte două, fie ele x_1 şi x_2, avem atunci:

$$x_1 + x_2 = 1 \quad mi \quad x_1x_2 = 2abc,$$

deci inegalitatea $(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2$ (care exprimă tot un discriminant ≥ 0, anume discriminantul polinomului de gradul al doilea care are rădăcinile x_1 şi x_2) devine $1 \geq 8abc$. Aşadar, am arătat că pentru orice numere reale a, b şi c care îndeplinesc condiţia $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ are loc inegalitatea $8abc \leq 1$. Pentru $a = \sin\dfrac{A}{2}$, $b = \sin\dfrac{B}{2}$, $c = \sin C2$, unde ABC este un triunghi oarecare (se ştie că sinusurile jumătăţilor unghiurilor verifică această relaţie) regăsim inegalitatea:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin C2 \leq \frac{1}{8},$$

care, cum bine se cunoaşte, este echivalentă cu inegalitatea lui *Euler*, $R \geq 2r$!

3. Raţionamentele de mai sus se bazează esenţial pe faptul că f are rădăcini reale, fapt pe care nu vrem să-l justificăm utilizând discriminantul, pentru a putea apoi deduce inegalitatea mediilor. Atunci cum arătăm că f are rădăcini reale? Ei bine, să considerăm matricea cu elementele numere reale:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Fiind o matrice reală şi simetrică, polinomul ei caracteristic are toate rădăcinile reale. Dar, fără nicio problemă, se calculează polinomul caracteristic al acestei matrici, se găseşte, desigur, tocmai f şi astfel se încheie raţionamentul nostru.

Ar fi interesant de construit o matrice al cărei polinom caracteristic să aibă discriminantul pozitiv, iar inegalitatea pentru acest discriminant să ne dea inegalitatea mediilor (sau poate o altă inegalitate cunoscută). Din păcate încercările noastre în acest sens nu au dat niciun fel de roade.

Profesor,
Colegiul Naţional Gheorghe Roşca Codreanu
din Bârlad

PROBLEME PROPUSE

269. O pereche de numere naturale consecutive $n, n+1$ se numeşte *adaptată*, dacă:

$$\left[(n+1)\sqrt{3}\right] - \left[n\sqrt{3}\right] = 1.$$

Care este probabilitatea ca două numere consecutive alese la întâmplare, să fie adaptate.

Radu Gologan

270. Fie a, b, c numere pozitive al căror produs este egal cu 1; mai presupunem că:

$$c = \min\{a, b, c\}.$$

Să se arate că:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3(ab + ac + bc) \geq c(a-b)^2 + c(a-c)(b-c).$$

Marian Tetiva

271. Să se arate că pentru orice $G \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{(n+1)^4} \geq \frac{7\pi^4}{720}.$$

Róbert Szász

272. Fie $x_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, n}$, astfel încât:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \quad \text{şi} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a.$$

Să se determine mulţimea $\left\{\max x_i \mid i = \overline{1,n}\right\}$ şi să se precizeze valorile pentru care aceste maxime sunt atinse.

Dorin Mărghidanu

273. Dacă:

$$e(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

şi $a \in \mathbb{R}_+^*$, să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to \infty} \left(\left(\frac{x}{n}\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} e(x + ka) - ne(x) \right) \right) \right).$$

Dumitru Bătineţu-Giurgiu

274. Fie R şi ρ două numere strict pozitive, iar k un număr natural dat. Considerăm şirul de polinoame $(F_n)_{n>k}$ definit prin:

$$F_n(X) = X^n - R^k X^{n-k} - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \rho^j X^{n-j}.$$

1. Să se arate că fiecare polinom F_n are o unică rădăcină reală pozitivă ξ_n.
2. Să se arate că şirul $(\xi_n)_{n>k}$ este monoton şi convergent.

Doru Ştefănescu

SOLUŢIILE PROBLEMELOR PROPUSE

După intrarea la tipar a numărului 3/2008 al revistei, am mai primit soluţiile corecte la problemele **243**, **245**, **246** şi **247** de la domnul *Gheorghe B. G. Niculescu* – profesor la Colegiul de Poştă şi Telecomunicaţii Gheorghe Airinei din Bucureşti. Facem prezenta menţiune pentru ca domnia sa să poată fi inclus pe lista rezolvitorilor de probleme din acest an.

De asemenea, domnul ing. dr. *Dorel Băiţan* de la Romtelecom S.A., Bucureşti, ne-a comunicat o scurtă şi elegantă soluţie pentru pct. b) al problemei **242** din nr. 2/2008 al revistei, soluţie pe care o reproducem mai jos.

La soluţia oferită de dl. prof. *Marian Tetiva* în G. M. A. nr. 2/2008, pag. 149, în locul iegalităţii lui *Blundon* $p \leq 2R + \left(3\sqrt{3} - 4\right)$r, ridicată la pătrat, se poate utiliza o inegalitate mai puternică, inegalitatea lui *Gerretsen* $p \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$.

Se demonstrează că inegalitatea $p \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq \left[2R + \left(3\sqrt{3} - 4\right) r\right]^2$, în care inegalitatea din dreapta este echivalentă cu inegalitatea lui *Euler*, $R - 2r \geq 0$.

Problema **242** b) se rezolvă scriind dubla inegalitate:

$$p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq \frac{2(4R + r)^2(2R - r)}{11R - 4r}$$

şi demonstrând inegalitatea din dreapta. Avem:

$$2(4R + r)^2(2R - r) \geq \left(4R^2 + 4Rr + 3r^2\right)(11R - 4r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64R^3 - 12Rr^2 - 2r^3 \geq 44R^3 + 28R^2 r + 17Rr^2 - 12r^3 \Leftrightarrow (R - 2r)\left(20R^2 + 12Rr - 5r^2\right) \geq 0.$$

În baza inegalităţii lui Euler $R - r \geq 0$, în membrul stâng din ultima inegalitate avem un produs de doi factori, unul pozitiv, $R - 2r$, iar celălalt strict pozitiv,

$$20R^2 + 12Rr - 5r^2 = 20R^2 + 12r(R - 2r) + 19r^2 > 0,$$

ceea ce încheie demonstraţia.

248. *Fie $C^k(\mathbb{R})$ spaţiul vectorial al funcţiilor reale de variabilă reală, diferenţiabile de k ori (unde, $C^\infty(\mathbb{R})$ – spaţiul funcţiilor indefinit derivabile, iar $C^0(\mathbb{R})$ – spaţiul funcţiilor continue) şi $L, D : C^2(\mathbb{R}) \to C^o(\mathbb{R})$ operatorii diferenţiali definiţi prin*

$$L(y) = y'' + qy' + ry, \qquad D(y) = y', \qquad q, r \in \mathbb{R}.$$

a) *Să se arate că $kerL \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ şi că restricţia lui D la $kerL$ este un endomorfism al lui* $\ker L$.

b) *Fie $\{y_1, y_2\}$ o bază în $kerL$; pentru orice $y \in kerL$, există $a, b \in \mathbb{R}$ unici, astfel încât $y = ay_1 + by_2$ şi deci, în felul acesta, se defineşte un izomorfism $\varphi : kerL \to \mathbb{R}^2$. Să se arate că endomorfismul D induce un endomorfism $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ care face următoarea diagramă comutativă:*

$$\begin{array}{ccc} \ker L & \xrightarrow{D} & \ker L \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Să se determine o condiţie necesară şi suficientă pentru ca f să fie un automorfism.

c) *Dacă A_f este matricea lui f în raport cu baza canonică, iar p este polinomul caracteristic al ecuaţiei $L(y) = 0$, să se calculeze $p(A_f)$.*

d) *Alegând în $kerL$ o bază convenabilă, să se scrie forma generală a lui A_f. Cazuri particulare:*

(i) $q = 0$, $r = -1$; (ii) $q = r = 1$; (iii) $q = 2$, $r = 1$.

Dan Radu

Soluţia autorului. Dau a $y \in \ker L$, atunci $y'' = -(qy' + ry)$. Cum $y \in C^2(\mathbb{R})$, urmează că $-(qy' + ry) \in C^1(\mathbb{R})$, deci $y'' \in C^1(\mathbb{R})$ şi deci $y \in C^3(\mathbb{R})$. Raţionând recursiv, deducem că $y \in C^\infty(\mathbb{R})$. Pe de altă prte, dacă $y \in \ker L$, atunci:

$$y'' + qy' + ry = v.$$

Conform celor stabilite anterior, putem deriva inegalitatea de mai sus şi obţinem:

$$y''' + qy'' + ry' = v,$$

ceea ce ne arată că $y' + D(y) \in \ker L$, adic a faptul că restricţia lui D la $\ker L$ este un endomorfism al acesteia.

b) Să observăm mai întâi, că izomorfismul φ este definit prin egalitatea $\varphi(y) = (a, b)$. Probarea acestui fapt este imediată. Deoarece φ este un izomorfism, rezultă că există $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to$ $\to \ker L$ şi deci aplicaţia f cerută în enunţ va fi $f : \varphi \circ D \circ \varphi^{-1}$. Evident, f este un endomorfism al lui $\mathbb{R}^2$ şi face comutativă diagrama dată. Pe de altă parte, să observăm că între matricile corespunzătoare (scrise respectiv în baza $\{y_1, y_2\}$ din $\ker L$ şi baza canonică din $\mathbb{R}^2$) există relaţia:

$$A_f = A_\varphi A_D A_{\varphi^{-1}}.$$

Dar $A_\varphi = A_{\varphi^{-1}} = A_\varphi^{-1} = I$ (în raport cu bazele considerate) şi deci $A_f = A_D$. Prin urmare, o condiţie necesară şi suficientă pentru ca f să fie automorfism este ca D să fie automorfism. Având în vedere că $\ker L$ este finit dimensional, acesta este echivalent cu faptul că $\ker D = \{0\}$. Cum însă $\ker D = R = \mathrm{Sp}(1)$, rezultă că f este automorfism dacă şi numai dacă $1 \notin \ker L$.

c) Din cele stabilite la punctul b), rezultă că $p(A_f) = p(A_D)$ şi deci:

$$p(A_f) = A_D^2 + qA_D + rI = A_{D^2 + qD + rid_{\ker L}}.$$

Pe de altă parte, pentru $i \in \{1, 2\}$, avem:

$$\left(D^2 + qD + id\ker L\right)(y_i) = D^2(y_i) + qD(y_i) + ry_i = y_i'' + qy_i' + ry_i = v,$$

aşa încât $p(A_f) = 0$ (matricea nulă).

d) Să considerăm ecuaţia caracteristică $p(\lambda) = 0$ asociată ecuaţiei diferenţiale $L(y) = 0$ şi fie λ_1, λ_2 rădăcinile sale. Deosebim următoarele trei cazuri:

I. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Atunci putem lua $y_1 = \mathrm{e} * \lambda_1 t$, $y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ şi deci:

$$D(y_1) = \lambda_1 y_1,\ D(y_2) = \lambda_2 y_2,$$

ceea ce conduce la matricea:

$$A_f = A_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

În cazul particular (i), $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ şi deci:

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + \mathrm{i}\beta$. Atunci putem alege $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t$, $y_2 = \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t$ şi deci:

$$D(y_1) = \alpha y_1 - \beta y_2, \qquad D(y_2) = \beta y_1 + \alpha y_2,$$

ceea ce ne conduce la matricea:

$$A_f = A_D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\lambda_1 & \mathrm{Im}\lambda_1 \\ -\mathrm{Im}\lambda_1 & \mathrm{Re}\lambda_! \end{pmatrix}.$$

În cazul particular (ii), $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ şi deci:

$$A_f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

III. $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha \in \mathbb{R}$. Atunci putem lua $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha t}$, $y_2 = t\mathrm{e}^{\alpha t}$ şi deci:

$$D(y_1) = \alpha y_1, \qquad D(y_2) = y_1 + \alpha y_2,$$

ceea ce ne conduce la matricea:

$$A_f = A_D = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

În cazul particular (iii), $\alpha = -1$ şi deci:

$$A_f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

249. *Dacă a şi b sunt numere reale pozitive astfel încât $a + b = a^n + b^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci*:

$$a^{n+1} + b^{n+1} \leq 2.$$

Vasile Cîrtoaje

Soluţia autorului. Scriem inegalitatea cerută sub forma omogenă:

$$\left(\frac{a^n + b^n}{a + b}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}\right)^{n-1}.$$

Fără a pierde din generalitate, vom considera $a \geq b = 1$. Inegalitatea devine astfel:

$$\left(\frac{a^n + 1}{a + 1}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{a^{n+1} + 1}{2}\right)^{n-1}$$

sau

$$(n+1)\,\frac{a^n + 1}{a + 1} \geq (n+1)\ln\frac{a^{n+1} + 1}{2}.$$

Problema revine la a arăta că funcţia:

$$f(x) = (n+1)\ln\frac{x^n + 1}{n+1} - (n-1)\frac{x^{n+1} + 1}{2}$$

satisface condiţia $f(x) \geq 0$ pentru $x \geq 1$. Deoarece $f(1) = 0$, este suficient să arătăm că $f'(x) \geq 0$ pentru $x \geq 1$. Avem:

$$\frac{1}{n+1}f'(x) = \frac{nx^{n-1}}{x^n + 1} - \frac{1}{x+1} - \frac{(n-1)x^n}{x^{n+1} + 1} = \left(\frac{x^{n-1}}{x^n + 1} - \frac{1}{x+1}\right) - (n-1)\left(\frac{x^n}{x^{n+1} + 1} - \frac{x^{n-1}}{x^n + 1}\right) =$$

$$= \frac{x-1}{x^n+1}\left[\frac{x^{n-2}+\ldots+x+1}{x+1} - \frac{(n-1)x^{n-1}}{x^{n+1}+1}\right] =$$

$$= \frac{x-1}{(x^n+1)(x+1)(x^{n+1}+1)}\left[(x^n-1)\left(x^{n-1}-1\right)+x\left(x^{n-1}-1\right)\left(x^{n-2}-1\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+x^{n-2}\left(x^2-1\right)(x-1)\right] \geq 0.$$

Inegalitatea din enunţ devine egalitate dacă şi numai dacă $a = b = 1$.

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional Gheorghe Roşca-Codreanu din Bârlad. De fapt n poate fi orice număr mai mare ca 1 şi enunţul rămâne valabil. Pentru acest lucru, să demonstrăm întâi că media generalizată a două numere pozitive este logaritmic concavă $(0, \infty)$; mai precis este valabilă următoarea:

Lemă. *Fie a, b două numere pozitive şi funcţia f dată prin*:

$$f(x) = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{a}}, \qquad \forall\, x \in (0, \infty).$$

Atunci f este logaritmic concavă, adică g definită prin:

$$g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}, \qquad \forall\, x > 0.$$

este concavă pe $(0, \infty)$.

Demonstraţie. Calcule simple arată că derivata a doua a funcţiei g este:

$$g''(x) = \frac{x^2h''(x) - 2xh'(x) + 2x(x)}{x^3}, \quad \forall\, x > 0,$$

unde h este funcţia definită prin

$$h(x) = \ln\frac{a^x+b^x}{2}, \quad \forall\, x > 0.$$

La rândul ei, funcţia de la numărătorul lui g'' (care se poate defini şi în 0) are derivata $x^2h^{(3)}(x) \leq 0$, pentru orice $x \geq 0$. Rezultă că această funcţie descreşte pe $[0.\infty)$, deci este cel mult egală cu valoarea sa în orifine, care este $2h(0) = 0$. Prin urmare $g''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, \infty)$, ceea ce trebuia demnstrat.

Nu am justificat faptul că h are derivata a treia negativă pe $(0, \infty)$, dar vedem îndată cum rezultă tot din calcule. Anume avem:

$$h'(x) = \frac{a^x\ln a + b^x\ln b}{a^x+b^x},$$

apoi

$$h''(x) = \frac{(\ln a - \ln b)^2 a^x b^x}{(a^x+b^x)^2}$$

şi, în fine:

$$h^{(3)}(x) = \frac{(\ln a - \ln b)^3\left({}^x - a^x\right)a^xb^x}{(a^x+b^x)^3}.$$

Cum petru $x > 0$ diferenţele $\ln a - \ln b$ şi $b^2 - a^2$ au semen contrae, se obţine concluzia anunţată despre semnul lui h pe intervalul $(0, \infty)$. (De asemenea, acelaşi raţionament arată că funcţia f este logaritmic convexă pe $(0, \infty)$.)

Acum putem trece la rezolvarea problemei. Inegalitatea lui *Jensen* pentru funcţia concavă f se scrie sub forma:

$$\left(\frac{a^{px+qy}+b^{px+qy}}{2}\right)^{\frac{1}{px+qy}} \geq \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{fracpx}\left(\frac{a^y+b^y}{2}\right)^{\frac{q}{y}},$$

pentru orice $p, q, x, y > 0$ cu $p+q = 1$. Să alegem aici $x = n+1$, $y = 1$, $p = \dfrac{n-1}{n}$ şi $q = \dfrac{1}{n}$ pentru un anume $n > 1$ (nu neapărat număr natural, este clar). Obţinem $px + qy = n$ şi inegalitatea devine (şi după ridicarea la puterea $n(n+1)$):

$$\left(\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{n+1},$$

evident, cu ipoteza $a+b=a^n+b^n$, această inegalitate conduce la $a^{n+1}+b^{n+1}\le 2$. Egalitatea are loc (deoarece fucţia g din lemă este, de fapt, strict concavă pentru $a\neq b$) doar dacă $a=b=1$.

250. *Fie a, b, c numere raţionale astfel încât $a\neq 0$ şi $4ac-b^2$ este pătratul unui număr raţional diferit de zero. Să se construiască un exemplu de funcţie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:*

i) *f este aditivă, adică*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$;

ii) *f verifică relaţia*

$$af(f(x))+bf(x)+cx=0,$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Gabriel Dospinescu şi **Marian Tetiva**

Soluţia autorilor. Să vedem mai întâi cum rezolvăm problema într-un caz particular: anume, pentru început, construim o funcţie aditivă $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care să verifice în pus şi relaţia:

$$h\left(h(x)\right)=-x,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Pentru aceasta să considerăm o bază *Hamel*, adică o bază a lui $\mathbb{R}$ ca spaţiu vectorial peste $\mathbb{Q}$ şi o partiţie a sa $H=a\cup B$ în două mulţimi de acela si cardinal; cu alte cuvinte, există o bijecţei $\varphi:A\to B$. Mai notăm $-X=\{-x\mid x\in X\}$ pentru orice mulţiem X de numere reale şi definim funcţia $g:H\cup(-H)\to H\cup(-H)$ prin:

$$g(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in A\\ -\varphi^{-1}(x), & x\in B\\ -\varphi(-x), & x\in -A\\ \varphi^{-1}(-x), & x\in -B\end{cases}$$

(este uşor de văzut că, dacă A şi B ealizează o partiţie a lui H şi aceasta este o bază a lui $\mathbb{R}$ peste $\mathbb{Q}$, atunci A, B, $-A$, $-B$ partiţionează pe $H\cup(-H)$). Pentru $x\in A$ avem atunci $g(x)=\varphi(x)\in B$ şi:

$$g\left(g(x)\right)=g\left(\varphi(x)\right)-\varphi^{-1}\left(\varphi(x)\right)=-x,$$

pentru $x\in B$ avem $g(x)=-\varphi^{-1}\in -A$ şi

$$g\left(g(x)\right)=g\left(-\varphi^{-1}(x)\right)=-\varphi\left(-\left(-\varphi^{-1}(x)\right)\right)=-x,$$

dacă $x\in -A$, $g(x)=-\varphi(-x)\in -B$, deci:

$$g\left(g(x)\right)=g\left(-\varphi(-x)\right)=\varphi^{-1}\left(-\left(-\varphi(x)\right)\right)=-x$$

şi, în fine, pentru $x\in -B$, $g(x)=\varphi^{-1}(x)\in A$ şi

$$g\left(g(x)\right)=g\left(\varphi^{-1}(x)\right)=\varphi\left(\varphi^{-1}(-x)\right)=-x,$$

în concluzie avem:

$$g\left(g(x)=-x\right),\qquad \forall\, x\in H\cup(-H),$$

relaţie care implică imediat şi:

$$g(-x)=-g(x),\qquad \forall\, x\in H\cup(-H).$$

Să zicem că elementele bazei *Hamel* considerate sunt notate e_i unde i parcurge o anumită mulţime I de idici (de puterea continuumului); mai precis, fie e_j, $j\in I$, elementele din A şi e_k, $k\in K$ elementele din B ($J\cup K=I$, $J\cap K=\emptyset$).

Funcţia h pe care o căutăm noi reprezintă aşa numita prelungire prin liniaritate a funcţiei g, adică este definită prin:

$$h(x)=\sum_{i\in I}a_i g(e_i)=\sum_{j\in J}a_j g(e_j)+\sum_{k\in K}a_k g(e_k),$$

pentru orice:

$$x=\sum_{i\in I}a_i e_i=\sum_{j\in J}a_j g(e_j)+\sum_{k\in K}a_k g(e_k)\in\mathbb{R}$$

(orice $x\in\mathbb{R}$ are o unică asemenea scriere, cu a_i, $i\in I$ numere raţionale dat fiind că $H=A\cup B$ este bază a lui $\mathbb{R}$ peste $\mathbb{Q}$). Mai întâi remarcăm că h coincide cu g nu numai pe mulţimea H (ceea ce este firesc), dar şi pe $-H$: într-adevăr, avem pentru $-e_i\in -H$:

$$h(-e_i)=h\left((-1)e_i\right)=-g(e_i)=g(-e_i)$$

(datorită faptului că g, aşa cum am văzut puţin mai sus, este impară). Acum se verifică imediat că h este o funcţie aditivă sau, echivalent, $\mathbb{Q}$-liniară (acesta este rostul prelungirii prin liniaritate) şi nici nu este greu de văzut că $h(h(x)) = -x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Într-adevăr, pentru x ca mai sus, avem, conform definiţiei lui h şi ţinând seama de faptul că $e_j \in A \Rightarrow g(e_j) \in B$ şi $e_k \in B \Rightarrow g(e_k) \in -A$, că:

$$h(h(x)) = \sum_{j\in J} a_j g(g(e_j)) + \sum_{k\in K} (-a_k) g(-g(e_k)) =$$

$$= \sum_{j\in J} a_j g(g(e_j)) + \sum_{k\in K} (a_k) g(g(e_k)) = \sum_{j\in J} a_j (-e_j) + \sum_{k\in K} a_k (-e_k) = -x$$

(am folosit iar $g(-t) = -g(t)$ şi $g(g(t)) = -t$, pentru orice $t \in H \cup (-H)$.

Acum avem o funcţie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aditivă şi astfel încât $h(h(x)) = -x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Aditivitatea implică imediat $\mathbb{Q}$-liniaritatea funcţiei, adică mai avem $h(rx) = rh(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi $r \in \mathbb{Q}$.

Pentru a rezolva problema noastră, să observăm întâi că, în condiţiile enunţului, trinomul de gradul al doilea $at^2 + bt + c$ are două rădăcini complexe conjuate $p + qi$ şi $p - qi$, cu p, q numere raţionale, prin urmare avem:

$$-2p = \frac{b}{a} \quad \text{şi} \quad p^2 + q^2 = \frac{c}{a}$$

(conform relaţiilor lui *Viète*). De aceea, relaţia pe care trebuie să oîndeplinească funcţia f se poate scrie sub forma:

$$f(f(x)) - 2pf(x) + \left(p^2 + q^2\right) x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definim pe f prin:

$$f(x) = qh(x) + px,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Datorită $\mathbb{Q}$-liniarităţii funcţiei h şi proprietăţii sale $h(h(x)) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avem:

$$f(f(x)) = qh(qh(x) + px) + p(qh(x) + px) = q^2 h(h(x)) + 2pqh(x) + p^2 x =$$
$$= 2pqh(x) + \left(p^2 - q^2\right) x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ceea ce implică imediat:

$$f(f(x)) - 2pf(x) + \left(p^2 + q^2\right) x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

şi încheie rezolvarea problemei.

251. *Să se arate că, într-un simplex, au loc inegalităţile următoare*:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r_i - r} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{r_i + r} \geq \frac{n^2}{2}$;

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{h_i - r} \geq \frac{n+1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{h_i + r} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{(n-2)h_i + r} \geq \frac{n^2}{n-1}$;

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(n-2)r_i - r} \geq \frac{n+1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(n-2)r_i + r} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(n-2)^2 r_i + r} \geq$

$$\geq \frac{n^2}{(n-2)(n-1)}.$$

Cu h_i şi r_i se notează înălţimile şi razele sferelor exînscrise simplexului, iar cu r raza sferei înscrisă simplexului ($i = \overline{1, n}$, $n \geq 3$).

Mihai Miculiţa şi **Marius Olteanu**

Soluţia autorilor. Se ştie că într-un simplex au loc relaţiile (a se vedea *D. S. Mitrinović* ş. a., Recent Advances in Geometric Inequalities):

$$(A) \begin{cases} h_i = \dfrac{n \cdot V}{S_i}, \ r = \dfrac{n \cdot V}{S}, \ r_i = \dfrac{n \cdot V}{S - 2S_i}, \text{ unde } S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_i, \text{ aşa că :} \\ \dfrac{1}{n-2} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i}, \end{cases}$$

unde S este aria totală, S_i este aria feţei i, V este volumul.

a) Ţinând seama de inegalitatea:

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_i}\right) \geq (n-1)^2 \tag{1}$$

echivalentă cu:

$$\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_i} \geq \frac{n-1}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i},\ \forall\, x_i > 0,\ i=\overline{1,n}, \tag{1'}$$

avem:

$$\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i\neq j}\frac{r_i}{r_i-r} \geq \frac{n-1}{\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{r_i-r}{r_i}} = \frac{n-1}{(n-1)-\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{r}{r_i}} = \frac{n-1}{1+\dfrac{r}{r_j}} = \frac{(n-1)r_j}{r_j+r},$$

de aici:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{r_i-r} \geq (n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{r_i+r}.$$

Mai departe, utilizând inegalitatea mediilor avem:

$$(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{r_i+r} \geq (n-1)\cdot\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{r_i+r}{r_i}} = (n-1)\cdot\frac{n^2}{n+r\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{r_i}} = (n-1)\cdot\frac{n^2}{n+n-2} = \frac{n^2}{2}.$$

b) Pentru început, vom demonstra următoarea inegalitate (ce aparţine lui *Andrei Chiteş*). „*Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $x_i + x_2 + \ldots + x_= 1$, $n \geq 2$, *atunci*:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i} \geq (n+1)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\text{“}. \tag{2}$$

Avem echivalenţa:

$$n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-x_i}-\frac{1}{1+x_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+x_i}+\frac{1}{1-x_i}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i^2} \geq 2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2} \Leftrightarrow n\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i^2} \geq \cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2}. \tag{$*$}$$

Deoarece $x_i > 0$ pentru orice $i=\overline{1,n}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, rezultă că $x_i \in (0,1)$ implică $x_i^2 \in (0,1)$ şi deci $1-x_i^2 > 0$, pentru orice $i=\overline{1,n}$. Presupunem că $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, atunci $\dfrac{1}{1-x_1^2} \geq \geq \dfrac{1}{1-x_2^2} \geq \ldots \geq \dfrac{1}{1-x_n^2}$. Din inegalitatea lui Cebâşev avem, în aceste condiţii că:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i^2} \geq \frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2},$$

de aici:

$$n\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i^2} \geq n\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i^2},$$

adică $(*)$.

Egalitatea se obţine numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ sau $\dfrac{1}{1-x_1^2} = \dfrac{1}{1-x_2^2} = \ldots = \dfrac{1}{1-x_n^2}$, ceea ce este echivalent cu $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$.

Revenind la roblema enunţată, pentru prima inegalitate a punctului b) se consideră în inegalitatea (2) că $x_i = \dfrac{r}{h_i}$, pentru $i = \overline{1,n}$ etc.

Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{1}{1+x} - (n-1) \cdot \frac{1}{(n-2)+x},\ n \geq 3,\ n \in \mathbb{N}.$$

Atunci

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{(n+1)(n-2+x)^3 - 2(n-1)^2(1+x)^3}{(n-1)(1+x)^3(n-2+x)^3};$$

deoarece $n \geq 3$ şi $x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, se aratu a uşor că $(n+1)(n-2+x)^3 - 2(n-1)^2(1+x)^3$ este pozitivă; rezultă cu a $f''(x) > 0$ şi deci $f(x)$ este convexă. Aplicând, atunci, inegalitatea *Jensen* funcţiei convexe f, avem, pentru orice $x_i \in (0,1)$, $i = \overline{1,n}$:

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq n \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right). \tag{3}$$

Dacă în inegalitatea (3) alegem $x_i = \dfrac{r}{h_i}$ şi ţinem seama de relaţiile (A) precum şi de faptul că

$$f\left(\frac{\dfrac{r}{h_1} + \dfrac{r}{h_2} + \ldots + \dfrac{r}{h_n}}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

rezultă în final inegalitatea cerută.

În fine, aplicând din nou inegalitatea mediilor avem:

$$(n-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{(n-2)h_i + r} \geq (n-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-2)h_i + r}{h_i}} =$$

$$= (n-1) \cdot \frac{n^2}{n(n-2)^2 + 1} = (n-1) \cdot \frac{n^2}{(n-1)^2} = \frac{n^2}{2}.$$

c) În inegalitatea (2) se alege $x_i = \dfrac{r}{(n-2)r_i}$, $i = \overline{1,n}$ (se ţine seama de egalităţile (A); se obţine astfel prima inegalitate a punctului c). Pentru cea de a doua inegalitate se aplică inegalitatea (3) funcţiei convexe $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{n-2} \cdot f(x)$, unde f este funcţia considerată la punctul b); se alege $x_i = \dfrac{r}{(n-2)r_i}$, $i = \overline{1,n}$ şi se observă că:

$$g\left(\frac{\dfrac{r}{(n-2)r_1} + \dfrac{r}{(n-2)r_2} + \ldots + \dfrac{r}{(n-2)r_n}}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-2} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Rezultă:

$$g\left(\frac{r}{(n-2)r_1}\right) + \ldots + g\left(\frac{r}{(n-2)r_n}\right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(n-2)r_i + r} - (n-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(n-2)^2 r_i + r} \geq 0.$$

În sfârşit, a treia inegalitate rezultă tot din inegalitatea mediilor:

$$(n-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{(n-2)^2 r_i + r} \geq (n-1) \cdot \frac{n^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-2)^2 r_i + r}{r_i}} =$$

$$= (n-1) \cdot \frac{n^2}{n(n-2)^2 + (n-r)} = \frac{(n-1)n^2}{(n-2)(n-1)^2} = \frac{n^2}{(n-2)(n-1)}.$$

În toate punctele problemei egalitățile au loc atunci și numai atunci când simplexul este este „echifacial“ (adică $S_1 = S_2 = \ldots = S_n$).

Pentru $n = 3$ și $n = 4$ se obțin frumoase inegalități în triunghi și tetraedru.

Problema constituie o generalizare a problemelor PP.5165 și PP. 5166 din „Octogon Mathematical Magazine“, pag. 357, octombrie 2004.

Soluție dată de *Nicușor Minculete* de la Universitatea Creștinu a Dimitrie Cantemir din Brașov. Fie $(n-1)$-simplexul $A_1A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$, $n \geq 3$, în spațiul euclidian $(n-1)-$dimensional, iar cu h_i și r_i se notează înălțimile și razele hipersferelor exînscrise simplexului, cu r raza hipersferei înscrisă simplexului, cu V notăm volumul simplexului, cu S_i notăm volumul $(n-2)-$simplexul $A_1A_2 \ldots A_{i-1}A_{i+1} \ldots A_n$ și în fine:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i. \tag{1}$$

Într-un $(n-1)-$simplex se cunosc urm atoarele egalități:

$$h_i = \frac{(n-1)V}{S_i}, \tag{2}$$

$$r = \frac{(n-1)V}{S}, \tag{3}$$

$$r_i = \frac{(n-1)V}{S-2S_i}. \tag{4}$$

Ca urmare, putem stabil ușor următoarele relații:

$$\sum_{i=1}^{n} = \frac{r}{h_i} = 1, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} = \frac{r}{(n-2)r_i} = 1. \tag{6}$$

Pentru început vom demonstra următoarele patru inegalități:

i) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A-a_i}, \tag{7}$$

unde $a_i = \mathbb{R}_+^*$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$;

ii) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-a_i} \geq \frac{n+1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i}, \tag{8}$$

unde $a_i = \mathbb{R}_+^*$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$;

iii) $$\frac{n+1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \geq (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-2+a_i}, \tag{9}$$

unde $a_i = \mathbb{R}_+^*$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$;

iv) $$(n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-2+a_i} \geq \frac{n^2}{n-1}, \tag{10}$$

unde $a_i = \mathbb{R}_+^*$, pentru orice $i = \overline{1,n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$.

i) Aplicăm inegalitatea lui *Cauchy-Buniakovski-Schwarz*, astfel:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{i-1}} + \frac{1}{a_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n-1)^2,$$

deci:

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{i-1}}+\frac{1}{a_{i+1}}+\ldots+\frac{1}{a_n}\geq\frac{(n-1)^2}{A-a_i}. \tag{11}$$

Scriind şi inegalităţile analoage inegalităţii (11), prin însumare, obţinem:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geq(n-1)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A-a_i},$$

iar împărţind cu $n-1$, deducem inegalitatea (7).

ii) Rescriem inegalitatea (8) astfel:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i}\geq\frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i},$$

adică:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-a_i^2}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i},$$

deci:

$$n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-a_i^2}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-a_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i^2}.$$

Prin urmare inegalitatea (8) este echivalentă cu inegalitatea:

$$n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-a_i^2}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i}. \tag{12}$$

Fără a micşora generalitatea, presupunem că $a_i\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$, de unde rezultă că $\frac{1}{1-a_1^2}\leq\frac{1}{1-a_2^2}\leq\ldots\leq\frac{1}{1-a_n^2}$ şi, prin aplicarea inegalităţii lui *Cebâşev*, deducem inegalitatea:

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\frac{1}{1-a_i^2}\geq\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i^2},$$

deoarece $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$,în consecinţă demonstrarea inegalităţii (8) se încheie.

iii) Prelucrăm inegalitatea (9) şi se obţine:

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+a_i}+n\sum_{i=1}^{n}\frac{n-2}{n-2+a_i},$$

ceea ce este echivalent cu:

$$n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+a_i}+n\sum_{i=1}^{n}\frac{n-2}{n-2+a_i},$$

deci:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+a_i}-\frac{1}{n-2+a_i}\right)\geq n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-2}{n-2+a_i}-\frac{1}{1+a_1}\right),$$

adică:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n-3}{(1+a_i)(n-2+a_i)}\geq n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(1+a_i)(n-2+a_i)},$$

iar, prin împărţire cu $n-3$, se obţine inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i)(n-2+a_i)}\geq n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(1+a_i)(n-2+a_i)}. \tag{13}$$

Fără a micşora generalitatea presupunem că $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$, de unde rezultă că:

$$\frac{1}{(1+a_1)(n-2+a_1)}\geq\frac{1}{(1+a_2)(n-2+a_2)}\geq\ldots\geq\frac{1}{(1+a_n)(n-2+a_n)}$$

si, prin aplicarea inegalităţii lui *Cebâşev*, deducem inegalitatea:

$$n\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(1+a_1)(n-2+a_i)}\leq\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+a_i)(n-2+a_i)},$$

dar $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$, prin urmare deducem inegalitatea (13).

iv) Utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem:

$$\sum_{i=1}^{n}(n-2+a_i)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+a_i}\geq n^2,$$

deci

$$[n(n-2)+1]\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+a_i}\geq n^2,$$

în consecinţă:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}.$$

Cumulând inegalităţile (8), (9) şi (10) obţinem şirul de inegalităţi:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-a_i}\geq\frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+a_i}\geq\frac{n^2}{n-1},\tag{14}$$

unde $a_i=\mathbb{R}_+^*$, pentru orice $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.

Revenim la inegalităţile din enunţ.

a) Prin utilizarea egalităţilor (3) şi (4), obţinem notaţiile:

$$\frac{r_i}{r_i-r}=\frac{S}{2S_i},\qquad\frac{r_i}{r_i+r}=\frac{S}{2(S-S_i)},$$

ceea ce înseamnă că inegalitatea:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{r_i-r}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{r_i+r},$$

devine:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S_i}\geq(n-1)\frac{1}{S-S_i},$$

ceea ce este adevărat, luând $a_i=S_i$ în inegalitatea (7).

Din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz avem:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{r}{r_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{r}{r_i}}\geq n^2,$$

dar:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{r}{r_i}\right)=n+n-2=2(n-1),$$

aşadar:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{r_i+r}\geq\frac{n^2}{2},$$

veea ce înseamnă că inegalităţile de la punctul a) au fost demonstrate.

b) Cum $\sum_{i=1}^{n}\frac{r}{h_i}=1$, luăm în şirul de inegalităţi (14), $a_i=\frac{r}{h_i}$, ceea ce implică şirul de inegalităţi:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\dfrac{r}{h_i}}\geq\frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{r}{h_i}}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+\dfrac{r}{h_i}}\geq\frac{n^2}{n-1},$$

adică:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h_i-r}\geq\frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{h_i+r}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{(n-2)h_i+r}\geq\frac{n^2}{n-1}.$$

c) Datorită faptului că $\sum_{i=1}^{n}\frac{r}{(n-2)r_i}=1$, luăm în şirul de inegalităţi (14) $a_i=\frac{r}{(n-2)r_i}$, ceea ce implică şirul de inegalităţi:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{r}{(n-2)r_i}}\geq\frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{r}{(n-2)r_i}}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+\frac{r}{(n-2)r_i}}\geq\frac{n^2}{n-1},$$

aşadar:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{r}{(n-2)r_i}\geq\frac{n+1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{r}{(n-2)r_i+r}\geq(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{r}{(n-2)^2r_i+r}\geq\frac{n^2}{(n-2)(n-1)},$$

astfel, demonstraţia este încheiată.

Observaţie. şirurile de inegalităţi de la punctele b) şi c) se pot îmbunătăţi prin următorul procedeu: în inegalitatea (14) punem în loc de a_i pe $\frac{1-a_i}{n-1}$, deoarece $\frac{1-a_i}{n-1}\in\mathbb{R}_+^*$, pentru orice $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1-a_i}{n-1}=1$, din $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$, deci aceasta devine:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-2+a_i}\geq(n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-a_i}\geq(n-1)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n-2)(n-1)+1-a_i}\geq\frac{n^2}{n-1},\quad(15)$$

iar, dacă aplicăm din nou acest procedeu pentru inegalitatea (15), obţinem un alt şir de inegalităţi, şi anume:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n-2)(n-1)+1-a_i}\geq(n^2-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n(n-1)-1+a_i}\geq$$
$$\geq(n-1)^3\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n-2)(n-1)^2+n-2+a_i}\geq\frac{n^2}{n-1}.\quad(16)$$

Dacă înlocuim $a_i=\frac{r}{h_i}$ în inegalitatea (15), atunci deducem şirul de inegalităţi:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{(n-2)h_i+r}\geq(n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{nh_i-r}\geq(n-1)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{(n^2-3n+3)\,h_i-r}\geq\frac{n^2}{n-1},\quad(17)$$

iar pentru $a_i=\frac{r}{(n-2)r_i}$, găsim şirul de inegalităţi:

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{(n-2)^2h_i+r}\geq(n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{n(n-2)h_i-r}\geq$$
$$\geq(n-1)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{r_i}{(n^2-3n+3)\,(n-2)r_i-r}\geq\frac{n^2}{n-1}.\quad(18)$$

Prin continuarea procedeului de mai sus se pot găsi o mulţime de inegalităţi care pot îmbunătăţii şirul de inegalităţi din enunţul problemei.

252. *Dacă* $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$, *unde* $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, $S=\sum_{i=1}^{n}x_1$ *şi* $\sigma=\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}$, *să se arate că:*

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\sqrt{x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}(S-x_{i_1}-x_{i_2}-\ldots-x_{i_k})}\leq\sqrt{C_{n-1}^{k}S\sigma}.$$

Soluţia autorului. Din inegalitate mediilor rezultă:

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\sqrt{\frac{C_n^k x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}}{\sigma}\cdot\frac{\frac{n}{n-k}\left(S-x_{i_1}-x_{i_2}-\ldots-x_{i_k}\right)}{S}}\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(C_n^k+\frac{n}{n-k}(n-k)\frac{C_n^k}{n}\right)=C_n^k,$$

deci

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\sqrt{x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}\left(S-x_{i_1}-x_{i_2}-\ldots-x_{i_k}\right)}\le$$

$$\le C_n^k\sqrt{\frac{(n-k)S\sigma}{nC_n^k}}=\sqrt{\frac{n-k}{n}C_n^k S\sigma}=\sqrt{C_{n-1}^k S\sigma},$$

q.e.d.

Soluţie dată de *Marian Tetiva*, profesor la Colegiul Naţional „Gheorghe Roşca-Codreanu“ din Bârlad.

Inegalitatea din enunţ nu este nimic altceva decât inegalitatea *Cauchy-Scwarz* în forma:

$$\sum_{i=1}^{m}\sqrt{a_i b_i}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_i\sum_{i=1}^{m}b_i}$$

pentru $m=C_n^k$, numerele a_i egale respectiv cu produsele $x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}$ (după toate alegerile indicilor $1\le i_1\le i_2<\ldots<i_k\le n$). Avem atunci suma numerelor a_i egală cu σ, iar:

$$\sum_{i=1}^{m}b_i=\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\left(S-x_{i_1}\cdot x_{i_2}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}\right)=\left(C_n^k-C_{n-1}^{k-1}\right)S=C_{n-1}^k S$$

şi nu mai este nimic de demonstrat.

ISTORIA MATEMATICII

La 100 de ani de la naşterea academicianului Nicolae Teodorescu în contextul european al ştiin ţei

de Eufrosina Otlăcan

Academicianul *Nicolae Teodorescu* (1908-2008) aparţine generaţiei de aur a matematicii româneşti. Personalitate marcantă a cercetării de specialitate, s–a implicat cu dăruire educaţiei ştiinţifice a tinerei generaţii, menţinerii cercetării matematice din ţară în atenţia lumii ştiinţifice internaţionale şi înfăptuirii unor programe naţionale de dezvoltare ştiinţifică, tehnică şi culturală.

1. Studii, funcţii, discipline universitare predate

Născut la Bucureşti la 5/18 iulie 1908, *Nicolae Teodorescu* şi-a făcut aici toate studiile, luându-şi licenţa în matematici în anul 1929. Doctoratul în matematici şi-l trece la Universitatea Sorbona din Paris la 25 aprilie 1931. Subiectul tezei sale de doctorat pornea de la noţiunea de derivată areolară introdusă în 1912 de ilustrul matematician român *Dimitrie Pompeiu*, continuându-i studiul teoretic, găsindu-i aplicaţii interesante în Fizica matematică şi indicând legături cu noţiunea de derivată exterioară a matematicianului francez *Elie Cartan.* Ca o onoare şi recunoaştere făcută cercetării româneşti, în comisia de doctorat din universitatea pariziană este invitat şi *Dimitrie Pompeiu*, fapt fără precedent şi care, din câte ştiu, nu s-a mai repetat nici până astăzi.

Întors la Bucureşti după susţinerea doctoratului, *Nicolae Teodorescu* deţine, pe rând sau uneori simultan, funcţii universitare la Facultatea de ştiinţe a Universităţii, la Academia de arhitectură, la Institutul de statistică, actuariat şi calcul, la Institutul Politehnic, la Institutul de

Construcţii. Din 1953 va fi şef de catedră la Facultatea de matematică a Universităţii din Bucureşti, iar între anii 1960-1972 decan al acestei facultăţi. Şi disciplinele matematice pe care le-a predat sunt multiple: mecanică, geometrie descriptivă şi stereotomie, analiză matematică, ecuaţii diferenţiale, calcul operaţional, matematici speciale aplicate, ecuaţiile fizicii matematice.

Din 1948 a fost vicepreşedinte al Societăţii de ştiinţe Matematice din România, iar din 1975 a fost preşedintele ei, coordonând toate publicaţiile periodice şi ne-periodice ale acestei instituţii. Din 1949, de la înfiinţarea Institutului de matematică al Academiei Române, *Nicolae Teodorescu* a fost şef de secţie pentru Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale.

Despre lucrările de cercetare matematică

Domeniile pe care *Nicolae Teodorescu* le atacă în lucrările sale ştiinţifice sunt: analiza matematică, ecuaţiile cu derivate parţiale liniare de ordinul întâi şi de ordin superior, teoria geometrică a ecuaţiilor diferenţiale sau a celor cu derivate parţiale, calculul vectorial şi tensorial, calculul numeric. Funcţiile monogene (a) şi funcţiile olomorfe (α), introduse de *Nicolae Teodorescu* în lucrări privind noţiunea de derivată areolară a lui *Pompeiu* şi lărgirea acestei noţiuni sunt înscrise în „Histoire generale des Sciences“, publicată sub direcţia lui *René Taton* (Partea a III-a, „La science contemporaaine“ vol. I, Le XXe siécle, Presse Universitaires de France, 1964, p. 43). *Nicolae Teodorescu* dezvoltă, sintetizează şi găseşte semnificaţii fizice pentru idei care aparţineau unor nume mari ale matematicii internaţionale, precum *J. Hadamard*, *H. Weyl*, *E. Cartan*, *O. Veblen*. Extinderea noţiunii lui *Pompeiu* de derivată areolară l-a condus la conexiuni cu cercetări ale lui *De la Vallée Poussin* şi *Lebesgue*, dar şi cu discipline mecanice, precum elasticitatea şi hidrodinamica. Rezultatele obţinute de *Nicolae Teodorescu* au fost folosite de matematicieni români, numind în primul rând pe *Gr. C. Moisil*, dar şi de cercetători din afara ţării, printre care *A. Tomolo*, *T. Vignaux*, *J. Ridder*, *F. Polaczek*, *V. S. Feodotov*, *I. N. Vequa*.

Lucrările lui *Nicolae Teodorescu* sunt publicate în reviste de specialitate de primă clasă, precum „C. R. Acad. Sc. Paris“, „Rendiconti dei Lincei“, „Annali di Matematica“ din Bologna, „Annali de matematica pura ed applicata“, „Journal de mathématiques pures et appliquées“, „Commentarii mathematici helvetici“, „Mathematica“ de la Cluj şi în revistele Academiei Române. Teza sa de doctorat, „La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique mathématique“ a fost publicată de *Gauthier-Villars*.

Nicolae Teodorescu a fost membru corespondent al Academiei Române din 1955 şi membru titular din anul 1963.

3. Educator al tinerei generaţii

A fost mai întâi activitatea de la catedra universitară, de unde multe decenii a transmis studenţilor cunoştinţe de înaltă matematică. A pus la dispoziţia studenţilor lecţiile tipărite, precum un „Curs de hidrodinamică plană şi aplicaţii aerodinamice“ (1936), „Calcul numeric şi grafic“ (1951), „Calcul vectorial“ (1951), „Metoda vectorială în fizica matematică“ în două volume, editate de Editura Tehnică în 1953 şi 1954, distinse cu Premiul de Stat. Mai sunt publicate „Curs de ecuaţiile fizicii matematice“, 2 volume, litografiat de Universitatea Bucureşti (1953 - 1954), „Ecuaţiile fizicii matematice“, partea a III-a (1959), partea a IV-a (1961), publicate de Editura de Stat Didactică şi Pedagogică.

Academicianul *Nicolae Teodorescu* a antrenat în cercetare, dar şi în redactarea cursurilor universitare matematicieni mai tineri. În felul acesta în anii 1950-1951 au fost litografiate manualele universitare: „Curs de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţi ale“, redactat de asistent *I. P. Elianu* şi „Ecuaţiile fizicii matematice“ redactat de asistent *M. Mayer* în 1963 şi 1965, Editura de stat Didactică şi Pedagogică publică în două volume „Ecuaţiile fizicii matematice“, autori *N. Teodorescu* şi *V. Olaru*.

Preocupat de modernizarea învăţământului matematic românesc, *Nicolae Teodorescu* studiază în 1963, la Londra, aspecte ale organizării învăţământului din Anglia.

Dezvoltarea sistemului de gândire matematic, riguros, a fost o constantă în activitatea lui *Nicolae Teodorescu*, materializată şi prin activitatea sa la Gazeta Matematică, unde îşi începuse activitatea creatoare încă din anii copilăriei. În 1980 a înfiinţat „Gazeta matematică metodică şi metodologică“ pentru profesori şi studenţi, iar vechii Gazete îi adaugă rubrici noi (Informatică, Concurs, Recenzii, probleme comentate). Până în 1980 acad. *Nicolae Teodorescu* a coordonat Olimpiadele Naţionale de Matematică. Profesorii de matematică din învăţământul preuniversitar au beneficiat de organizarea consfătuirilor organizate de S.S.M.R., iniţiate de acad. *Nicolae Teodorescu* şi la care a fost prezent de multe ori, ţinând lecţii pentru profesori şi elevi.

Pentru a trezi interesul tinerilor pentru matematică, *Nicolae Teodorescu* a publicat în Gazeta Matematică atât articole de prezentare a unor noţiuni şi teorii noi, cât şi pagini dedicate unor valoroase personalităţi ale matematicii româneşti şi străine. (Ex: „Metoda geometrică în fizica matematică“ în Gazeta matematică şi fizică seria A, vol. V, 1953, „Dimitrie Pompeiu“ în octombrie 1954, „Cel de al patrulea Congres al matematicienilor români“ în iulie 1956, „Congresul internaţional al matematicienilor de la Edinbourg“, în noiembrie 1958, „Personalitatea lui Ianos Bolyai“, în 1960 etc.).

4. Reprezentant al matematicii româneşti în lumea ştiinţifică europeană

După susţinerea doctoratului la Paris cu teza sa care a trezit interes viu şi de durată în lumea matematicienilor, *Nicolae Teodorescu* continuă să se afirme şi să creeze punţi de legătură cu oameni de ştiinţă din Europa în calitate de secretar a fost principalul organizator al celui de al 4-lea Congres al matematicienilor români, desfăşurat între 27 mai şi 4 iunie 1956 la Bucureşti. La acest congres s-au prezentat 223 comunicări şi conferinţe de către 152 matematicieni români şi 74 străini. veniţi din 18 ţări, cei mai mulţi din Germania şi Franţa. Au fost multe nume răsunătoare în matematica mondială, între care *J. Hadamard*, care, scria *Nicolae Teodorescu* ([4]): „la vârsta de 92 de ani ne-a făcut deosebita cinste de a veni în ţară“ şi, în acelaşi articol, despre congres: „Pregătit cu atenţie şi cu grijă timp de 10 luni, acest Congres a însemnat o dată memorabilă pentru ştiinţa românească, bucurându-se de o participare internaţională fără precedent în ţara noastră“. Aprecierile vin şi din partea marelui *J. Hadamard*, spunând despre Congres că „indică, după părerea mea, o dată semnificativă în evoluţia culturală a lumii întregi în această epocă. Salut această dată¡‘.

N. Teodorescu a participat ca delegat al ţării noastre, făcând comunicări, la multe congrese şi colocvii in străinătate ([1], [4]). Între acestea: Amsterdam (1954), Praga (1955), Moscova şi Viena (1956), Paris (1957), Edinbourg (1958), Roma (1960), Balaton, Bologna şi Florenţa (1961), Stockholm (1962). Ţine conferinţe în Franţa (1931, 1957, 1963), în Italia (1936, 1964), în Belgia (1935, 1938, 1939, 1959), Germania de Est (1955). Dintr-o relatare făcută în Gazeta matematică [4, pag. 209-211] deducem că *Nicolae Teodorescu* prezenta în conferinţele sale din străinătate nu doar cercetările şi descoperirile proprii, ci şi pe ale colegilor săi români: „Prin numeroase contribuţii ale matematicienilor români (*Gr. Moisil*, *M. Nicolescu*, *Gh. Călugăreanu*) şi străini [...] teoria derivatei areolare şi-a câştigat un loc sigur în mâtematica moderna ca o importantă realizare a şcoalei matematice româneşti“.

Desigur că şi multitudinea lucrărilor ştiinţifice, publicate de *N. Teodorescu* în prestigioase reviste străine de specialitate, au constituit o bază pentru prezenţa în lume a cercetări matematice din România.

5. Implicarea lui Nicolae Teodorescu în programul de informatizare a ţării

În raportul Institutului Naţional de Cercetare - Dezvoltare în Informatică, ICI, [3], se arată că în iunie 1967 a fost elaborat şi adoptat primul Program de dotare a economiei naţionale cu echipamente moderne de calcul şi automatizarea prelucrării datelor şi s-a declanşat activitatea organizată la nivel naţional în domeniul informaticii. „Un stimul important pentru elaborarea acestui program de informatizare l-a constituit propunerea înaintată conducerii statului de către *Mihai Drăgănescu* şi *Nicolae Teodorescu*“.

În articolul „Mihai Drăgănescu – cronologia activităţilor în domeniul informaticii“ [2], citim că în 1966 „elaborează şi înaintează Consiliului Naţional pentru Cercetare Ştiinţifică [...] împreună cu Acad. *Nicolae Teodorescu*, matematician, o propunere privind introducerea şi utilizarea calculatoarelor electronice în economia şi societatea românească, propunere care a contribuit la lansarea primului program de informatizare în România“.

Octogenar activ, academicianul *Nicolae Teodorescu* dădea răspuns discursurilor de recepţie în Academia Română academicianului Romulus Cristescu, actualul preşedinte al secţiei de Matematici si regretatului academician *Constantin Drâmbă*.

Academicianul *Nicolae-Victor Teodorescu*, sau mai simplu, profesorul *Nicolae Teodorescu*, cum şia semnat cărţile şi cum l-am cunoscut noi, cei care i-am fost studenţi, a părăsit viaţa academică şi viaţa realităţilor noastre la 28 februarie 2000.

Bibliografie

[1] G. Şt. Andonie, *Istoria Matematicii în România*, volumul 2, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

[2] M. Drăgănescu, *Cronologia activităţilor în domeniul informaticii*, Internet.

[3] *Raportul Institutului Naţional de Cercetare - Dezvoltare în Informatică*, ICI, Internet.

[4] *Gazeta matematică şi Fizică*, seria A, 1956.

[5] Echipa gazetamatematica.net, 2008.

Comitetul Român pentru Istorie şi Filozofia Ştiinţei şi Tehnicii,
eufrosinaotl@imar.ro

Spaţiile neolonome ale lui Vrânceanu din punctul de vederea al geometriei distanţei

de M. Buliga

Această aniversare a descoperirii spaţiilor neolonome de către *Gheorghe Vrănceanu* [12] (1926), [13] (1928), este o bună ocazie pentru a descrie unele apariţii surprinzătoare, dar naturale, ale acestor spaţii în patru domenii matematice: operatori diferenţiali hipoeliptici, geometria sub-riemanniană, teoria grupurilor Carnot şi teoria geometrică a grupurilor discrete. Cum de apar spaţiile neolonome în astfel de domenii variate? Cheia necesară pentru a întelege este dată de geometria distanţei.

Vrănceanu are contribuţii importante în mai multe domenii ale matematicii, nu doar teoria spaţiilor neolonome. De exemplu, în lucrarea [14] (1950), urmată de o serie de alte articole, s-a ocupat de grupuri Lie de rang zero, numite şi grupuri filiforme, o clasă particulară de grupuri Carnot. În [15], [16] (1962-1963) şi alte lucrări a studiat scufundări ale unui grup discret în grupuri lineare. Pot doar să presupun că intuiţia sa puternică l-a ghidat spre domenii care după un timp s-au dovedit a fi legate cu spaţiile neolonome.

Gh. Vrănceanu a fost condus către descoperirea spaţiilor neolonome de anume preocupări, din fizica teoretică şi din geometria diferenţială, care erau de mare actualitate în epocă. Spaţiile neolonome în mecanica clasică apar în cinematica sistemelor dinamice cu legături liniare. O sursă iniţial mai puţin menţionată, dar în prezent reconsiderată, se găseşte în lucrările privind termodinamica ale lui *Gibbs* şi *Carathéodory*. Un spaţiu neolonom poate fi înzestrat cu o distanţă numită distanţă Carnot-Carathéodory, în acelaşi fel în care o varietate diferenţială poate fi dotată cu o distanţă riemanniana. Astfel, în geometria spaţiilor metrice spaţiile neolonome sunt cunoscute drept spaţii Carnot-Caratheodory. Această din urmă terminologie s-a impus în subiectele matematice pe care le voi evoca mai jos.

Geometria sub-riemanniană studiază spaţiile neolonome dotate cu distanţe Carnot-Carathéodory. Pentru a întelege uşor natura acestor distanţe, să ne închipuim că suntem în cabina unui camion cu remorcă. Dorim să parcăm camionul şi remorca sa paralel cu trotuarul. Este evident că deşi distanţa până la trotuar este, să zicem, de 2 metri, avem nevoie să parcurgem o distanţă mult mai mare pentru a parca, datorită diverselor manevre necesare. Distanţa aceasta este o distanţă Carnot-Caratheodory. Într-adevăr, sistemul mecanic format din camion şi remorca sa este descris de un spaţiu neolonom, în care se ţine cont de diversele legături (sau constrângeri) la care este supus sistemul. Ideal, un bun şofer va parca urmând o geodezică (drum de lungime minimă) în acest spaţiu neolonom, iar distanţa necesară pentru a parca reprezintă lungimea acestei geodezice. Imaginaţia matematicianului vede aici un spaţiu neolonom ale cărui puncte reprezintă configuraţii (poziţii) posibile ale camionului-remorcă, şi în care distanţele se măsoară de-a lungul geodezicelor. Cum arată aceste spaţii ascunse ochiului? În anii '20, după contribuţiile lui *Cartan*, *Levi-Civita* şi *Weyl* la teoria conexiunilor, Vrănceanu dă o descriere a acestor spaţii în termeni de geometrie diferenţială.

Mult mai târziu, în 1967, *Hörmander* [7] face o contribuţie fundamentală în domeniul ecuaţiilor cu derivate parţiale, în care studiază operatorii hipoeliptici (aceştia sunt pentru un spaţiu neolonom ceea ce un operator eliptic, de exemplu operatorul laplacian, este pentru un spaţiu riemannian). Această contribuţie a lui *Hörmander* este o dezvoltare a muncii pentru care primeşte medalia Fields în 1962.

În 1981 *M. Gromov* [5] demonstrează o teoremă reciprocă a alternativei lui *Tits*. Să considerăm un grup (discret) G generat de un număr finit de elemente. Dacă acest grup poate fi scufundat într-un grup de transformări liniare ale unui spaţiu vectorial finit dimensional, atunci creşterea sa este polinomială sau exponenţială (aceasta este alternativa lui *Tits*). Creşterea unui grup discret este o estimare a funcţiei care asociază unui număr natural n (suficient de mare) numărul de elemente ale grupului ce pot fi obţinute ca produse de cel mult n generatori. Deşi functia creştere depinde de alegerea generatorilor grupului, comportamentul său atunci când n tinde la infinit este independent de alegerea generatorilor. Alternativa lui *Tits* ne spune că pentru subgrupuri discrete (şi finit generate) ale grupurilor liniare numărul de elemente ale grupului ce pot fi scrise ca produse de cel mult n generatori se comportă (pentru n mare) ca un polinom în n sau ca o exponenţială în n. În particular, dacă grupul discret G este virtual nilpotent atunci creşterea sa este polinomială. *Gromov* demonstrează că dacă grupul G are o creştere polinomială atunci el este virtual nilpotent (adică modulo un grup finit el poate fi scufundat într-un grup de matrici superior triunghiulare).

Pentru a demonstra aceasta teoremă remarcabilă) *Gromov* face apel la spaţiile neolonome! Să ataşăm grupului G o distanţă: două elemente diferite x, y din G sunt la distanţa m (număr natural nenul) dacă putem scrie $y = ux$ cu u element al lui G care poate fi scris numai ca un produs de cel puţin m generatori ai lui G. Grupul G devine astfel un spaţiu metric, cu distanţa notată cu d. *Gromov* arată că putem privi de departe acest spaţiu metric, în felul următor: să notăm cu $B(n)$ mulţimea elementelor lui G care pot fi exprimate ca produs de cel mult n generatori. Pentru orice număr natural nenul n avem spaţiul metric $B(n)$ cu distanţa $\dfrac{d}{n}$. Acest spaţiu metric este de diametru cel mult 2 (pentru că am împărţit distanţa d la n). Pentru n din ce în ce mai mare $B(n)$ are din ce în ce mai multe elemente, iar elementele sale sunt din ce în ce mai apropiate. Obţinem astfel un şir de spaţii metrice care tinde (în sensul introdus de *Gromov*) spre un spaţiu metric care nu mai este discret, ci continuu, mai precis este un spaţiu neolonom de un tip special, numit grup Carnot (din nou o referire la terminologia împrumutată în termodinamică). Aceasta se întâmpla în ipoteza creşterii polinomiale a lui G. *Gromov* arată că acest spaţiu asimptotic este un spaţiu Carnot-Carathéodory asociat unui grup nilpotent graduat, de unde deduce că G este virtual nilpotent.

Grupurile Carnot, numite şi grupuri omogene, vezi *Folland*, *Stein* [4], sunt obiecte de interes în domenii ale analizei matematice şi ale ecuaţiilor cu derivate parţiale, legate de operatorii diferenţiali hipoeliptici ai lui *Hörmander*. O clasă interesantă a lor este formată de grupurile filiforme, introduse şi studiate de *Vrănceanu* în [14].

Aceste grupuri apar din nou în studiul spaţiilor neolonome o dată cu lucrarea lui *Mitchell* [10] din 1985. Acesta demonstrează că spaţiul tangent (în sens metric) la un spaţiu neolonom (regulat) este un grup Carnot, folosind un raţionament asemănător cu cel precedent. În loc să mergem spre infinitul mare, vom merge spre infinitezimal. Să privim vecinătatea unui punct x dintr-un spaţiu neolonom M din ce în ce mai de aproape. Pentru fiecare număr natural nenul n vom considera spatiul metric $B(n)$ al punctelor y aflate la distantă cel mult $\dfrac{1}{n}$ de punctul x, cu distanţa nd. Pentru fiecare n spaţiul metric $B(n)$ are diametrul cel mult 2, pentru că am înmulţit distanţa Carnot-Caratheodory iniţială d cu n. Pentru n din ce în ce mai mare, mulţimea $B(n)$ este din ce în ce mai mică, iar distanţele dintre punctele din ce în ce mai apropiate de x devin din ce în ce mai mari, tinzând spre o distanţă finită. La limită obţinem spaţiul tangent în punctul x la varietatea neolonomă M. *Mitchell* demonstrează că acesta este un grup Carnot (adică la rândul său un spaţiu neolonom).

Geometria metrică a spaţiilor neolonome este studiată în continuare de *Belläiche* [1] şi *Gromov* [6] (1996). Aceştia furnizează o descriere a spaţiilor neolonome intrinsecă din punctul de vedere al geometriei distanţei. Într-un astfel de spaţiu noţiunile intrinseci de: infinitezimal, derivare, fibrat tangent, sunt altele decât cele uzuale pentru o varietate diferenţială. Intrăm aici într-un domeniu fierbinte al matematicii actuale, cel al analizei matematice pe spaţii metrice generale. Spaţiile neolonome furnizează o clasă foarte interesantă de exemple pe care teoria generală este aplicată şi noi idei sunt testate. Domeniul este în dezvoltare, după cum arată contribuţii recente ale unor mari matematicieni: *Cheeger* [3] (1999), *Margulis*, *Mostow* [8] (1995) (şi răspunsul [9] la o critică a lui *Deligne*).

O parte a interesului pentru spaţiile neolonome privite din punctul de vedere al geometriei distanţei vine ca urmare a articolului lui *Pansu* [11] (1989), în care acesta dă o nouă demonstraţie a teoremei de super-rigiditate a lui *Margulis* (medalie Fields în 1978), privind scufundarea grupurilor discrete în anume grupuri continue (grupuri Lie). O scufundare quasi-izometrică unui grup discret într-un alt spaţiu metric (de exemplu un grup continuu cu o distanţă invariantă la stânga) este o scufundare fără a modifica distanţa pe grupul discret prea mult: să notăm cu d distanţa pe grupul discret în raport cu un sistem de generatori, cu d' distanţa pe spaţiul metric ţintă şi cu f funcţia care face scufundarea. Funcţia f este o quasi-izometrie dacă exista constante A şi B pozitive astfel încât pentru orice x, y din grupul discret avem:

$$\left|Ad'\left(f(x), f(y)\right) - d(x,y)\right| \leq B.$$

Exista întotdeuna o astfel de scufundare? Cum numarul B poate fi arbitrar de mare, este vorba de o proprietate metrica la scara mare. *Margulis* demonstrează pe o cale foarte lungă faptul că doar în cazuri foarte particulare o astfel de scufundare există, de unde numele de super-rigiditate: chiar dacă avem voie să deformăm arbitrar de mult (dar în limitele impuse de existenţa constantelor A, B) grupul discret ca să îl scufundam în grupul continuu, asta este posibil doar dacă cele două grupuri sunt apropiate în anume sens.

Pansu demonstrează că dacă privim de foarte departe scufundarea f, în stilul lui *Gromov*, aceasta devine o aplicaţie *Lipschitz* (aproape ca şi cum $B = 0$) între un grup Carnot (spaţiu neolonom) şi un spaţiu riemannian. Apoi demonstrează că o teoremă clasică de analiza (teorema lui Rademacher: orice aplicaţie Lipschitz este derivabilă aproape peste tot) este adevarată pentru situaţia dată, într-un sens generalizat, folosind o noţiune de derivare intrinsecă spaţiilor neolonome. În concluzie, există măcar un punct (din spaţiul metric asimptotic la grupul discret) în care scufundarea este derivabilă şi derivata sa este o aplicaţie liniară (morfism de grupuri). Existenţa acestor aplicaţii liniare este o problemă algebrica uşor de tranşat, ceea ce ne conduce la rezultatul de rigiditate al lui *Margulis*!

De aici, unde să mergem mai departe în studiul spaţiilor neolonome? Domeniul este vast, posibilităţile de extindere sunt mari. Îmi permit în continuare să sugerez o direcţie personală. Spaţiile neolonome ale lui Vrănceanu sunt prezente, după cum s-a văzut, în multe subiecte matematice legate de proprietăţile infinitezimale şi asimptotice (la infinit) ale spaţiilor metrice. Aici geometria şi analiza matematică se întâlnesc. Spaţiile neolonome ne obişnuiesc cu noi noţiuni de infinitezimal şi ne îndeamnă să reconsiderăm rezultate matematice clasice dintr-o nouă perspectivă. Vrănceanu a introdus spaţiile neolonome ca o construcţie din domeniul geometriei, sub domeniul geometriei diferenţiale, adică folosind concepte clasice de analiză matematică drept fundament. Ori, rezultate recente ne arată că aceste spaţii sunt, din punctul de vedere intrinsec al geometriei distanţei, altfel decât orice am văzut până acum. În loc de spaţii vectoriale găsim grupuri Carnot (un fel de spaţii vectoriale necomutative), iar în loc de varietăţi diferenţiabile găsim spaţii neolonome. Poate că este momentul să descoperim spaţiile neolonome ca exemple de spaţii pe care trăieşte o altă analiză matematică decât cea uzuală (cum este sugerat în [2]). Astfel, dacă facem o paralelă cu apariţia spaţiilor ne-euclidiene acum mai mult de un secol, poate vom putea afirma cândva că primele exemple de spaţii cu analiză ne-euclidiană (adică la orice scară altfel decât un spaţiu euclidian) aparţin geometrului român *Gheorghe Vrănceanu*.

Bibliografie

[1] A. Bellaiche, *The tangent space in sub-Riemannian geometry, in: Sub-Riemannian Geometry*, A. Bellaiche, J.J. Risler eds., *Progress in Mathematics*, Birkhüser, (1996), 4-78.

[2] M. Buliga, *Dilatation structures* 1. *Fundamentals*, J. of Generalized Lie Theory and Appl., 1, 2 (2007), 65-95.

[3] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal., 9 (1999), no. 3, 428-517.

[4] G.B. Folland, E.M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Mathematical Notes, 28, Princeton University Press, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.

[5] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps* (with an appendix by Jacques Tits). Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 53, 1981, 53-73.

[6] M. Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in: Sub-Riemannian Geometry, A. Bellaiche, J.J. Risler eds., Progress in Mathematics, 144, Birkhäuser, (1996), 79-323.

[7] I. Harmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., 119, 1967, 147-171.

[8] G. A. Margulis, G.D. Mostow, *The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot-Carathéodory space*, Geam. Funct. Analysis, 8 (1995), 2, 402-433.

[9] [9] G. A. Margulis, G.D. Mostow, *Some remarks on the definit ion of tangent cones in a Carnot-Carathéodory space*, J. D'Analyse Math., 80 (2000), 299-317.

[10] J. Mitchell, *On Carnot-Carathéodory metrics*, Journal of Diff. Geometry, 21 (1985), 35-45.

[11] P. Pansu, *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un*, Annals of Math., 129 (1989), 1-60.

[12] Gh. Vrănceanu, *Sur les espaces non holonomes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 183, 852 (1926).

[13] Gh. Vrănceanu, *Studio geometrica dei sistemi anolonomi*, Annali di Matematica Pum ed Appl., Serie 4, VI (1928-1929).

[14] Gh. Vrănceanu, *Clasificarea grupurilor lui Lie de rang zero*, Stud. Cercet. Mat., 1 (1950), 40-86.

[15] Gh. Vrănceanu, *Groupes discrets lineaires*, Rev. Mathém. Pure et Appl., VII, 2 (1962).

[16] Gh. Vrănceanu, *Gruppi discreti e connessioni affini*, Seminari dell 'Istituto Nazionale di Alta Matematica (1962-63).

Institutul de Matematică al Academiei Române,
Bucureşti, România
Marius.Buliga@imar.ro

C

DE V

Colegiul Naţional „u"
din Bârlad

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

Simpozion dedicat revistei „Recreaţii ştiinţifice"[1]
(1883-1888)

Academia Română – filiala din Iaşi a găzduit, în ziua de 15 martie a.c., simpozionul „125 de ani de la apariţia revistei Recreaţii Ştiintifice". Festivitatea s-a desfăşurat sub auspiciile Academiei Române, Facultăţii de Matematică a Universităţii Al. I. Cuza, Catedrei de matematică a Universităţii Tehnice Gh. Asachi şi ale Asociaţiei „Recreaţii Matematice".

Cuvântul de deschidere a aparţinut acad. *Viorel Barbu*, preşedintele filialei Iaşi a Academiei Române, care a subliniat faptul că revista „Recreaţii Ştiinţifice, este prima publicaţie din ţară cu acest profil adresată tineretului. Alături de alte evenimente ieşene remarcabile ale anului 1883 – apariţia ediţiei T. Maiorescu a Poeziilor lui Mihai Eminescu, inaugurarea statuii lui Ştefan cel Mare ş.a., apariţia Rereaţiilor Ştiintifice reprezintă un moment important al culturii şi spiritualităţii româneşti.

Fondatorii, distinşi profesori ai Universităţii din Iaşi sau ai şcolilor ieşene, cât şi colaboratorii revistei au asigurat o înaltă ţinută ştiinţifică acesteia. Revista a circulat în întregul Regat al României de atunci şi se remarcă prin varietatea subiectelor abordate, rigoare, frumoasa limbă română folosită şi o grafică excelentă pentru acele timpuri.

Acad. *V. Barbu* menţionează că, în cadrul simpozionului este lansată colecţia integrală a revistei „Recreaţii Ştiinţifice", reeditată în forma originară, nemodificată. Realizarea acestui proiect de reeditare se datoreşte sprijinului material entuziast al doamnei *Marinela Ghigea*, director al firmei Kepler Systemes d'Information, precum şi muncii depuse de dr. *Dan Tiba*, cercetător la

[1] Textul este reprodus după cel apărut în revista „Recreaţii Matematice", an X, nr. 3, 2008, pp. 99-108. (N. R.)

Institutul de matematică al Academiei Române şi de prof. dr. *Temistocle Bîrsan* de la Universitatea Tehnică Gh. Asachi.

Cuvântările ţinute de acad. *Radu Miron*, prof. dr. *Vasile Oproiu*, prof. dr. *Dorin Ieşan*, m.c. al Academiei, prof. dr. *Teodor Precupanu*, în această ordine, sunt prezentate mai jos. Programul simpozionului se încheie cu proiecţia unor documente privind revista „Recreaţii ştiinţifice" şi epoca în care a apărut această prezentate de prof.dr. *Temistocle Bîrsan*.

Recreaţii Ştiintifice – 125 ani de la apariţia primului număr

Acad. prof. dr. doc. Radu Miron

La 15 ianuarie 2008 s-au împlinit 125 de ani de la publicarea numărului 1 din primul volum al revistei „Recreaţii Ştiinţifice". Menită a face educaţie ştiinţifică tineretului din Regatul României, revista, care a avut o existenţă de numai şase ani, a depăşit graniţele în toate zonele locuite de români. Înfiinţată de zece oameni învăţaţi din vechea capitală a Moldovei, ea avea să imprime în conştiinţa locuitorilor acestui pământ primele capitole elevate de istorie a ştiinţelor din ţară – şi cele întâi lecţii pentru un învăţământ modern în domeniul ştiinţelor exacte. Peste veac s-a văzut înrâurirea covârşitoare a ideilor vehiculate în cuprinsul acestei reviste, în Şcoala de toate gradele şi în cercetare, conducând la integrarea noastră în rândul ţărilor care aveau deja tradiţii seculare.

Datorită conţinutului preponderent matematic se poate afirma cu deplin temei că revista a deschis prima pagină, a matematicilor româneşti. Aşa cum sa remarcat mai târziu, dacă publicaţia s-ar fi numit „Recreaţii matematice", ea ar fi constituit prima publicaţie din lume în domeniu, care se adresează tineretului. Este adevărat că la şapte ani de la dispariţia „Recreaţiilor ştiinţifice", în 1895 a fost înfiinţată „Gazeta Matematică" cu adresă specială pentru tineretul român. Dar această revistă este considerată a doua din lume ca profil şi destinaţie.

Evident, apariţia „Gazetei", aşa cum sublinia *Gheorghe Ţiţeica*, a fost impulsionată de „Recreaţiile ştiinţifice".

Acum, la 125 de ani de la înfiinţare a celebrei reviste, se cuvine să exprimăm omagii profunde memoriei fondatorilor: *N. Culianu*, *C. Climescu*, *I. Melic* de la Universitatea Al. I. Cuza, *G. I. Lucescu*, *V. Paladi*, *G.I. Roşiu*, *I. D. Rallet*, *G. Zarifopol*, *I. V. Praja* şi *I. M. Dospinescu* din învăţământul preuniversitar ieşean. Prin competenţa, pasiunea şi sacrificiile personale făcute cu generozitate ei au reuşit să trezească interesul pentru ştiinţă, în general şi să stimuleze gustul pentru matematici în special.

Sunt emoţionante cuvintele scrise într-un editorial al revistei: *Credem că noi am tras cea întăi brazdă care conduce cătră lucrări originale. Brazda-i mică şi şi îngustă, dar există*!

Personalitatea fondatorilor este bine cunoscută. Ei sunt prezentaţi de *George Şt. Andonie* în volumul 1 din *Istoria Matematicii în România*. Majoritatea lor sunt oameni de ştiinţă cu studii înalte făcute în Franţa, Italia, Olanda şi Germania. Un gând de recunoştinţă colaboratorilor, nu mai puţin celebri: *M. Tzony*, *V. Costin*, *P. Tanco*, *C. Gogu* şi rezolvitorilor pasionaţi, elevi pe vremea aceea, *E. Pangrati* şi *D. Pompeiu*.

Nu trebuie să uităm pe oamenii de- ştiinţă care au susţinut peste timp importanţa revistei şi impactul ei în cultura românească. Cităm doar câţiva dintre ei: *Alexandru Myller*, *Octav Mayer*, *Ilie Popa*, *Gheorghe Gheorghiev*, *Gheorghe Bantaş*, *Gheorghe Ţiţeica*, *G. Şt. Andonie*, *N. N. Mihăileanu* etc.

Condiţiile istorice în care a apărut în 1883 revista „Recreaţii ştiinţifice" nu erau dintre cele mai favorabile. Unirea Principatelor abia se înfăptuise, Regatul României era abia întemeiat, Războiul de Independenţă din 1877 lăsase urme adânci în conştiinţa românilor, alfabetul chirilic fusese înlocuit cu cel latin, limba română literară abia îşi definitivase procesul de unificare, românii îşi afirmau în mod decisiv aspiraţia spre o societate modernă. În atari condiţii, deşi apăruseră cu 23 de ani înainte universităţile din Iaşi şi Bucureşti, şcoala de toate gradele trebuia profund reclădită. Era nevoie imperioasă de regândit programarea curriculară, de pregătit personalul didactic, de scris manuale bune în limba română, de construit şcoli etc.

În atari condiţii spirituale, materiale şi sociale dure, a pune bazele unei reviste de cultură ştiinţifică era un act de curaj, de patriotism. El costituia o importantă realizare destinată poporului nostru. Soliditatea acestui edificiu este dată de calitatea ştiinţifică, didactică şi educaţională a subiectelor publicate, de limbajul ştiinţific adoptat, de grafica de excepţie utilizată în acea vreme. Am prezentat aceste aspecte în articolul „Centenarul revistei Recreaţii Ştiintifice", Probleme de istoria şi filozofia ştiinţei, vol. X, 1984, Filiala Iaşi. Valabilitatea afirmaţiilor făcute atunci îşi păstrează temeiul şi astăzi. Din acest motiv reproduc o parte din text:

Tonul întregii producţii matematice, cuprinzând mai bine de 90% din cele 1920 de pagini cât însumează această revişţă, a fost dat în primul rând de fondatorii ei, care, prin prestigiul lor, au atras foarte curând valoroşi colaboratori: Miltiade Tzony – profesor de mecanică teoretică la Universitatea din Iaşi, Candide (probabil Victor Costin, pe atunci student la Paris), Iacob Solomon - inginer, Paul Tanco – profesor de matematică şi fizică la Gimnaziul Superior din Năsăud, Constantin Gogu – profesor de geometrie analitică la Universitatea din Bucureşti, Vasile Butureanu – profesor de mineralogie şi petrografie la Facultatea de ştiinte din Iaşi ş. a.

În paginile revistei sunt publicate articole, note, probleme şi soluţii din domenii ca: aritmetică, algebră, geometrie elementară, geometrie analitică şi diferenţială, calcul diferenţial şi integral, mecanică, astronomie, istoria matematicii, chimie, fizică, geografie, Apare prima traducere a cărtii întâi din celebrele „Elemente" ale lui Euclid. Miltiade Tzony tipăreşte în coloanele ei o remarcabilă culegere de probleme de mecanică teoretică. Geometria proiectivă, domeniu de mare actualitate în acea vreme, este prezentă prin traducerea primelor opt paragrafe din vestita lucrare „Geometria de pozictie" a lui Criristian von Staudt. Întâile elemente din istoria matematicilor în antichitate sunt transpuse în limba română de Iacob Solomon.

La succesul binemeritat al Recreaţiilor ştiinţifice a contribuit şi prezentarea grafică excelentă. Scrisă într-o limbă literară elevată, revista are, cu exceptia unor termeni matematici în formare, ceva din culoarea şi prospetimea revistelor actuale.

Privită global, ca act de cultură ştiinţifică, revista rivalizează cu cele mai bune publicaţii de acest gen tipărite acum pe plan monidial.

Închei aici relatarea din articolul amintit. Dar ultima frază trebuie corectată cu „acum un secol şi un sfert pe plan mondial".

Subliniez faptul că în tot cuprinsul celor şase volume ale revistei impresionează grija pentru rigoarea prezentării, acurateţa exprimării in limba română, actualizarea expunerilor, informaţia de ultimă oră, profunzimea raţionamentelor şi, nu în ultimul rând, atenţia acordată contribuţiilor personale ale tinerilor rezolvitori sau autori ale problemelor propuse spre publicare.

A fost realizată astfel în premieră, o revistă românească extrem de importantă pentru invăţămitnt şi cercetare în ştiinţele exacte, de acelaşi nivel cu reviste similare consacrate şi vestite din lume. După şapte ani de la stingerea activităţii acestei reviste, ideea de a răspândi în rândul tineretului pasiunea pentru matematică va fi preluata de „Gazeta Matematică".

La 125 de ani de la apariţia revistei „Recreaţii ştiinţifice", generaţiile de astăzi omagiază acest eveniment ca semn de adâncă recunoştinţă adusă înaintaşilor noştri pentru contribuţia lor inestimabilă la tezaurul ştiinţei şi culturii româneşti.

Şi un scurt adaos: Centenarul apariţiei revistei „Recreaţii ştiinţifice" a fost organizat în 1983 de matematicieni ieşeni în Seminarul Matematic „Alexandru Myller", iar sărbătorirea celor 125 de ani de la apariţie a fost iniţiată tot în cadrul acestui Seminar pregătită fiind de Asociaţia „Recreaţii matematice", Facultatea de matematică şi Institutul de Matematică „Octav Mayer" de la Filiala din Iaşi a Academiei Române. Asociaţia „Recreaţii matematice" îşi face un titlu de onoare prin reeditarea integrală, exclusiv prin grijă proprie, a colecţiei revistei „Recreaţii ştiinţifice". Acest fapt îl datorăm prof. univ. *Temistocle Bîrsan* de la Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi din Iaşi, cercetătorului dr. *Dan Tiba* de la Institutul de Matematică al Academiei Române din Bucureşti şi doamnei *Marinela Ghigea* – director al firmei Kepler Systemes d'Information. Îi asigurăm de toată preţuirea şi gratitudinea noastră.

Rolul şi ponderea geometriei în revista „Recreaţii ştiintifice"

prof. dr. Vasile Oproiu

În revista „Recreaţii Ştiinţifice", scrisă şi editată de un grup de oameni de ştiinţa şi cultură inimoşi (*N. Culianu*, *C. Climescu*, *I. Melik*, *G. I. Luceacu*, *V. Paladi*, *G.I. Roşiu*, *I. D. Rallet*, *G. Zarifopol*, *I. V. Praja* şi *I.M. Dospinescu*), s-au adunat şi publicat diferite materiale din domeniile matematicii, fizcii, chimiei, geografiei, cosmografiei, topografiei, mineralogiei, istoriei matematicii etc. Revista se adresa elevilor din clasele de gimnaziu şi liceu, dar şi altor categorii de persoane interesate de cunoaştere: profesori, studenţi, funcţionari, militari etc.

Geometria, ca ramura a matematicilor are o pondere destul de însemnata în paginile revistei. Trebuie să menţionăm, de la început, că *G.I. Roşiu* publică între anii 1883-1885 prima carte a *Elementelor lui Euclid* (traducere după o ediţie italiană). Am regăsit cu o anumită emoţie şi nostalgie multe formulări pe care le întâlnisem când eram student şi apoi le citisem în cărţile lui *Efimov* (ediţia în limba română şi cea în franceză) şi în cartea lui *I. Vaisman.* Astfel (în volumul

II al „Recreaţiilor“), printre definiţiile lui *Euclid* am regăsit formulări precum: *Punctul este aceea ce nu are părţi, adecă nu are nici o mărime*, *Linia este lungime fără lărgime*, *Suprafaţa plană este aceea care este aşezată egal în respectul tuturor liniilor sale drepte.* Postulatele şi axiomele au fost publicate anterior, în primul volum, într-o ordine diferită de cea cu care suntem obişnuiţi. Astfel, faimosul postulat V al lui *Euclid* apare ca axioma XII. Autorul prezintă şi definiţiile şi axiomele, aşa cum au fost prelucrate de *Legendre* în Geometria sa, ediţia V, Paris, 1804. *Legendre* nu defineşte punctul şi, în legatură cu definiţia, formulează următoarea aserţiune: *Definitia unui lucru este exprimarea raporturilor sale către lucruri cunoscute.* După care, se încumetă să definescă dreapta: *Linia dreaptă este drumul cel mai scurt de la un punct la altul.* Mai sunt prezentate comentarii critice ale diverşilor matematicieni relativ la aceste definiţii, inclusiv noi definiţii: *Cea mai simplă din toate liniile este linia dreaptă a căria noţiune este familiară la toţi şi despre care ne dă o idee un fir întins.* Apoi sunt prezentate propoziţiile de la I la XXII. Cum spuneam, prezentarea „Elementelor“ continuă în volumul III cu propoziţiile rămase şi cu exerciţiile la cartea I.

În revistă sunt prezentate numeroase aspecte ale geometriei elementare, utile elevilor, profesorilor şi altor persoane interesate: maxime şi minime geometrice, media şi extrema raţie, calculul lungimilor unor linii importante din triunghi, calcule pentru patrulaterul inscriptibil (în primul volum), proprietaţi ale poligoanelor şi dreapta lui Simson (în vol. II), calcularea volumelor piramidei trunchiate şi al conului trunchiat, proprietaţi sintetice ale elipsei (în vol. III), teoria transversalelor, diviziunea armonică, fasciculul armonic, poli şi polare, geometria de poziţie a lui Staudt (în vol. IV); aceasta din urmă se continua şi în volumul V. Chestiunile de geometrie analitică sunt considerate separat şi se referă la: secţiuni plane în conul drept, construcţii de curbe, cu exemplificări din clasele curbelor celebre, tratarea acestora în coordonate polare, plane principale la suprafeţele de gradul al doilea.

O secţiune importantă în revistă este cea a problemelor propuse (de regulă, în jur de 10 probleme la fiecare număr), la care se adugă, pe parcurs, cea cu rezolvările şi listele de rezolvitori. Trebuie să menţionăm că, în Regatul României de atunci, existau câteva zeci de gimnazii şi licee (oricum, sub 30) şi că numărul celor care rezolvau probleme era destul de mic. Moda rezolvărilor de probleme la reviste de matematică nu prinsese încă. Menţionăm că existau şi colaborări venite de la elevi din Transilvania, Banat şi alte regiuni ale viitoarei Românii Mari.

Ca o apreciere cu caracter general, conţinutul revistei „Recreaţii ştiinţifice“ era destul de ridicat din punct de vedere al nivelului chestiunilor de geometrie tratate. Subiectele erau interesante şi atractive pentru numeroşi cititori. Cred că, în redacţia revistei, erau persoane care doreau să facă revista cât mai atractivă.

Răsfoind cele şase volume am dat şi peste un articol fascinant de la secţia cosmografie, scris de *G.I. Lucescu*, în care se explica în ce manieră au fost concepute calendarele iulian şi gregorian şi că motivul pentru care s-a făcut trecerea de la unul la altul a fost legat de ideea că, în acord cu hotărârea Conciliului de la Niceea din anul 325, punctul de plecare pentru fixarea zilei de Paşti trebuia să fie echinocţiul de primăvară şi acesta trebuia să fie mereu la 21 martie. După aceea, se aşteapta prima noapte cu lună plină şi Paştele se fixa în duminica imediat următoare (astfel, în 2008, noaptea cu lună plină cade exact în 21 martie şi Paştele catolic este fixat în 23 martie: fixarea Paştelui ortodox este mult mai complicată şi ţine de nişte date din calendarul iudaic). De la data Conciliului de la Niceea până în 1582 calendarul iulian rămăsese în urmă cu 10 zile faţa de calendarul real (anul din calendarul iulian era puţin mai lung decât anul real). Acest lucru influenţa foarte mult diverse activitaţi practice, de exemplu, unele lucrări agricole ce se făceau în strânsă legătură cu sărbătorile religioase. În 1582, papa Grigore al XIII-lea a dat o bulă prin care se decidea avansarea calendarului iulian, existent, cu 10 zile şi că anii multipli de sute (mai puţin cei multipli de 400) nu sunt bisecţi. Acest calendar mai are o mica eroare care constă în rămânerea în urmă cu o zi în circa 3300 ani, eroare considerată rezonabilă şi care va fi corectată în viitor. În ţară la noi, calendarul grigorian a fost adoptat în 1923 (s-a trecut la stilul nou!), dată când întârzierea calendarului iulian faţă de cel real, sau cel grigorian, ajunsese la 13 zile.

Revenind la revista „Recreaţii ştiinţifice“, apreciez că un cititor interesat poate să găsească în cuprinsul ei lucruri incitante, atât în domeniul geometriei, cât şi în alte domenii ale matematicilor şi ale altor ştiinţe.

Despre problemele de mecanică

Prof. dr. Dorin Ieşean, m. c. al Academiei

Pe lângă alte chestiuni interesante, în revista „Recreaţii ştiinţifice“ au apărut şi un număr de probleme de mecanică raţională, semnate de *Miltiade Tzony.* Pe vremea când a publicat aceste probleme, *M. Tzony* era profesor de mecanică teoretică la Universitatea din Iaşi (a funcţionat în această calitate în perioada 23.X.1869 - 15.III.1898).

Miltiade Tzony este autorul unui curs de mecanică, prezentat în manuscris, în două volume. Primul volum a fost scris în 1869, iar al doilea volum în 1881. Pe prima pagină a acestui curs autorul scrie: *„Cursul de Mecanică rationale şi aplicată; Profesat la Universitatea de Jasy; După cei mai buni autori francezi: Delaunay, Sturm, Duhamel, Bellanger, Bresse, Bour, Collignon, Mesal. Chasles: de Miltiade Tzony, Licentiat în ştiinţe matematice de la Sorbona din Paris, Ingineriu al Şcoalei de poduri din Paris, Vechiu elevu al şcoalei politchnice din acestu oraşu, Profesor al Universităţii de Jasy şi a Lyceului Nou din Jasy*“. Lecţiile de mecanică raţională de la Universitatea din Iaşi se făceau după acest curs.

În perioada 1885-1888, *M. Tzony* publică *Un curs de probleme* în revista „Recreaţii ştiinţifice“. El mărturiseşte că acest lucru îl face *„în scopul de a uşura studentilor Universităţilor noastre completa pricepere a cursului de mecanică ratională şi nimerita întrebuinţare a principiilor acestei însemnate ştiinţe*“ (vol. III, pp. 77-78). Să vedem care este originea problemelor şi a rezolvărilor date. *M. Tzony* ne spune că *„problemele sunt lucrate după diverşi autori între care figurează în primul loc abatele Jullien, a cărui carte în această materie a devenit clasică*“. Am constatat că toate cele 98 de probleme publicate de *Tzony* în „Recreaţii ştiinţifice“ sunt luate din cartea călugărului *P.M. Jullien* „Problémes de mécanique rationnelle“, apărută la Paris în anul 1855. Cartea lui *P.M. Jullien* conţine atât probleme originale cât şi probleme ale altor autori. În „Recreaţii ştiinţifice“ *M. Tzony* prezintă 36 probleme ale cărui autor este *P.M. Jullien*, 24 de probleme datorate lui *W. Walton* şi 28 probleme ale altor autori (printre care *Euler*, *Bernoulli*, *Leibniz*, *Laplace*, *Gauss*, *Möbius*). Menţionăm că problemele datorate lui *W. Walton* se găsesc în cartea acestuia *A Collection of Problems in Illustration of the Principles of Theoretial Mechanics*, apărută la Cambridge în anul 1842.

La începutul prezentării problemelor, *M. Tzony* afirmă că *„de câte ori ne va fi posibil vom indica la finea fiecărei probleme autorul căruia se datoreşte*“. Problemele publicate de *Tzony* sunt şi rezolvate şi *„cu toate indicaţiunile necesare pentru a putea fi cuprinse cu uşurinţă de tânărul public cetitoriu căruia este în special destinat*“. *M. Tzony* susţine, pe drept cuvânt, că *„opera abatelui Jullien este scrisă intr-un mod atât de laconic încât cetirea ei de începători este foarte laborioasă şi în unele puncte aproape cu totul neînţeleasă*". Dintre problemele publicate de *Tzony* în „Recreaţii ştiinţifice“ un număr de 51 sunt rezolvate în cartea lui *P. M. Jullien.* Celelalte sunt probleme pe care *Jullien* le-a propus spre rezolvare. O parte dintre problemele nerezolvate de *Jullien* sunt însă însoţite de figuri şi răspunsuri în cartea lui *W. Walton.* Am comparat aceste rezolvări şi figuri cu cele date de *M. Tzony* în „Recreaţii ştiinţifice“. Se poate spune cu certitudine că *Tzony* nu s-a inspirat din cartea lui *W. Walton.*

Fiecare capitol din culegerea de probleme este prefaţat cu *„o scurtă amintire a rezultatelor finale ale teoriei, întovărăşite de câteva noţiuni istorice pe care, în lipsa altor documente, le vom împrumuta pentru cea mai mare parte din opera ştiinţifică de care facem menţiune*“. Este uşor de văzut că aceste comentarii sunt traduse din cartea lui *P. M. Jullien.*

Menţionăm că rezolvările prezentate de *M. Tzony* sunt clare, iar figurile sunt îngrijite şi binevenite. Un lucru remarcabil este faptul că şi în cazul problemelor rezolvate de *Jullien*, *M. Tzony* face figuri suplimentare şi adaugă explicaţii. În problemele publicate de *Tzony* în „Recreaţii ştiinţifice“ sunt 88 de figuri, dintre care 66 nu se află în cartea lui *Jullien.*

Referitor la repartiţia pe ani a problemelor se constată că în anul 1885 sunt publicate 18 probleme, în anul 1886 apar 33 probleme, în anul 1887 sunt publicate 23 probleme, iar în anul 1888 apar 18 probleme. În anul 1888 revista „Recreaţii ştiinţifice“ îşi încetează apariţia. Acest lucru a curmat publicarea firească a altor probleme.

Menţionăm că problemele apărute se referă doar la partea de Statică a cursului predat de *Tzony* la Universitate. Dintre acestea, 18 se referă la echilibrul punctului material,39 la echilibrul corpului rigid, 6 tratează echilibrul unui sistem de bare articulate, 27 sunt dedicate echilibrului firelor, iar 8 se referă la principiul *„lucrului mecanic virtual*“.

Cursul lui *M. Tzony* (în manuscris) şi problemele publicate de el în „Recreaţii ştiinţifice“ au stat la baza învăţământului Mecanicii din ţara noastră.

În afară de activitatea de profesor, *Miltiade Tzony* s-a remarcat prin munca sa depusă în vederea propăşirii României. A fost senator, secretar de stat la Ministerul Construcţiilor Publice, director al C.F.R. Printre altele, oraşul Iaşi îi datorează pavarea străzilor.

Despre *M. Tzony* se pot spune multe lucruri. Un fost elev de-al său, *Petru Culianu*, care a urmat cursurile de mecanică de la Universitatea din Iaşi în anii 1890, îl descrie pe *Miltiade Tzony* astfel: „*Cu mintea agera, cu figura frumoasă (a fost luat ca model de pictorul Grigorescu pentru unele figuri din biserica de la mănăstirea Agapia) ce corespund întru totul nobleţei caracterului său, el a fost cu totul devotat datoriei şi înaltei misiuni a profesorului*".

Problematica de algebră şi analiză matematică în revista „Recreaţii ştiinţifice"Prof. dr. Teodor Precupeanu

Pentru matematica românească, apariţia revistei „Recreaţii ştiinţific"e din iniţiativa unei elite de profesori ai universităţii şi ai liceelor din Iaşi, reprezintă un moment important, de început, pentru crearea unei atmosfere propice dezvoltării ştiinţelor matematice, de atragere a tinerilor, stimulându-i şi amplificându-le pasiunile, călăuzindu-i spre problemele moderne ale acelei perioade.

Este de remarcat faptul că iniţiatorii revistei erau la curent cu multe din preocupările existente în matematica europeană, având o bună informare, facilitată de accesul la o serie de reviste importante, îndeosebi din Franţa, Italia şi Germania. Sunt semnalate nu numai apariţia unor rezultate importante, ci şi diverse evenimente ale comunităţii ştiinţifice, cum ar fi, spre exemplu, apariţia revistei *Acta Matematica* fondată de *Mittag-Leffler* prin casa regală suedo-norvegiană, solemnitatea retragerii din învăţământ la vârsta de 70 de ani a marelui matematician *Eugene-Charles Catalan*, apariţia unor tratate importante de matematică, discuţiile generate de proiectul Turnului Eiffel, ce urma să se construiască în Paris.

Adresându-se în primul rând elevilor din învăţământul secundar, revista a stimulat, de asemenea, preocupările profesorilor pentru modernizarea învăţământului matematic, găzduind în paginile sale dezbateri interesante cu caracter metodic asupra programelor analitice şi a metodelor prin care să fie atraşi elevii pentru studiul matematicii, să se asigure o cât mai bună accesibilitate, punând pe primul plan intuiţia şi dezvoltarea abilităţilor de rezolvitori de probleme.

Să remarcăm faptul că în acea perioadă, sfârşitul secolului al XIX-lea, unele discipline componente ale matematicii nu erau încă bine conturate, în acord cu felul în care ele erau concepute la marile universităţi europene, influenţate de cărţile importante de matematică din acei ani. Abia apăruse cursul de analiză matematică al lui *Sturm* (1880) şi cel de calcul diferenţial şi integral al lui *Catalan* (1878), autor şi al unei cărţi despre serii, unică la acel moment, cărţi ce urmau tratatelor celebre scrise de *Leibniz*, *Bernoulli* sau *Serret.*

Algebra şi analiza matematică este prezentă în paginile revistei atât prin articole cu caracter teoretic informativ asupra unor chestiuni importante, cât şi printr-o gamă variată de exerciţii şi probleme ce vizau şi pe studenţii anilor pregătitori pentru şcolile politehnice din ţară sau din străinătate. Semnalăm astfel mai mult articole scrise de *C. Climescu* dedicate numerelor complexe (numite cantităţi imaginare), numere care încă erau evitate de mulţi matematicieni. Întâlnim, de asemenea, demonstraţia teoremei fundamentale a algebrei precum şi unele consideraţii asupra dreptelor imaginare sau asupra unor funcţii complexe, date însă sub formă implicită prin relaţii polinomiale. Mai mult, în unele probleme apar integrale ale unor funcţii complexe, ştiindu-se a se depăşi aspectele dificile de multivocitate şi determinându-se cu claritate valorile lor principale.

În cadrul algebrei sunt cuprinse şi seriile numerice. dezvoltă.ile tayloriene, concepute ca sume (numerice sau polinomiale) infinite. Convergenţa acestora înţeleasă intuitiv se reduce de fapt la extinderea operaţiilor numerice algebrice şi pentru ∞ (nu reiese dacă se folosea şi $-\infty$), fiind cunoscute limitele fundamentale. Se foloseau însă pentru convergenţă criterii fine, aproape toate cele cunoscute astăzi. Autori ai articolelor respective sunt *C. Climescu*, *I.D. Rallet* şi *I. V. Praja.* Erau folosite în mod uzual dezvoltările în serii de puteri ale funcţiilor elementare. Tot ca făcând parte din algebră sunt prezentate cunoscutele formule *Lagrange* şi *Newton* de interpolare într-un articol foarte interesant scris de *Alex. Sadoveanu.*

În primul volum, din 1883, problema dezvoltării funcţiilor în serie este dată ca făcând parte din Analiza algebrică iar Calculul integral era considerat separat de Analiza matematică. De fapt, analiza matematică era concepută la acel moment numai ca teorie a derivabilităţii având ca principale rezultate teorema de medie a lui *Lagrange* şi condiţiile suficiente de extrem la funcţii de una sau mai multe variabile. Problemele de calcul de arii sau volume erau considerate ca făcând parte din geometrie sau intervenind în probleme de mecanică.

Noţiunea de derivată era acceptată prin interpretările ei: geometrică – de tangentă – sau cele din mecanică. Mai mult, trebuie avut în vedere că însăşi noţiunea de funcţie, fundamentală pentru întreaga matematică, era concepută în acele timpuri în accepţia euleriană, ceea ce corespunde astăzi funcţiilor elementare.

Menţionăm că ecuaţiile diferenţiale sunt frecvent întâlnite în partea de mecanică şi de geometrie a curbelor plane (probleme concrete de aflare a unor curbe dacă se dau anumite proprietăţi metrice legate de tangente) şi nu sunt prezentate ca aparţinând disciplinei de astăzi Ecuaţii diferenţiale, ceea ce este normal, întrucât această disciplină avea să se contureze în matematică mult mai târziu. Este însă prezentată in cadrul Analizei matematice problema schimbării de variabilă cu suportul oferit de ecuaţiile diferenţiale şi schimbările de coordonate (îndeosebi polare şi sferice) deosebit de importante în mecanică, geometrie şi astronomie.

Problemele de algebră şi analiză matematică prezente în cele şase volume ale revistei sunt deosebit de frumoase şi ilustrative, de mare diversitate, oferind o imagine exactă a conţinutului disciplinelor de matematică din acea perioadă. Aproape toate pot fi regăsite de fapt în culegerile de probleme de astăzi.

În încheiere, subliniem încă odată rolul remarcabil avut de revista „Recreaţi Ştiinţifice în dezvoltarea şi impulsionarea învăţământului matematic românesc în concordanţă cu cel european, ce era urmărit îndeaproape.

Nu aveau să treacă mulţi ani după încetarea bruscă a apariţiei acestei reviste şi la universitatea ieşeană un fost rezolvitor al „Recreaţiilor ştiinţifice" elabora primele lucrări originale de matematică. Este vorba de marele matematician român *Dimitrie Pompeiu*, ale cărui rezultate privitoare la teorema creşterilor finite, obţinute în perioada când funcţiona ca profesor al Universităţii din Iaşi, sunt citate şi astăzi impresionând prin profunzimea şi eleganţa lor. Cercetările sale de analiză matematică sunt de fapt primele cercetări ştiinţifice originale de matematică la Universitatea din Iaşi.

Invocând anterior numele lui *Catalan*, matematician cu vaste preocupări matematice (analiză, algebră, geometrie, teoria numerelor), se cuvine a aminti numele unuia dintre primii autori români ai unor cercetări ştiinţifice originale de matematică,*N. Şt. Botez*, care stabileşte o frumoasă identitate legată de seria armonică, cunoscută azi ca identitatea *Catalan-Botez*, rolul lui *Catalan* fiind acela de a o menţiona în unul din articolele sale cu precizarea lui *Botez* ca autor.

Revista „Recreaţii Ştiinţifice" constituie pasul premergător apariţieil „Analelor ştiinţifice ale Universităţii Al. I. Cuza", în 1900, revistă dedicată cercetărilor originale ale profesorilor Universităţii ieşene, dar care a publicat încă din primele numere şi articole ale unor recunoscuţi matematicieni străini ca *Lucien Godeaux*, *Mauro Picone*, *Kentaro Yano*, *T. J. Willmore* ş.a.

DIN VIAŢA SOCIETĂŢII

Şcoala de vară de la Buşteni

Anul acesta a XII-a ediţie a cursurilor de vară pentru perfecţionarea profesorilor din învăţământul preuniversitar s-a desfăşurat , ca deobicei la Buşteni, în perioada 28 iulie-7 august. Cursurile , reluate de S. S> M. R. în 1997, au o tradiţie mult mai veche, ele desfăşurându-se, pentru prima dată, în anul 1957 în localitatea Săcele şi suferind o mică întrerupere în anii '90.

Conform tradiţiei înstăpânite în ultimii ani, gazda cursurilor a fost Centrul de Pregătire pentru Personalul din Industrie care ne-a asigurat – prin persoana domnului director general *Irinel Ghiţă* şi a subordonaţilor săi – condiţii deosebite atât în privinţa desfăşurării propriu-zise a cursurilor, cât şi în privinţa cazării participanţilor. Le adresăm, pe această cale, mulţumirile noastre.

Programul zilnic a cuprins trei module (conferinţe) – inclusiv sâmbătă – pentru a acoperi un număr de 40 de ore, în intervalul 29 iulie - 6 august, în care s-au desfăşurat cursurile propriuzise. La încheierea lor, pe 6 august, participanţii au susţinut un colocviu, în cadrul c aruia au fost prezentate cele mai interesante referate selectate de comisia de examinare. Subiectele referatelor au fost la alegerea cursanţilor, vizând, în general, teme ştiiţifice sau metodice, dar şi unele probleme de istoria matematicii, precum şi problematica generală a învăţământului preuniversitar. Diversificarea tematicii abordate de cursanţi constituie o caracteristică a ultimilor ani, ea reflectând lărgirea ariei de preocupări a profesorilor, tendin cta acestora de a se ancora mai ferm în realitate, preluând tradiţiile înaintaşilor. Vom remarca, în mod deosebit, seriozitatea şi competenţa cu care cursanţii au tratat tematica aleasă – desigur, în mare măsură clasică – foarte mulţi dintre ei vizând deschideri către alte domenii ale învăţământului sau ale vieţii de zi cu zi sau conexiuni metodice interesante şi cu un vădit caracter original. Comisia de selecţie a lucrărilor a fost alcătuită din acad. *Ioan Tomescu*, prof. univ. dr. *Dorel Duca* şi semnatarul acestor rânduri.

Faţă de anul trecut s-a înregistrat o creştere notabilă a numărului de participanţi (54 faţă de 37), în ciuda faptului că aceste cursuri nu au fost încă acreditate pentru ca profesorii să poată beneficia de prevederile legale. Sperăm ca, în urma demersurilor pe care le intreprindem anul acesta, să obţinem o oficializare a lor, măcar parţială.

Spre deosebire de alţi ani, repartiţia zonală a participanţilor a fost destul de uniformă , menţinându-se totuşi, pe primul loc judeţele din Moldova şi, dintre acestea, judeţul Iaşi unde se remarcă, din nou, activitatea neobosită a profesorului *Vasile Nechita* – secretarul filialei locale. Ca un fapt pozitiv, vom menţiona prezenţa unui număr mai mare de bucureşteni (10), faţă de numărul extrem de mic din anii precedenţi.

Viul interes stÂrnit de conferinţe printre participanţi a fost marcat de discuţiile dintre aceştia şi conferenţiari, în cadrul şi în afara cursurilorprecum şi de sondajul efectuat la finele cursurilor. De altfel aceste cursuri au constituit totdeauna u teren fertil pentru schimbarea opiniilor între cursanţi şi între aceştia şi conferenţiari pe teme privind învăţământul matematic românesc şi viitorul acestuia.

Tematica cursurilor a fost atent selectată, ţinând seama şi de subiectele sugereate de cursanţi în sondajele efectuate în anii anteriori. În măsura posibilităţilor, am căutat să păstrăm un echilibru între subiectele cu caracter de informare ştiinţifică şi cele vizând metodica şi metodologia predării la clasă, primele având, evident. un caracter preponderent. Selectarea conferenţiarilr a fost făcut a cu deosebită grijă, fiind solicitaţi cu precădere acei universitari, care în decursul timpului, s-au aplecat cu interes şi seriozitate asupra învăţământului preuniversitar, fiind preocupaţi de perpetua îmbunătăţire şi diversificare a acestuia; nu în ultimul rând, am ţinut seama şi de simpatiile cursanţilor exprimate prin sondajele de opinie din anii precedenţi. Aceştia – conferenţiarii - au ştiut să stabilească un mod de comunicare simplu şi eficient cu profesorii cursanţi, fără a abuza de informaţia ştiinţificăşi, ceea ce ni se pare esenţial – neadoptând o poziţie *ex cathedra*.

Iată tematica conferinţelor susţinute:

• prof. univ. dr *Ioan Tomescu*, membru corespondent al Academiei Române (Universitatea din Bucureşti) – „Numere binomiale şi multinomiale “ (o conferinţă); „Principii de numărare“ (o conferinţă); „Principiul dublei numărări“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr *Constantin Popovici* (Universitatea din Bucureşti) – „Infinitatea numerelor prime“ (o conferinţă); „Calculabiltate“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr *Doru Ştefănescu* (Universitatea din Bucureşti) – „Localizarea rădăcinilor polinoamelor“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr *Radu Gologan* (Universitatea Politehnică din Bucureşti) – „Rezolvarea problemelor date la O. I. M. 2008“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr *Adrian Albu* (Universitatea de Vest din Timişoara) – „Probleme de geometrie în spaţiu tratate cu ajutorul cordonatelor“ (două conferinţe); „Despre teorema lui Pitagora“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr *Dumitru Buşneag* (Universitatea din Craiova) – „Mulţimi de numere“ (două conferinţe)

• prof. univ. dr *Constantin Niculescu* (Universitatea din Craiova) – „Funcţii convexe, Inegalitatea lui Popoviciu“ (o conferinţă); „Teorema lui Rolle“ (o conferinţă);

• prof. univ. dr *Dorel Duca* (Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj) – „Sistem de votare“ (o conferinţă); „Probleme de competiţie şi conflict“ (o conferinţă); „Rezolvarea problemelor de conflict şi competiţie“ (o conferinţă)

• conf. univ. dr *Dragoş Popescu* (Universitatea din Bucureşti) – „Teoremele lui MAntel şi Turan cu aplicaţii în geometria combinatorială“ (o conferinţă); „Probleme de geometrie combinatorială“ (o conferinţă)

• conf. univ. dr. *Andrei Vernescu* (Universitatea Valahia din Târgovişte) –„Utilizarea corectă a criteriilor de convergenţă“ (o conferinţă); „Şiruri de integrale“ (o conferinţă).

Ca şi în anii precedenţi, vom menţiona prezenţa la cursuri a multora dintre „veterani“, acei profesori care constitue un adevărat nucleu al cursanţilor şi al căror lider necontestat este profesorul *Vasile Nechita*, participant la toate cele 12 ediţii. În acest sens vom menţiona că anul acesta am acordat o nouă diplomă de fidelitate(pentru participarea la şapte ediţii consecutive a cursurilor) doamnei profesor *Mariana Oleniuc* de la şcoala cu clasele I-VIII din Blăgeşti – Paşcani (jud. Iaşi) O felicităm pe această cale, atât pe domnia sa cât şi pe toţi ceilalţi „veterani“ ai cursurilor.

La finalul acestor rânduri mai trebuie să adresăm mulţumirile noastre sincere domnului profesor *Nicolae Angelescu* – inspector general adjunct la I. Ş. J. Prahova şi preşedinte al filialei Prahova a S. S. M.R, – şi domnului profesor *Mirela Dobrea* – directoare a grupului Şcolar Ion Kolinderu din Buşteni – pentru sprijinul neprecupeţit acordat în buna organizare şi desfăşurare a acestor cursuri. Acestora şi nultor altora, anonimi, le exprimăm gratitudinea noastră.

Lista absolvenţilor cursurilor de perfecţionare pentru profesorii de matematică, organizate de S.S.M.R. Buşteni, 29 iulie-7 august 2008

1. Ababei Constantin	Şc. cu clasele I-VIII Mihai Eminescu – Roman
2. Agapi Maria	Şc. cu clasele I-VIII nr.2 George Călinescu – Oneşti
3. Badea Aurelia Liliana	Lic. Teoretic Dimitrie Bolintineanu – Bucureşti
4. Bejan Cornelia Livia	Universitatea Tehnică Gheorghe Asachi – Iaşi
5. Buju Aura Marinela	Lic. Teoretic Petru Maior – Gherla
6. Burtea Anne-Marie	Gr. Şc. – Oraş Ovidiu
7. Busuioc Didina	Lic de Muzică Tudor Ciortea – Braşov
8. Catană Maria	Col. Naţ. Gheorghe Lazăr – Bucureşti
9. Chirea Elena	Lic. Teoretic Nicolae Bălcescu – Medgidia
10. Cioban Liliana	Col. Naţional Unirea –Târgu Mureş
11. Ciucă Rodica	Gr. Şc. Ind. Anghel Saligny – Brăila
12. Cojocea Manuela Simona	Fac. de Cibernetică, Statistică şi Informatică Economică Bucureşti
13. Cojocea Tatiana	Şc. cu clasele I-VIII nr. 108 Alexandru Obregia– Bucureşti
14. Costăchescu Mărioara	Lic. cu Program Sportiv – Roman
15. Crăciun Liliana	Col. Naţional Unirea –Târgu Mureş
16. Crăciun Dorinel Mihai	Col. Naţional Mihail Sadoveanu – Paşcani
17. Creţu Ciprian	Col. Tehnic Gheorghe Asachi – Iaşi
18. Dogar Anca Veronica	Şc. cu cl. I-VIII Sâncraiu de Mureş – Târgu Mureş
19. Duma Iuliana	Col. Naţional Vasile Alecsandri – Galaţi
20. Duma Vasile	Şc. Gimnazială nr. 26 Ion Creangă – Galaţi
21. Dumitrescu Ştefan Nicolae	Col. Naţional Ştefan Velovan – Craiova
22. Frenţ Angela	Col. Tehnic Feroviar – Braşov
23. Gavriluţ Mihai	Col. Naţ. Roman Vodă – Roman
24. Ghiţă Gabriela Iulica	Lic. Pedagogic Spiru Haret – Buzău
25. Ghiţă Mariana Luminiţa	Colegiul B. P. Haşdeu – Buzău
26. Marinescu Damian	Şc. cu clasele I-VIII Tudor Vladimirescu – Târgovişte
27. Mihăeş Maria	Col. Tehnic Danubiana – Roman
28. Murar Aurelia	Lic. cu Prog. Sportiv Banatul – Timişoara
29. Müller Gina	Lic. Ec. C. C. Kiriţescu – Bucureşti
30. Năstăşelu Maria	Col. Naţional Ştefan cel Mare – Târgu Neamţ
31. Nechita Vasile	Col. Costache Negruzzi – Iaşi
32. Necule Elena	Gr. Şc. Forestier – Câmpina
33. Negrea Ana Maria	Gr. Şc. Traian Vuia – Târgu Mureş
34. Nica Paula	Gr. Şc. Ind. Gheorghe Asachi – Bucureşti
35. Ninulescu Elena	Gr. Şc. I. N. Roman – Constanţa
36. Ni ctică Cătălin	Col. Tehnic Dimitrie Leonida – Bucureşti
37. Nuţ Gabriela	Col. Naţional Unirea – Târgu Mureş
38. Oleniuc Claudia	Gr. Şc. Virgil Madgearu – Iaşi
39. Oleniuc Mariana	Şc. cu clasele I-VIII Blăgeşti – Başcani
40. Pălici Aurelia	Col. Naţional Octav Onicescu – Bucureşti
41. Popa Filofteia	Şc. cu clasele I-VIII nr. 12 – Târgovişte
42. Popescu Maria	Şcoala Centrală – Bucureşti
43. Râtea Ana-Maria	Gimnaziul de Sta Octavian Goga – Sighişoara
44. Roman Neculai	Şc. cu cl. I-VIII Vasile Alecsandri–Mirceşti,
45. Rotundu Raluca Ioana	Şc. cu cl. I-VIII Ionel Teodoreanu – Iaşi
46. Rusu Adriana	Gr. Şc. de Arte şi Meserii – Olteniţa
47. Seceleanu Daniela	Gimnaziul Europa – Târgu Mureş
48. Sârghie Daniela	Col. Naţ. Al. I. Cuza – Focşani
49. Stancu Ion	Lic. Teoretic Dimitrie Bolintineanu– Bucureşti

50. Stăniloiu Nicolae	Gr. Şc. Industrial – Bocşa
51. Ştefan Margareta	Gr. Şc. Forestiar – Câmpina
52. Ţilică Daniela	Gr. Şc. Gheorghe Asachi – Bucureşti
53. Vişan Ion	Lic. Teoretic Tudor Arghezi – Penitenciarul de Maximă Siguranţă – Craiova
54. Zidu George Daniel	Lic. Teoretic Dimitrie Cantemir – Oneşti
37. Zaharia Dan	Col. Naţ. Dimitrie Cantemir – Bucureşti

Dan Radu

Profesorul Mihai Gavriluţ la 70 de ani

S-a născut la 10 mai 1938 în frumosul oraş Piatra Neamţ, din judetul Neamţ. Datorită evenimentelor declanşate de cel de-al doilea război mondial, familia a fost nevoită să se refugieze la Râmnicu-Vâlcea, pentru o perioadă. Apoi s-au întors pe meleagurile moldave, alegând ca reşedinţa oraşul Roman (1944). Urmează şcoala primară „Sf. Gheorghe“ din localitate, iar din clasa a V-a şi până în clasa a X-a, cursurile liceului de băieţi (actualul Colegiu National „Roman Vodă“. În 1962 termina Facultatea de Matematica de la Universitatea „Al. I. Cuza“ din Iaşi, fiind repartizat la liceul, unde fusese elev. În perioada 1970-1975 urmează cursurile Facultăţii de Educaţie Fizică şi Sport din Bucureşti, la secţia fără frecvenţă. În 1974 se căsătoreşte şi are două fete, care nu l-au urmat în profesie: una a terminat medicina şi cea mică finanţe-bănci. În perioada 1979-1989 este director la Liceul Agricol din localitate, iar în 1989 revine la C. N. „Roman Vodă“. Din martie 1990 si până în 1998 lucrează ca inspector şcolar la I. Ş. J. Neamţ. În anul 2000, se pensionează, în „scripte“, dar nu şi în realitate aşa după cum vom vedea în cele ce urmează.

Răsfoind cartea „Pagini din istoria Liceului „Roman Vodă (l872 -1972) din Roman“, 1972, găsim consemnate următoarele:

- Printre premianţii sau menţionaţii Gazetei Matematice-Seria B, pentru activitate deosebită ca rezolvitori de probleme, pentru problem propuse sau note publicate, aproape în ficare an, găsim elevi ai liceului, ca de exemplu *Gavriluţ Mihai*, clasa a X-a-1954.
- Prin activitatea deosebită în cadrul Cercului de matematică, concretizată şi prin participarea la etapa finală a Olimpiadei, s-au evidenţiat în mod deosebit elevii *Ilioi Constantin* şi *Gavriluţ Mihai.*

Domnul profesor *Mihai Gavriluţ*, are bucuria şi onoarea, ca după terminarea Facultăţii de Matematică,în centrul universitar Iaşi, să se întoarcă să predea matematica la Liceul Roman Vodă – pe care îl terminase în Seria anului 1955 – în perioada 1962-1979 şi 1989-2000, fapt care, în acele timpuri, a fost un ţel pentru multe generaţii de elevi, care, prin terminarea studiilor au devenit profesori şi care au dorit ca şi ei să pună o piatră de temelie la viitorul tinerei generaţii.

Domnul profesor *Mihai Gavriluţ*, s-a îndrăgostit de matematică, datorită faptului că a avut ca profesor, pe *celebrul profesor Alexandru Cojcaru*, al cărui exemplu l-a urmat şi ca dascăl în toată cariera lui.

În întreaga sa activitate, domnul profesor *Mihai Gavriluţ* a condus numeroase colective de elevi, ca diriginte , desluşindu-le tainele matematici, căile de o ţinere a rezultatelor foarte bune la toate tipurile de examene, dar şi antrenându-i la tot felul de ativităţi extraşcolare, legate de obeiectul de matematică (concursuri, rezolvări de probleme din Gazeta Matematică şi alte reviste, participarea la sesiuni de comuncări etc.

Ca director la Liceul agricol di Roman (1979-1989) şi ca inspector de specialitate la I. Ş. J. Neamţ (1990-2000) a fost un real sprijin cadrelor didactice tinere în drumul lor spre obţinerea definitivatului în învăţământ şi apoi pentru obţinerea gradelor didactice didctice II şi I. A ştiut să ţină legătura între generaţii şi a convins cu experienţa şi cu rezultate deosebite să ţină cursuri cu profesorii tineri sau să-i primească să asiste la ore pentru o mai bună pregătire în vederea obţinerii gradelor didactice sau a perfecţionărilor ce se desfăşurau periodic, la nivel naţional. De foarte multe ori, a antrenat profesorii în diferite activităţi extraşcolare (concursuri, simpozioane, sesiuni de comunicări etc).

În anul 2000 se pensionează şi, cum s-ar fi aşteptat toată lumea, ar fi trebuit să-l vedem mai rar pe domnul profesor la şcoală şi mai mult în familie. Dar n-a fost deloc să fie aşa! Familia, care i-a apreciat întotdeauna activitatea şi l-a înteles în toate împrejurările, i-a fost şi de astă dată alături şi i-a respectat hotărârea de a-şi continua activitatea.

Şi cum cei împătimiţi,.nu pregetă nici timp, nici efort pentru ca visele lor să devină realitate, iată realizările profesorului *Mihai Gavriluţ*, după pensionare:

• Colaborează cu câteva edituri din ţară şi duce profesorilor şi elevilor ultimile noutăti din matematică;

• Este cel mai vechi, dar şi cel mai activ, intermediar între redacţia revistei „Gazeta Matematică"şi şcoală, făcând ca elevii şi profesorii de la cele mai izolate şcoli ale judeţului (şi chiar din judeţele limitrofe), să beneficieze de abonamentele la această revistă, transportul făcându-l, de fiecare dată, pe propria lui cheltuială;

• Este prezent, cu elevi sau fără elevi, la aproape toate concursurile interjudeţene ce se organizează în prezent în ţară; de multe ori convinge doi sau trei profesori să-l însoţească şi face ca drumul până la localitatea unde se organizează concursul să fie o excursie de neuitat, pentru că nu permite să se sară vreun obiectiv turistic sau istoric, fără a-l vizita.

• În fiecare vacanţă de primăvară participă la faza natională a Olimpiadei de Matematică;

• Publică articole sau propune probleme în diferite reviste de specialitate (Gazeta Matematică – Bucureşti, Axioma – Supliment Matematic – Ploieşti etc.), îndeamnă şi chiar insistă să facă acelaşi lucru şi colegii lui cu experienţă au mai tineri;

• În anul 2004 scrie, în colaborare cu *Vasile Berinde* şi *Andrei Horvat-Marc*, cartea „Mathematics Competitions", scoasă la Editura CUB PRESS 22 din Baia Mare, lucrare ce a fost prezentată în luna iulie a aceluiaş an la Copenhaga, la al X-le Congres de Educaţie Matematică (ce se desfăşoară din doi în doi ani), unde sunt prezentate sistemele de învăţământ din câteva ţări ce sunt anunţate de la ediţia anterioară;

•. Este omul care a ţinut în viaţă Filiala Roman a S. S. M. R., a cărui preşedinte devine după anul 2000. În această calitate, stabileşte colaborări cu celelalte filiale din ţară, cu C.C.D. Neamţ, cu Primăria Muncipiului Roman, cu liceul cu Program sportiv Roman, cu C. N. Roman-Vodă din Roman, cu Gr. Şcolar Vasile Sav şi alte şcoli sau licee sau din ţară.

În colaborare cu membri Filialei Roman a S. S> M. R. şi cu alţi simpatizanţi au loc următoaerle activităţi:

• Cocursul „Viitorii Matematicieni", pentru clasele II-VI (mai-iunie), iniţiat de domnul profesor *Mihai Gavriluţ*, care a ajuns la ediţia a VI-a, ediţie ce s-a desfăşurat în 7 iunie 2008, la Liceul cu program sportiv din Roman.

• Domnul profesor *Mihai Gavriluţ* a organizat Concursul interjudeţean Gheorghe Vrânceanu, pentru clasele VII-XII, la Roman, în decembrie 1995 şi Concursul interjudeţean Memorial Alexandru Cojocaru pentru clasele II-XII (2004 şi 2006).

• organizarea sesiunilor de referate şi comunicări metodico-ştiinţifice, pentru profesori, învăţători şi educatori din judeţul Neamţ, ajungându-se la ediţia a VII-a, ediţie desfăşurată în 3 aprilie 2008 la Liceul cu Program sportiv din Roman, unde s-au conferit şi numeroase diplome de excelenţă, din partea S. S. M. R., dar şi din partea Filialei Roman, unor personalităţi care de-a lungul anilor au sprijinit activităţile legate de matematică, ale filialei, la diverse concursuri, simpozioane sau sesiuni de comunicări, personalităţi, care, prin meseria lor nu aveau nici o legătură cu matematica. La aceste sesiuni, au participat de fiecare dată profesori, învăţători sau educatori din toate judeţele Moldovei, dar şi din alte judeţe: Timiş, Prahova etc.

• Organizarea simpozioanelor cu temele „110 ani de la înfiinţarea Gazetei Matematice" (martie 2006), „Matematica şi religia" (octombrie 2006), „Matematica şi sportul" (iunie 2007), „Matematica şi poezia" (octombrie 2007), „Eminescu şi Matematica" (15 ianuarie 2008), „Artele şi matematica" (octombrie 2008).

• Domnul profesor *Mihai Gavriluţ* susţine în fiecare an comunicări la diverse sesiuni metodico-ştiinţifice ce se organizează la Sinaia, Ploieşti, Roman, Bucureşti.

• Împreună cu membri Filialei Roman a S. S. M. R., participă în fiecare an cu lucrări sau comunicări interesante la Conferinţele anuale ale S. S. M. R. organizate în diferite lcalităţi din ţară.

• Este unul din cei mai vechi participanţi la Cursurile de vară organizate de S.S.M.R., la începput la Predeal şi apoi la Buşteni. Bineînţeles că nu vine niciodată singur şi că în fiecare ana caută să mărească numărul colegilr care îl însoţesc.

Această bogată activitate îl recomandă pe domnul profesor *Mihai Gavriluţ* pentru a fi desemnat un bun exemplu demn de urmat de către tinerii noştri. Ne bucurăm că am avut onoarea de a-l cunoaşte ca om, profesor şi coleg şi îi mulţumim că şi la această vârstă a rămas fidel matematicii. Suntem mândri că romaşcanul nostru a pus o piatră de baza la temelia învăţământului matematic preuniversitar din România şi indiferent de epoca istorică, a luptat cu metodele lui ca elevii să fie bine pregătiţi şi conduşi în drumul spre viaţă.

Cred că a făcut multe sacrificii în viață pentru a-şi vedea realizate visele, dar satisfacţia împlinirii lor a făcut ca ele să fie uitate!

Acum, la împlinirea frumoasei vârste de 70 de ani, îi urăm cât mai mulţi ani şi încă pe atâtea realizări.

Marioara Costăchescu

REVISTA REVISTELOR

Revista de Matematică din Timişoara

Domnul profesor *Ion Damina Bârchi* ne-a expediat numerele 3 şi 4 din 2008 ale revistei timişorene.

Ca deobicei, revistele conţin un număr de probleme propuse şi rezolvate – foarte interesante şi variate – semnate de unii dintre cei mai prestigioşi autori de probleme din ţară.

În revistă sunt publicate şi o serie de scurte note matematice, din care vom aminti:

• în nr. 3/2008: „O inegalitate echivalentă cu inegalitatea mediilor" (*D. Mărghidanu*, *D. Şt. Marinescu*, *V. Cornea*), „Generalizarea unei probleme date la O. M. J. - 2007" (*N. Stanciu*).

• în nr. 4/2008: „Generalizarea inegalităţii Stevin-Bottema" (*M. Cuconaş*), „O inegalitate verificată de funcţii convexe" (*O. T. Pop*).

Dan Radu

Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin

De la Reşiţa am rimit nr. 23 şi 24 (an IX-2008) ale revistei editate de filiala Caraş Severin a S. S. M. R.

Vom menţiona titlurile câtorva articole şi note inserate în aceste numere:

• în nr. 24: prima parte a articolului „Fractali" semnat de *G. Mahalu*), precum şi notele „Mulţimi legate" (*N. Stăniloiu*) şi „Inegalitatea lui Sylvester" (*L. Dragomir*);

• în nr. 25: „Puncte importante în triunghi" (*Marina Constantinescu* şi *Mircea Constantinescu*), „Generalizarea unei probleme de concurs" (*N. Stăniloiu*), „Partea întreag a şi partea fracţionară a unui număr real" (*L. Dragomir*).

Desigur, revistele conţin şi un mare număr de probleme propuse spre rezolvare elevilr de gimnaziu şi liceu.

Dan Radu

Axioma – supliment matematic

Prin bunăvoinţa domnului profesor *Gheorghe Crăciun*, redactorul coordonator al publicaţiei, am primit numerele 26 şi 27 din 2008 ale publicaţiei ploieştene editate sb egida „Fundaţiei oamenilor de ştiinţă din Prahova".

Vom aminti titlurile a trei interesante note matematice publicate în aceste două numere: „Asupra unui sofism geometric" (*M. Oprea* – în nr. 26/2008), „Asupra conjecturii lui Collatz" (*Şt. Stroe* – în nr. 26/2008), „Asupra algoritmului lui Euclid" (*M. Oprea* – în nr. 27/2008).

Demn de menţionat este faptul că revista are tendinţa de a se răspândi din ce în ce mai mult pe lan naţional, fapt atestat de spaţiul larg ocupat de listele de rezolvitori din diversele zone ale ţării.

Dan Radu

Sfera – revistă de matematică

Din Băileşti am primit numărul 12 (2/2007-2008) al revistei locale dedicate învăţământului matematic preuniversitar. Revista pe care am mai prezentat-o în cadrul acestei rubrici, îşi continuă cu consecvenţă apariţia de şase ani (două numere în fiecare an şcolar, structurate în funcţie de materia ce urmează să fie parcursă în semestrul respectiv), tinzându-se să-şi găsească locul printre publicaţiile de profil ce apar în ţara noastră.

Dintre notele matematice inserate în acest număr amintim: „Asupra unor probleme din Gazeta Matematică" (*D. M. Bătineţu-Giurgiu*), „Ecuaţii cu o infinitate de soluţii reale" (*I. Ivănescu*), „Probleme de geometrie plană rezolvate cu ajutorul geometriei în spaţiu" (*M. D. Gurgui*), „Inegalităţile lui Cebâşev dintr-o nouă perspectivă" (*S. Puşpană*).

Dan Radu

RECENZII

A. R. RAJWADE, A. K. BHANDARI, Surprises and Counterexemples in Real Function Theory, Hindustan Book Agency, 2007

Analiza matematică oferă, poate mai mult decât oricare altă ramură a matematicii, game extrem de diversificate de situaţii, cu numeroase nuanţe posibile. Tot atât de diversificate sunt şi diferitele contraexemple, la diverse capitole, ceea ce a făcut ca să se resimtă necesitatea de a le sistematiza în anumite cărţi destinate special acestora. Cea mai cunoscută carte de acest fel este, probabil, cea a autorilor *Gelbaum* şi *Olmsted* „Counterexamples in Analysis" (Holden-Day, Inc. San Francisco, London, Amsterdam, 1964), tradusă şi în limba română în 1973.

Cartea pe care o prezentăm acum tratează, poate, mai puţine probleme, dar acestea sunt dintre cele mai interesante, mai grele şi toate sunt aprofundate în detaliu. Conţine următoarele 7 capitole:

1. Introduction to the real line $\mathbb{R}$ and some of the subsets
2. Functions: Pathological, peculiar and extraordinary
3. Famous everywhere continuous, nowhere, differentiable functions: Van der Waerden's and others.
4. Functions: Continuous, periodic, locally recurent and others
5. The derivative and higher derivatives
6. Sequences, Harmonic Series, Alternating Series and related results
7. The imfinite exponential $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}}$ and related results.

Lucrarea se întinde pe 290 de pagini, conţine multe figuri, două apendixuri, o bibliografie cu 118 titluri şi un index.

Foarte detaliat redactată, cu o prezentare grafică excelentă, cartea oferă un material foarte interesant, de mare completitudine şi profunzime şi prilejuieşte o lectură pansionantă. O recomandăm cu multă căldură.

Andrei Vernescu

ŞTEFAN OLTEANU, IOANA CRĂCIUN, Profesorul Miron Oprea – ieri şi azi, Editura PREMIER, Ploieşti, 2007

Volumul omagial „Profesorul Miron Oprea – ieri şi azi" a fost publicat sub egidaa Fundaţiei oamenilor de Ştiinţă din Prahova. El vine să ilustreze viaţa şi activitatea unei persomnalităţi marcante prahovene, a unui om care şi-a dedicat întreaga viaţă proprăşirii învu aţământului matematic şi activismului social.

Iată una dintre profesiile de credinţă ale profesorului *Miron Oprea*:

„. . . Am crezut şi cred în adevărurile veşnice, eterne şi neperisabile şi, de aceea, primul meu mesaj către tineret (în special, cel din şcoli) este: învăţaţi matematică, aceasta vă va face să gândiţi corect şi clar în orice situaţie, . . . , vă va face mai deştepţi decât alţii şi vă apropie de Dumnezeu . . . . Îmi iubesc neamul meu românesc şi de aceea îmi cert semenii şi elevii ori de câte ori fac abateri grave de la calea adevărului . . . ."

Volumul debutează cu o scurtă biografie a profesorului, semnată de *Ioana Crăciun* şi *Andrei Olteanu*. Piesa centrală o constituie, însă, un amplu interviu – realizat în anul 2005 de *Andrei*

Crăciun – în care, în cuvinte simple, dar bine alese – profesorul îşi radiografiază viaţa şi îşi expune crezurile. În fine, în ultima parte sunt consemnate o serie de cuvinte omagiale adresate lui, cu ocazia împlinirii a 75 de ani, de către o serie de personalităţi locale, precum şi alte două scurte interviuri menite să creioneze mai bine personalitatea Omului şi Profesorului.

Volumul conţine o bogată iconografie, ceea ce face din lecturarea lui un demers plăcut şi instructiv.

Dan Radu

ION NEDELCU, ANCA TUŢESCU, LUCIAN TUŢESCU,
Probleme de matematică pentru concursuri,
Editura REPROGRAPH, Craiova, 2007

Volumul de faţă conţine circa 350 de proleme, aproape toate fiind originale, ele purtând semnătura autorilor într-o serie de reviste din ţară şi din străinătate.

Problemele, fără a fi deosebit de dificile, întrunesc exigenţele unor probleme de concurs, scop pentru care au şi fost create, soluţiile acestora – prezentate pentru toate problemele – sunt de multe ori ingenioase şi incitante pentru elevii de gimnaziu sau liceu.

Cartea se adreează, în primul rând, elevilor ce pregătesc diverse concursuri şcolare, dar şi profesorilor angrenaţi în pregătirea lor.

Dan Radu

POŞTA REDACŢIEI

Dan Giurgiu – Şcoala nr. 37 din Craiova. Am primit materialul cu titlul „Curs opţional de matematică la clasa a VIII-a – Relaţii metrice“. Îl vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Alina Sântămărian – Departamentuul de matematică al Universităţii Tehnice din Cluj. Articolul dumneavoastră cu titlul „Approximations for a generalization of Euler's constant“ se află în studiul Comitetului de Redacţie.

Dumitru Bătineţu-Giurgiu – Bucureşti. Nota matematică cu titlul „Din nou asupra problemei 50 din Gazeta MAtematică seria A“ se află în atenţia Colegiului Redacţional care va decide aupra oportunităţii publicării lui.

Dorian Licoiu – Şcoala cu clasele I-VIII din Dăbuleni. Articolul pe care ni l-aţi expediat cu titlul „Criteriul de divizibilitate cu numere Fermat“ va fi supus analizei Colegiului Redacţional.

Marian Tetiva – Colegiul Naţional „Gheorghe Roşca-Codreanu“ din Bârlad. Nota matematică intitulată „Asupra unei congruenţe utile în demonstraţia teoremei Erdös-Grinsberg-Zio“ se află în atenţia Colegiului redacţional. De asemenea, am primit şi o problemă propusă de dumneavoastră.

Laurenţiu Modan – Bucureşti. Am primit cele două probleme propuse. Le vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Ovidiu Pop – C. P. 514, O. P. 5, 440310 Satu Mare. Am primit problema propusă de dumneavoastră. O vom supune atenţiei Colegiului Redacţional.

Nicuşor Minculete – Universitatea Dimitrie Cantemir din Braşov. Am primit articolul dumneavoastră cu titlul „The extension of Koci's inequality to the convex quadrilateral“, Colegiul Redacţional urmând să-l analizeze, fapt ce este valabil şi pentru cele şase probleme propuse.

Mihail Bencze – Str. Hărmanului, nr. 6, 505600 Săcele. Am primit problema propusă de dumneavoastră O vom analiza în cadrul Comitetului de Redacţie.

Alexandru Szöke – Facultatea de Matematică şi informatică a Universităţii din Bucureşti. Articolul dumneavoastră intitulat „Aspecte ale implementării reţelelor de pocesare evoluţionistă“ se află în prezent la referat, urmând ca apoi să hotărâm în ce măsură este publicabil sau nu.

Dan Radu

ERATĂ

1. În G.M.-A nr. **4**/2007, la pag. 341, primele cinci rânduri vor fi omise, deoarece se repetă.

2. La pag. 103 din G.M.-A nr. **2**/2008, în scrierea relaţiilor (31), (32), (33), (35) avem respectiv:

$h_a + h_b + h_c + h_d \geq 16r$ (în loc de „=“);

$m_a + m_b + m_c + m_d \leq \dfrac{16R}{3}$ (în loc de „=“);

$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \leq \dfrac{64}{9}R^2$ (în loc de „=“);

$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \leq \dfrac{1}{4} \cdot 16R^2$ (în loc de „=“).

2. La pag. 105, tot din G.M.-A nr. **2**/2008, avem (duă stabilirea inegalităţii (46): „ Similar punctului c) ...... rezultă:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \quad \leq b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \leq 4R^2, \qquad (47)$$

....

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \geq \frac{1}{3}(d_1 + d_2 + d_3)^2 \quad \geq \frac{1}{3}\left(54\sqrt{3} \cdot r^3 R^2\right)^2 = \ldots\ldots$$

(în loc de $\leq$)“

În G.M.-A nr. **3**/2008, la pag. 282, rândul 19 de sus se va citi „23“ în loc de 28.

În G.M.-A nr. **3**/2008, pe coperta IV, rândul 4 de sus se va citi „$L \notin \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$“ în loc de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

În G.M.-A nr. **3**/2008, la pag. 283, în titlul primei recenzii de carte se va citi „. . . Paatero“ în loc de „Paajero“.

Redacţia

Anunţ important

În urma unei şedinţe a Comitetului de redacţie provizoriu s-a hotărât ca, începând cu numărul 1 din anul 2009, formatul revistei să fie modificat. Astfel, rubricile permanente ale revistei vor fi următoarele:

1. Articole ştiinţifice şi de informare ştiinţifică
2. Note matematicearticole metodice
3. Examene şi concursuri
4. Didactica matematicii
5. În sprijinul cursurilor obţionale
6. Puncte de vedere
7. Probleme propuse
8. Soluţiile problemelor propuse
9. Istoria matematicii
10. Manifestări ştiinţifice
11. Din viaţa societăţii
12. Recenzii

Rubricile **Revista revistelor** şi **Poşta redacţiei** vor dispărea. Confirmarea primirii materialelor expediate de autori se va face pe sit-ul societăţii.
Rugăm, pe această cale, autorii să facă, pentru materialele expediate, o recomandare de încadrare într-o anumită rubrică.

Redacţia

TABLA DE MATERII
Vol. XXVI (CV) 2008

XII. Recenzii

XIII. Probleme propuse – rubrică permanentă redactată de Dan Radu şi Radu Miculescu

XIV. Soluţiile problemelor propuse – rubrică permanentă redactată de Dan Radu şi Radu Miculescu

XV. Poşta redacţiei – rubrică permanentă redactată de Dan Radu